Author: Ιβάν Γκάντσεφ

Title: Ιστορικολογική θεμελίωση της Αναλυτικοσυνθετικής μεθόδου σκέψης στα σχολικά Μαθηματικά.

Abstract: Άρθρο σχετικό με το αξίωμα: Σύνθεση χωρίς Ανάλυση δεν υπάρχει.

Creator: HDML

ΙΣΤΟΡΙΚΟΛΟΓΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΣΥΝΘΕΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΣΚΕΨΗΣ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ιβάν Γκάντσεφ
Σόφια - Βουλγαρία

Είναι γνωστό πως ο όρος ανάλυση έχει ελληνική προέλευση και σημαίνει διαμελισμό είτε αποσύνδεση. Επίσης ελληνικός είναι ο όρος σύνθεση. Αυτός σημαίνει συνένωση είτε σύσταση. Από την εποχή ακόμα των αρχαίων Ελλήνων τις λέξεις αυτές τις συνέδεαν με τους δυο τρόπους εξέτασης της γνωστικής δραστηριότητας των ανθρώπων. Ακριβέστερα, την ανάλυση τη θεωρούσαν ως μέθοδο συλλογισμού με κατεύθυνση από το ολικό στο μερικό, ενώ τη σύνθεση τη θεωρούσαν ως μέθοδο με κατεύθυνση από το μερικό στο ολικό.

Αργότερα, σιγά-σιγά είχε συνειδητοποιηθεί το γεγονός ότι, στη γνωστική δραστηριότητα η ανάλυση και η σύνθεση ουσιαστικά είναι δυο βασικές μέθοδες, η **ενότητα των οποίων εξασφαλίζει την ολοκληρωμένη αναγνώριση των αντικειμένων.**

Ο ρόλος της ενότητας αυτής στη διανοητική δραστηριότητα των ανθρώπων είχε εκφραστεί με σαφήνεια στο δεύτερο μισό του 19ου αιώνα από τον Φ. Ένγκελς ως εξής: «Η σκέψη συνίσταται το ίδιο στο να αποσυνδέει τα συστατικά στοιχεία των αντικειμένων, όσο και στο να ενώνει τα συσχετιζόμενα μεταξύ τους στοιχεία σε μια ορισμένη ενότητα. **Σύνθεση χωρίς ανάλυση δεν υπάρχει.**»[1]

Η ανάλυση και η σύνθεση ως μέθοδες σκέψης στη γνωστική δραστηριότητα γενικά και στην εκμάθηση των Μαθηματικών ειδικότερα, από παλιά ήταν αντικείμενο συνειδητής μελέτης. Από εδώ συνεπάγεται και η χρησιμοποίησή τους για μια πιο αποτελεσματική καθοδήγηση της ανάπτυξης των φυσικών διερευνητικών ικανοτήτων των μαθητών.

Η ιδέα της συνειδητής αξιοποίησης της ανάλυσης και της σύνθεσης συναντάται στην Αρχαία Ελλάδα, στα έργα των μαθηματικών Ευκλείδη και Πάππου. Την ιδέα αυτή την είχαν προσέξει επίσης:

Το 17ο αιώνα ο μεγάλος Γάλλος μαθηματικός και φιλόσοφος Ρ. Ντεκάρτ, στη δεκαετία του '50 του αιώνα μας ο γνωστός μαθηματικός και παιδαγωγός Γ. Πόλυα,

όπως και πολλοί σύγχρονοι Σοβιετικοί ψυχολόγοι και μαθηματικοί, π.χ., οι Σ.Μ. Ρουμπεστέιν, Φ.Φ. Πριττούλ, Ε.Φ. Ντανίλεβα, Ι.Μ. Κολιάγκιν, Ν.Β. Μετέλσκι κ.ά., και οι Τσέχοι μαθηματικοί Γιαν Βίσιν και Γιαροσλάβ Σεντίβι.

Χωρίς να σταθούμε λεπτομερώς στα συγκεκριμένα έργα των συγγραφέων που αναφέραμε θα τονίσουμε μόνο ότι, την ανάλυση και τη σύνθεση τις εξετάζουν πριν απ' όλα ως μέθοδες σκέψης στη λύση των προβλημάτων. Συγκεκριμένα, ο Ευκλείδης γράφει: «Μια πρόταση αποδεικνύεται αναλυτικά, όταν το ζητούμενο γίνεται αποδεκτό ως γνωστό και με βάση τα πορίσματα που προκύπτουν απ' αυτό εξάγεται με γνωστή την αλήθεια και αντίθετα, αυτή (η πρόταση) αποδεικνύεται συνθετικά, όταν με τη βοήθεια γνωστών αληθειών φτάνουμε στο ζητούμενο.» Ο Πάππος από τη μεριά του γράφει: «Στην ανάλυση το ζητούμενο το παριστάνουμε σαν κάτι που ήδη έχει βρεθεί και εξετάζουμε από πού θα μπορούσε να προέλθει και, πιο πέρα, τι θα μπορούσε να το προηγηθεί οσότου προχωρώντας φτάσουμε με τον τρόπο αυτό σε κάτι το γνωστό, που θα μπορούσε να αξιοποιηθεί ως αφετηριακό σημείο. Τι διαδικασία αυτή την ονομάζουμε ανάλυση ή που το ίδιο κάνει, αντίστροφη λύση.»

Όπως φαίνεται από τα ειπωμένα, οι δυο αυτές μέθοδες μπορούν χωρίς καμιά δυσκολία να χρησιμοποιηθούν και για τη λύση οποιωνδήποτε μη γεωμετρικών προβλημάτων. Το γεγονός αυτό το υπογραμμίζει σαφώς και ο Γ. Πόλυα στο βιβλίο του «Πώς να λύνω προβλήματα». Ουσιαστικά αυτή είναι και η πρώτη γνωστή σε μας συνειδητή επέκταση της θέσης της ανάλυσης και της σύνθεσης στη μαθηματική δραστηριότητα. Εντούτοις, μέχρι το τέλος της δεκαετίας του '50 όλη τη θεωρία της ανάλυσης και της σύνθεσης την κατασκεύαζαν, αν μπορεί να πει κανείς, διαισθητικά, στη βάση της λεκτικής περιγραφής και χωρίς κάποια προσπάθεια για λογική θεμελίωσή της. Και, μάλιστα, η «θεωρία αυτή» αφορούσε μόνο την κατανόηση του περιεχομένου και την επίλυση των προβλημάτων.

Στη δεκαετία του '60 κατορθώσαμε για πρώτη φορά μέσω της συνεπαγωγής να κατασκευάσουμε μοντέλα για τρεις βασικούς τύπους των σχολικών μαθηματικών προβλημάτων. Για τη διαδικασία της επίλυσής τους χρησιμοποιήσαμε γραμμικές και διακλαδωτές αλυσίδες συνεπαγωγών. Αυτό μας επέτρεψε να θεμελιώσουμε λογικά την ανάλυση και τη σύνθεση ως μέθοδες συλλογισμών στη διαδικασία επίλυσης των προβλημάτων και να οριοθετήσουμε τις ίδιες αυτές μεθόδους με σχήματα, μέσα από τα οποία υλοποιούνται.

Αποδείξαμε ότι, αφού η λύση κάθε προβλήματος, που μπορεί να εκφραστεί με συνεπαγωγές, είναι γραμμική ή διακλαδωτή αλυσίδα των τελευταίων, (σχ. Ια, β), γι' αυτό και η διαδικασία της επίλυσής του ανάγεται στην ανάπτυξη και διάταξη των συνεπαγωγών της αλυσίδας αυτής.

Στο σχήμα της ανάλυσης κατά τον Πάππο οι συνεπαγωγές της λύσης αναπτύσσονται διαδοχικά, αρχίζοντας από την τελευταία, ενώ στο σχήμα της σύνθεσης οι ίδιες συνεπαγωγές αναπτύσσονται αρχίζοντας από την πρώτη. Διαφορετική είναι η εικόνα στη σχήμα της ανάλυσης κατά τον Ευκλείδη. Σύμφωνα με το σχήμα αυτό, η

διαδοχική ανάπτυξη των συνεπαγωγών, των αντίστροφων στις συνεπαγωγές της λύσης, αρχίζει από την τελευταία συνεπαγωγή.

Με τα σχήματα αυτά πράγματι γίνεται διαμελισμός της κάθε λύσης σε τμήματα, δηλ. πρόκειται για μεμονωμένες συνεπαγωγές.

Όμως οι παρατηρήσεις μας απόδειξαν, ότι η επιτυχία εδώ εξαρτάται ουσιαστικά από το κατά πόσο είναι αφομοιωμένα τα αξιώματα, οι ορισμοί και τα θεωρήματα, στα οποία βασίζονται οι αντίστοιχες συνεπαγωγές. Αφετέρου, οι γνώσεις των μαθητών για τα αξιώματα, τους ορισμούς και τα θεωρήματα καθορίζονται:

1) Από το σύστημα της εκπαιδευτικής γνωστικής δραστηριότητας με το οποίο έχουν αφομοιωθεί οι γνώσεις αυτές και

2) Από τον τρόπο δόμησής τους στη συνείδηση των μαθητών.

Τα δεδομένα αυτά, όπως και άλλα, μας υπόδειξαν να ερευνήσουμε πιο πλατιά τη γνωστική δραστηριότητα στο σχολείο και επέτρεψαν να βρούμε τη θέση της ανάλυσης και της σύνθεσης σ' αυτήν τη δραστηριότητα.

Αποδείχτηκε, ότι στις αποδείξεις των θεωρημάτων, αλλά και γενικά κατά τη λύση των προβλημάτων στην πλατιά εκπαιδευτική πρακτική, συνεχίζεται να χρησιμοποιείται πριν απ' όλα η συνθετική μέθοδος. Την ίδια στιγμή, σε πολλές άλλες μορφές της μαθηματικής εκπαιδευτικής δραστηριότητας, χρησιμοποιείται μόνο η αναλυτική μέθοδος και η γνωστική διαδικασία δεν ολοκληρώνεται με σύνθεση. Είναι φυσικό να περιμένουμε (όπως και συμβαίνει) πως και το αποτέλεσμα από μια τέτοια ημιτελή γνωστική διαδικασία θα είναι μισό. Στη συνέχεια θα σταθούμε σύντομα σ' αυτές τις βασικές, κατά τη γνώμη μας, μορφές δραστηριότητας μέσα από τη διαδικασία εκμάθησης των Μαθηματικών, συμπληρώνοντας τη γνωστική διαδικασία με την αντίστοιχη σύνθεση.

Η πρώτη από τις μορφές αυτές της δραστηριότητας που θα εξετάσουμε είναι η αφομοίωση των μαθηματικών εννοιών. Το αίτημα για λογική συνέπεια στη δόμηση των Μαθηματικών υποχρεώνει ώστε τα θεωρήματα για τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες μιας έννοιας να διδάσκονται σε διαφορετικά σημεία της σχολικής ύλης. Επομένως, συντελείται ένας διαμελισμός (ανάλυση) των γνώσεων για την κάθε έννοια. Λόγου χάρη, τα θεωρήματα που ορίζουν τις ικανές συνθήκες της παραλληλίας δυο ευθειών διδάσκονται στο σχολείο μας (και όχι μόνο σ' αυτό) σε διαφορετικές τάξεις και στη διάρκεια τεσσάρων ετών.

Εντούτοις, η ανάλυση αυτή (ο διαμελισμός) σχεδόν ποτέ δεν ολοκληρώνεται συνειδητά με σύνθεση (συνένωση, συστηματοποίηση) των σκόρπιων θεωρημάτων. Αυτό σημαίνει ότι, η γνωστική διαδικασία αφομοίωσης της έννοιας «παράλληλες ευθείες» μένει μη τελειωμένη.

Τα όσα λέχθηκαν για τις παράλληλες ευθείες ισχύουν, βέβαια, και για όλες τις άλλες βασικές έννοιες στα Μαθηματικά. Οι μελέτες μας έδειξαν, ότι αυτό ακριβώς το γεγονός είναι μια από τις ουσιαστικές αιτίες που πολλοί μαθητές δεν μπορούν να λύσουν προβλήματα χρησιμοποιώντας ήδη γνωστά θεωρήματα. Δεν είναι τυχαίο που

πιο πάνω τονίσαμε, ότι στην πλατιά εκπαιδευτική πρακτική η συνειδητή σύνθεση συνεχίζει να μην ακολουθεί την ανάλυση της γνώσης για την ίδια και αυτή έννοια.

Θα παρατηρήσουμε ότι, και πριν, ορισμένοι αξιόλογοι καθηγητές στη Μέση Εκπαίδευση εφάρμοζαν, αν και με κενά και χωρίς συνέπεια, τη σύνθεση των ικανών συνθηκών για ορισμένες, συνήθως γεωμετρικές έννοιες. Τέτοιες, για παράδειγμα, είναι οι ικανές συνθήκες ισότητας των γωνιών.

Στη δεκαετία του '60 είχαμε κατορθώσει να επεκτείνουμε την ιδέα αυτή σε όλες τις έννοιες. Το αποτέλεσμα ήταν να εισάγουμε μια νέα έννοια, την οποία (με υπόδειξη του Σοβιετικού καθηγητή Α.Α. Στόλιαρ) την ονομάσαμε «διευρυμένος ορισμός», και να κατασκευάσουμε το λογικό μοντέλο της χρησιμοποιώντας τον προτασιακό λογισμό. Στην περίπτωση της έννοιας-αντικείμενο το μοντέλο αυτό είναι η συνεπαγωγή:

$$\big(\rho(x) \wedge \ldots \wedge \rho(x)\big) \wedge \big(\rho(x) \wedge \ldots \wedge \rho(x)\big) \vee \ldots \vee \big(\rho(x) \wedge \ldots \wedge \rho(x)\big) \Rightarrow \rho(x)$$

και για την έννοια-διμελή σχέση είναι η συνεπαγωγή:

$$\big(\rho(x, y) \wedge \ldots \wedge \rho(x, y)\big) \vee \big(\rho(x, y) \wedge \ldots \wedge \big(\rho(x, y)\big) \vee \ldots \vee$$
$$\big(\rho(x, y)\big) \wedge \ldots \wedge \rho(x, y)\big) \Rightarrow \rho(x, y)$$

Εδώ οι ξεχωριστές συζεύξεις παριστάνουν αντίστοιχα τις χαρακτηριστικές ιδιότητες[2] που περιέχονται στους ορισμούς της έννοιας ή στο θεώρημα που ορίζει τις ικανές συνθήκες της.

Βέβαια στα πειράματά μας οι μαθητές αφομοιώνουν μόνο συγκεκριμένους διευρυμένους ορισμούς που συντάσσονται διαδοχικά με συνειδητή σύνθεση των θεωρημάτων που διδάσκονται σε διαφορετικά σημεία της σχολικής ύλης. Χωρίς να σταθούμε στη συγκεκριμένη μέθοδο της σύνθεσης θα δώσουμε στην περίπτωσή μας μόνο ένα μέρος από τον διευρυμένο ορισμό της έννοιας «ορθή γωνία».

Μια γωνία είναι ορθή όταν:

1) ισούται με την παραπληρωματική της, είτε

2) είναι γωνία ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου, είτε

3) είναι η γωνία σε ένα τρίγωνο, παραλληλόγραμμο ή τραπέζιο, η οποία σχηματίζεται από τη βάση και το ύψος που φέρεται σ' αυτήν, είτε

4) είναι η γωνία μεταξύ των διαγωνίων ενός ρόμβου, είτε

5) είναι η γωνία που σχηματίζεται από τη διάμετρο και τη χορδή, από τη μέση της οποίας περνάει η διάμετρος αυτή, είτε

6) είναι η γωνία μεταξύ της ευθείας ενός επιπέδου και της κάθετης σ' αυτό ευθείας, είτε

7) είναι η επίπεδη γωνία μιας δίεδρης ορθής γωνίας, είτε

8) είναι γωνία από το διάστημα (0°, 360°), το ημίτονο της οποίας ισούται με μονάδα, είτε

9) είναι γωνία από το διάστημα (0°, 180°), της οποίας το συνημίτονο ή η συνεφαπτομένη ισούνται με μηδέν.

Με ανάλογο τρόπο συνθέτουμε και μοντελοποιούμε τα θεωρήματα που ορίζουν τις αναγκαίες συνθήκες μιας έννοιας, όμως ακόμα δεν βρήκαμε την κατάλληλη ονομασία για τη σύνθετη πρόταση που προκύπτει. Τα πειράματά μας και οι εργασίες των καθηγητών μας, που έγιναν τα τελευταία 20 χρόνια, έδειξαν ότι, η ολοκλήρωση της γνωστικής διαδικασίας με σύνθεση των θεωρημάτων γύρω από τις έννοιες, τις οποίες αφορούν, διευρύνει σημαντικά τις διερευνητικές ικανότητες των μαθητών. Οι τελευταίοι αποτυπώνουν καλύτερα στη μνήμη τους τα θεωρήματα που διδάσκονται κατά ενιαίες ομάδες (μπλοκ) που σχηματίζονται γύρω από τις βασικές έννοιες. Αυτό οφείλεται στο ότι οι μαθητές αξιοποιούν ορθολογικά (διανοητικά - σημ. Φ.Κ.) την ανακλαστική ιδιότητα της μνήμης. Η ιδιότητα αυτή της μνήμης εξασφαλίζει, με τη σειρά της, τη δυνατότητα για ένα πιο γρήγορο και εύκολο ανάπτυγμα των συνεπαγωγών, βάσει των οποίων καταστρώνεται η λύση των προβλημάτων.

Επίσης μόνο αναλυτικά πραγματοποιούνται οι άλλες δυο μορφές της μαθηματικής δραστηριότητας που έχουν να κάνουν με την κατανόηση της σύνθεσης μεταξύ των μαθηματικών εννοιών ως προς το περιεχόμενό[3] τους, αλλά και ως προς τον όγκο[4] τους.

Η πρώτη απ' αυτές τις μορφές γίνεται σχετικά φανερή κατά την κατασκευή των εννοιών. Ακριβώς τότε μόνο φαίνεται η τοπική και τμηματική σύνθεση της οριζόμενης έννοιας με τις έννοιες που άμεσα χρησιμοποιούνται στον ορισμό.

Κατά την παραδοσιακή διδασκαλία ο όγκος μιας έννοιας παραμένει σχεδόν αφανέρωτος και δεν υπάρχει ούτε και η τοπική σύνδεση μεταξύ των γενεαλογικών και ειδολογικών εννοιών με βάση τον όγκο τους. Γι' αυτό, σε τελική ανάλυση, οι μαθητές δεν αποκτούν σχεδόν καμιά ολοκληρωμένη εικόνα για το σύτημα των διδασκομένων εννοιών.

Το αποτέλεσμα αυτό το εκφράζει καλά η γερμανική παροιμία, κατά την οποία οι μαθητές «πίσω από το δένδρο δεν βλέπουν το δάσος». Για να παραμερίσουμε το κενό αυτό, επεξεργαστήκαμε και πειραματιστήκαμε σε μια τέτοια διδακτική μέθοδο που εξασφαλίζει σταδιακά τη βαθμιαία σύνθεση των αποκτούμενων γνώσεων σε σύστημα των διδασκομένων εννοιών ως προς το περιεχόμενό τους, αλλά και ως προς τον όγκο τους.

Θα παρουσιάσουμε ορισμένα διαγράμματα και γραφικά σχήματα, που οι καθηγητές στη Μέση Εκπαίδευση ήδη χρησιμοποιούν και με τους οποίους συνεργαζόμαστε (βλ. σχ. 2 και 3).

Θα παρατηρήσουμε μόνο ότι, στις περιπτώσεις αυτές στη σύνθεση αφιερώνεται λίγος χρόνος και αυτός στην τελευταία φάση της παράδοσης της ύλης (του μαθήματος, του θέματος, του κεφαλαίου ή του σχολικού έτους).

Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι, την ιδέα της σύνθεσης των γνώσεων των

μαθητών για τις έννοιες, με χρήση των όγκων των τελευταίων, την εφάρμοζε ακόμα ο Euler, πολύ πριν από την εμφάνιση της θεωρίας συνόλων.

Όταν δίδασκε στα παιδιά χρησιμοποιούσε, π.χ. εικόνες σαν και αυτές που φαίνονται στο σχήμα 3. Με το γεγονός αυτό συνδέεται και η ονομασία «διαγράμματα των Euler-Venn» στη θεωρία συνόλων. Όπως βλέπουμε, το μεγαλοφυές πνεύμα του Euler διαισθάνθηκε το διδακτικό ρόλο που μπορεί να παίξει αυτό που εμείς σήμερα το ονομάζουμε συνολοθεωρητική προσέγγιση και την οποία πολλοί την αποφεύγουν.

Η επόμενη μορφή δραστηριότητας είναι η εκμάθηση ενός συστήματος θεωρημάτων, όπου το πρόβλημα της ανάλυσης και της σύνθεσης τίθεται όπως και στην περίπτωση της εκμάθησης του περιεχομένου ενός συστήματος εννοιών. Τώρα όμως πια το ζήτημα δεν εξετάζεται από τη σκοπιά των εννοιών, στις οποίες στηρίζονται τα θεωρήματα του συστήματος, αλλά από τη σκοπιά των θεωρημάτων που χρησιμοποιούνται για την απόδειξή τους. Κι εδώ, όπως και στους ορισμούς, στην καθιερωμένη παράδοση ενεργούν πριν απ' όλα αναλυτικά: όταν αποδεικνύονται μεμονωμένα θεωρήματα, αυτά τα συνδέουν μόνο μ' εκείνα τα θεωρήματα που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη άμεσα, δηλ. μαθαίνονται διαδοχικά οι ξεχωριστοί κρίκοι από το σύστημα θεωρημάτων.

Φυσικό είναι και σ' αυτή την περίπτωση για να ολοκληρωθεί η γνωστική διαδικασία, να πρέπει η ανάλυση να συμπληρωθεί με τη σύνθεση. Μέσω της σύνθεσης αυτής είναι απαραίτητο και πάλι να δίνεται σταδιακά και βαθμιαία τουλάχιστον η ιδέα για το σύστημα των διδασκομένων θεωρημάτων στο σύνολό του.

Σύμφωνα με τη διδακτική μέθοδό μας τα γραφικά σχήματα τα χρησιμοποιούμε και στα συστήματα θεωρημάτων. Οι εικόνες που προκύπτουν είναι ανάλογες με εκείνες που ήδη συναντήσαμε στους ορισμούς των εννοιών.

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις της σύνθεσης με τη βοήθεια των γραφικών σχημάτων (διαγραμμάτων Euler-Venn) η θετική ανταπόκριση της μεθόδου μας αυξάνεται. Ουσιαστικά πλαταίνει η εφαρμογή της διδακτικής Αρχής της εποπτικότητας.

Εκτός αυτού, εδώ παριστάνονται εποπτικά σπουδαίες δομικές και λογικές συνδέσεις μεταξύ των διδασκομένων εννοιών είτε προτάσεων με μέσα, τα οποία ουσιαστικά είναι μαθηματικά.

Έτσι, λοιπόν, στις καθορισμένες στιγμές της εκπαιδευτικής διαδικασίας εμφανίζονται εικόνες που είναι ανάλογες με τα προγράμματα-περιλήψεις του Σοβιετικού μαθηματικού Σατάλοφ, αλλά με γραφικά μέσα που έχουν σαφή και ακριβή μαθηματικό χαρακτήρα.

Η τελευταία μορφή της μαθηματικής δραστηριότητας που θα εξετάσουμε από τη σκοπιά που μας ενδιαφέρει είναι και πάλι η διαδικασία επίλυσης προβλημάτων, όχι όμως ξεχωριστών, αλλά ολόκληρης κλάσης προβλημάτων. Κι εδώ για τη διαμόρφωση ικανοτήτων στη λύση προβλημάτων μιας δοσμένης κλάσης χρησιμοποιούν συνήθως, και πριν απ' όλα την αναλυτική μέθοδο: στην καλύτερη περίπτωση λύνουν ένα πρόβλημα από τη δοσμένη κλάση, μετά λύνουν δεύτερο πρόβλημα από την ίδια κλά-

ση, λύνουν το τρίτο κ.τ.λ., όμως πολύ συχνά δεν υποδείχνουν συνειδητά τη γενική ιδέα στη λύση αυτών των προβλημάτων και από τους μαθητές δεν κατασκευάζεται το σύνολο της κλάσης των προβλημάτων που λύνονται με την αντίστοιχη μέθοδο.

Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις που τα προτεινόμενα για λύση προβλήματα δεν τα ομαδοποιούν καθόλου βάσει της γενικής λύσης τους. Αν στην πρώτη περίπτωση μπορούμε να ελπίζουμε ότι έστω και ορισμένοι μαθητές θα κάνουν τη σύνθεση από μόνοι τους, στη δεύτερη όμως περίπτωση δεν υπάρχει καμιά ελπίδα για κάτι τέτοιο. Τελειοποιώντας και επεκτείνοντας την πείρα ορισμένων αξιόλογων καθηγητών από τη Μέση Εκπαίδευση προσανατολίσαμε τις προσπάθειές μας στην επεξεργασία της διδακτικής μεθόδου επιλογής και ταξινόμησης των προβλημάτων. Με τη μέθοδο αυτή οι μαθητές από μόνοι τους ανακαλύπτουν τη γενική ιδέα της λύσης των προβλημάτων και τα συστηματοποιούν σε ξεχωριστές ομάδες.

Τέτοιες ομάδες προβλημάτων παρουσιάσαμε στο βιβλίο μας «Περί μαθηματικών προβλημάτων» (Σόφια, 1971).

Εδώ θα παραθέσουμε μόνο ορισμένες συνδεμένες μεταξύ τους ομάδες προβλημάτων (βλ. πίνακα Ι), οι οποίες είχαν χρησιμοποιηθεί σε δυο διαφορετικές ώρες από τον Βούλγαρο καθηγητή της Μέσης Εκπαίδευσης Ράικοφ από τη Σόφια.

Παρατηρούμε ότι η αναλυτικοσυνθετική μέθοδος και σ' αυτήν την περίπτωση εξασφάλισε στη διδακτική διαδικασία υψηλή απόδοση, αφού μετά το δεύτερο μάθημα του θέματος «Παράσταση του αθροίσματος των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με το γινόμενό τους» σχεδόν όλοι οι μαθητές ήταν σε θέση να λύνουν όλα τα προβλήματα που δόθηκαν, παρόλο που στο σχολείο και στο σπίτι είχαν λύσει μόνο ένα μικρό μέρος απ' αυτά.

Η ιδέα της διαδικασίας του μαθήματος είναι η εξής:

Από την πρώτη ομάδα λεπτομερώς λύνονται μόνο ορισμένα προβλήματα, ενώ για όλα τα υπόλοιπά της σχεδιάζεται συλλογικά η στρατηγική της επίλυσής τους.

Τα προβλήματα της 2ης και της 4ης ομάδας συντάσσονται στην τάξη από τους ίδιους τους μαθητές συλλογικά και μόνο για δυο-τρία απ' αυτά σχεδιάζεται η στρατηγική της επίλυσής τους.

Τα προβλήματα της 3ης και της 5ης ομάδας συντάσσονται από τους ίδιους τους μαθητές στο σπίτι και τους ζητείται μόνο να λύσουν 3-4 απ' αυτά.

Τα προβλήματα της 6ης και της 7ης ομάδας τα προτείνει ο ίδιος ο καθηγητής απ' αυτά λύνονται μόνο 2-3, ενώ για άλλα 2-3 σχεδιάζεται ανάλογα η στρατηγική της επίλυσής τους.

Τελειώνοντας θα σημειώσουμε ότι, η αναλυτική και η συνθετική μέθοδες αφορούν τη διδασκαλία των Μαθηματικών και από μια πιο πλατιά άποψη, η οποία τα τελευταία χρόνια εξετάζεται ως διαφορική και ολοκληρωτική προσέγγιση. Η ακραία ενασχόληση στη Δύση, αλλά και σ' εμάς στη Βουλγαρία από την ομάδα του ακαδημαϊκού Μπ. Σέντοφ, με τη γνωστική ολοκλήρωση, δηλ. η προσπάθεια κατάργησης της διδασκαλίας κατά επιστημονικούς κλάδους μαθημάτων, είναι ακριβώς μια προσπά-

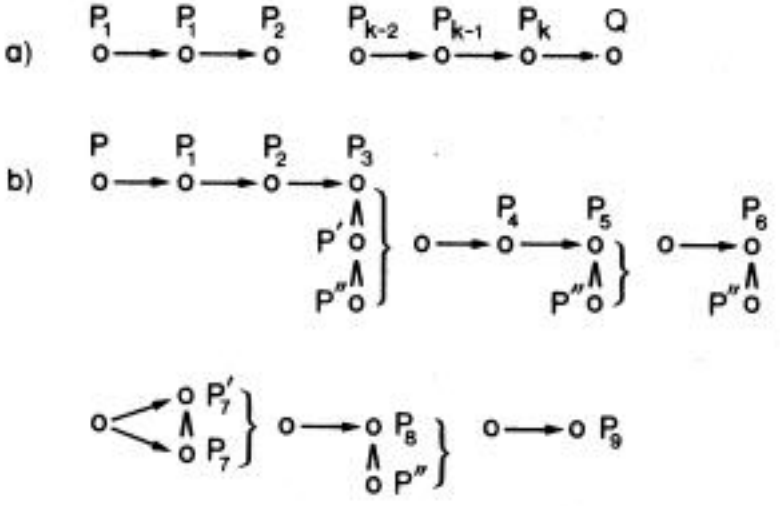
θεια να γίνεται απευθείας η σύνθεση χωρίς την ανάλυση. Γι' αυτό μπορεί να προβλεφθεί από τώρα ότι, αυτή η μεθοδολογικά και ιδεολογικά ασθενής ενασχόληση είναι καταδικασμένη σε αποτυχία.

Σχόλια

1) Οι όροι «ανάλυση» και «σύνθεση» γίνονται αρκετά κατανοητοί από ένα παράδειγμα που έδωσε ο Ρ. Ντεκάρτ (1596-1650) στο βιβλίο του «Λογική»:

«Ας θέσουμε το ερώτημα για το αν εγώ είμαι συγγενής του Κάρολου του Μεγάλου (742-814, σημ. Φ.Κ.). Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό μπορούμε να ακολουθήσουμε δυο δρόμους. Μπορούμε "να πάμε με το γενεαλογικό δέντρο" στο παρελθόν: ξεκινώντας από μένα προς τον Κάρολο τον Μέγα. Επίσης μπορούμε "να πάμε με το γενεαλογικό δέντρο" από το παρελθόν στο σήμερα: από τον Κάρολο τον Μέγα σ' εμένα. Αν βρεθούμε στο ίδιο γενεαλογικό δέντρο, τότε είμαστε συγγενείς.»

2) Περιλήψεις - προγράμματα του Σοβιετικού μαθηματικού Σατάλοφ Β.Φ.: Είναι ειδικά φυλλάδια που αφορούν ή χωριστά θέματα ή θεματικές ενότητες όπου διατυπώνονται με έναν ορισμένο τρόπο (κύρια με λογικές σχέσεις ή διαγράμματα, ή σχηματικές εικόνες, ή σχέσεις μεταξύ τύπων) οι κύριες μαθηματικές ιδέες του συγκεκριμένου θέματος. Έτσι, τα φυλλάδια αυτά αποτελούν τον "οδηγό της σκέψης" του μαθητή, δηλ. "προγραμματίζουν" τη σχετική μαθηματική σκέψη του. Αφού γίνει η δουλειά με τα φυλλάδια, μετά οι μαθητές περνούν στην εξάσκηση. Με τον τρόπο αυτό οι π.χ. 15 ώρες του αναλυτικού προγράμματος συμπυκνώνονται σε 3-6 ώρες. Μέχρι στιγμής τα φυλλάδια αυτά ακόμα δεν εκδόθηκαν. Η έκδοσή τους αναμένεται να γίνει στην επόμενη σχολική χρονιά 1988-1989.

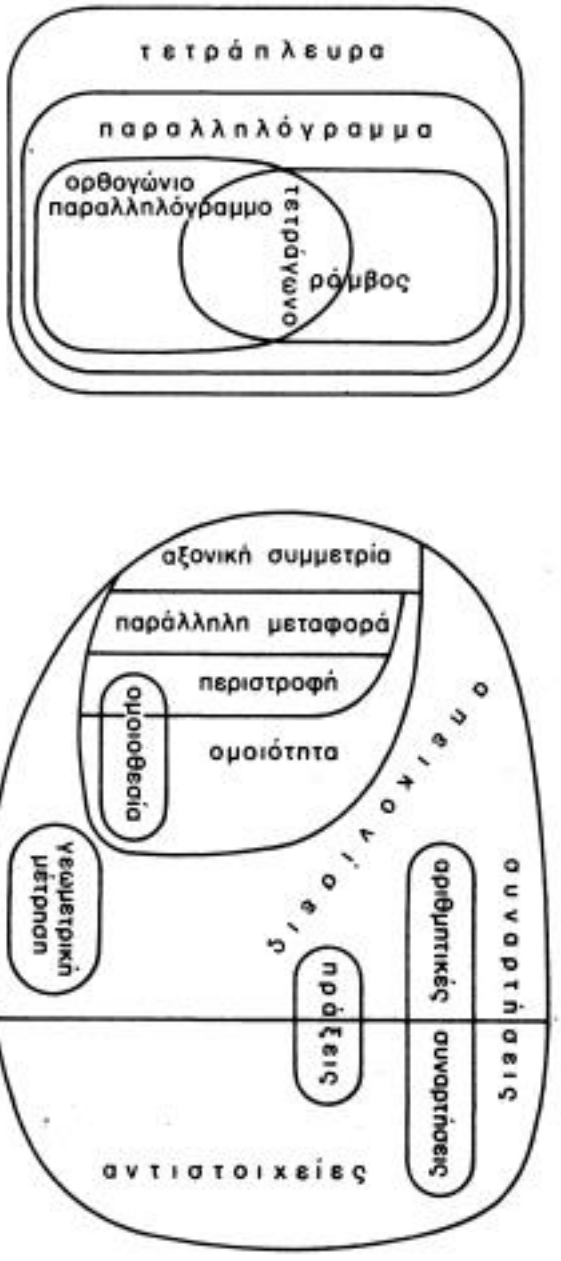


Σχ. 1

Γενεαλογική σύνθεση γεωμετρικών σχημάτων

Σχ. 2

Ειδολογική σύνθεση μαθηματικών εννοιών (συναρτήσεων, γεωμετρικών σχημάτων).



Σχ. 3

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

Ομάδες (κύκλοι) προβλημάτων:
«Παράσταση αθροίσματος με γινόμενο»

I	II	III	IV	V	VI	VII
$1 \pm \sigma\upsilon\nu\alpha$	$\frac{1}{2} \pm \eta\mu\alpha$	$\frac{1}{2} \pm \sigma\upsilon\nu\alpha$	$1 \pm \varepsilon\varphi\alpha$	$1 \pm \sigma\varepsilon\varphi\alpha$	$2\sigma\upsilon\nu^2\alpha \pm \eta\mu 2\alpha$	$1 \pm \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha$
$1 \pm \sigma\upsilon\nu\alpha$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \eta\mu\alpha$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \sigma\upsilon\nu\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3} \pm \varepsilon\varphi\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3} \pm \sigma\varepsilon\varphi\alpha$	$2\sigma\upsilon\nu^2\alpha \pm \sqrt{3}\,\eta\mu 2\alpha$	$1 \pm \sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha$
$\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \eta\mu\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \sigma\upsilon\nu\alpha$	$\sqrt{3} \pm \varepsilon\varphi\alpha$	$\sqrt{3} \pm \sigma\varepsilon\varphi\alpha$	$2\sigma\upsilon\nu^2\alpha \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\,\eta\mu 2\alpha$	$1 \pm \sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha$
$\sigma\varepsilon\varphi\alpha \pm \sigma\varepsilon\varphi\beta$	$1 \pm 2\eta\mu\alpha$	$1 \pm 2\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\sqrt{3} \pm 3\varepsilon\varphi\alpha$	$\sqrt{3} \pm 3\sigma\varepsilon\varphi\alpha$	$2\eta\mu^2\alpha \pm \eta\mu 2\alpha$	$1 \pm 2\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha$
$\varepsilon\varphi\alpha \pm \sigma\varepsilon\varphi\beta$	$\sqrt{2} \pm 2\eta\mu\alpha$	$\sqrt{2} \pm 2\sigma\upsilon\nu\alpha$	$1 \pm \sqrt{3}\,\varepsilon\varphi\alpha$	$1 \pm \sqrt{3}\,\varepsilon\varphi\alpha$	$2\eta\mu^2\alpha \pm \sqrt{3}\,\eta\mu 2\alpha$	$1 \pm \eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha$
$\eta\mu\alpha \pm \varepsilon\varphi\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$	$\sqrt{3} \pm 2\eta\mu\alpha$	$3 \pm 2\sigma\upsilon\nu\alpha$	$1 - \varepsilon\varphi^2\alpha$	$1 - \varepsilon\varphi^2\alpha$	$2\eta\mu^2\alpha \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\,\eta\mu 2\alpha$	$1 \pm \sqrt{2}\,\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha$
$\eta\mu\alpha \pm \sigma\upsilon\nu\alpha$	$1 \pm \sqrt{2}\,\eta\mu\alpha$	$1 \pm \sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\frac{1}{3} - \varepsilon\varphi^2\alpha$	$\frac{1}{3} - \varepsilon\varphi^2\alpha$		$1 \pm \sqrt{3}\,\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha$
$\eta\mu\alpha \pm \sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\frac{1}{4} - \eta\mu^2\alpha$	$\frac{1}{4} - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$	$3 - \varepsilon\varphi^2\alpha$	$3 - \varepsilon\varphi^2\alpha$		$1 \pm 2\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha$
$\eta\mu\alpha \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\,\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\frac{1}{2} - \eta\mu^2\alpha$	$\frac{1}{2} - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$	$1 - 3\varepsilon\varphi^2\alpha$	$1 - 3\varepsilon\varphi^2\alpha$		$1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha \pm \eta\mu 2\alpha$
$\eta\mu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$	$\frac{3}{4} - \eta\mu^2\alpha$	$\frac{3}{4} - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$				$1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha \pm \eta\mu 2\alpha$
$\eta\mu^2\alpha - 3\sigma\upsilon\nu^2\alpha$	$1 - 4\eta\mu^2\alpha$	$1 - 4\sigma\upsilon\nu^2\alpha$				
$\eta\mu^2\alpha - \frac{1}{3}\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha$	$1 - 2\eta\mu^2\alpha$ $3 - 4\eta\mu^2\alpha$	$1 - 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha$ $3 - 4\sigma\upsilon\nu^2\alpha$				