Author: Π.Λ. Θεοδωρόπουλος

Title: Η ενορατική προσέγγιση σαν μέθοδος στη διδασκαλία των Μαθηματικών.

Abstract: Η εργασία αυτή αναφέρεται μόνο στον ενορατικό τρόπο. Δεν επεκτείνεται στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών και εξετάζει τον ενοραματισμό σαν φιλοσοφικό ρεύμα που ασχολείται με την θεμελίωση των Μαθηματικών.

Creator: HDML

Η ΕΝΟΡΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΑΝ ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Π.Λ. Θεοδωρόπουλος
Μαθηματικός: Τρίπολη

Τα Μαθηματικά, η επιστήμη της ακρίβειας, της λογικής συνέπειας και της μη αντιφατικότητας, είναι αναμφισβήτητο πως, εκτός από τις γνώσεις που μας παρέχουν, μας προσφέρουν και μοντέλα σκέψης, μοντέλα εξαγωγής λογικών συμπερασμάτων δηλαδή. Γι' αυτό αποτελούν πρότυπο σκέψης και για τις άλλες επιστήμες. Σε όλους μας είναι γνωστοί οι τρεις βασικοί τρόποι εξαγωγής συμπερασμάτων, ο επαγωγικός, ο ενορατικός και ο ορθολογικός.

Στην εργασία αυτή θα αναφερθούμε μόνο στον ενορατικό τρόπο. Δεν θα επεκταθούμε στην φιλοσοφία των Μαθηματικών και θα εξετάσουμε τον ενορατισμό σαν φιλοσοφικό ρεύμα, που ασχολείται με την θεμελίωση των Μαθηματικών. Θα μείνουμε μόνο στην Διδακτική των μαθηματικών και θα εξετάσουμε τον ενορατικό τρόπο προσέγγισης μιάς Μαθηματικής αλήθειας στα πλαίσια μιας φορμαλιστικής Μαθηματικής Παιδείας.

Κατά τον ενορατικό τρόπο μάθησης έχουμε την ξαφνική σύλληψη της αλήθειας, σαν έμπνευση, χωρίς την παρέμβαση της λογικής, χωρίς δηλαδή την λογική απόδειξη. Πολλές αλήθειες των Μαθηματικών και της Φυσικής συνελήφθησαν πρώτα ενορατικά και μετά αποδείχτηκαν λογικά. «Για να γίνει κανείς καλός μαθηματικός δεν χρειάζεται λογική δύναμη, αλλά ενορατική ικανότητα» λέγει ο James. Η ενόραση, λοιπόν, είναι δυνατόν να αποβεί πολύτιμη πηγή γνώσης.

Το πιο πάνω σχήμα ανακάλυψης μιας Μαθηματικής αλήθειας (ενορατική σύλληψη - λογική απόδειξη) είναι δυνατόν να εφαρμοσθεί και στην Διδακτική των Μαθηματικών. Η Παιδαγωγική Ψυχολογία ενισχύει την σκέψη μας αυτή γιατί μας προτείνει σαν ένα τρόπο μάθησης και τον ενορατικό. Κύριος μελετητής της ενορασιακής μάθησης στην Ψυχολογία είναι ο Γερμανός Wolfgang Kohler (1887-1967).

Αναφέρομαι κυρίως στο Λύκειο όπου κυριαρχεί ο φορμαλισμός. Στο Γυμνάσιο πρέπει να κυριαρχεί ο ενορατικός τρόπος διδασκαλίας, διότι οι μαθητές της ηλικίας των 12-15 ετών δεν είναι ώριμοι για βαρειές φορμαλιστικές αποδείξεις. Οι μαθητές της ηλικίας αυτής διανύουν το στάδιο της διαισθητικής σκέψης και μπορούν να κα-

ταλάβουν, να δικαιολογήσουν, και να εξηγήσουν κάτι, όχι όμως να το αποδείξουν λογικά.

Στο Λύκειο που οι μαθητές μπορούν να δεχθούν μια λογική απόδειξη, την οποία μάλιστα πολλές φορές την ζητάνε και οι ίδιοι για εσωτερική ικανοποίηση, δεν είναι άσκοπη μια πρώτη ενορατική προσέγγιση της έννοιας που σκοπεύουμε να διδάξουμε.

Οι αποδείξεις σε μια φορμαλιστική θεμελίωση των Μαθηματικών είναι απαραίτητες, για να έχουν γενική ισχύ τα συμπεράσματα, να είναι γενικά αποδεκτά και μη αμφισβητήσιμα. Πολλές αποδείξεις όμως είναι τόσο αφηρημένες ώστε να μην τις κατανοούν οι μαθητές. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μην εμπεδώνουν οι μαθητές πολλές Μαθηματικές έννοιες, αλλά να τις μαθαίνουν μηχανικά και να αποβαίνει έτσι η προσπάθειά τους κουραστική και άγονη.

Γι' αυτό λοιπόν θεωρώ ότι είναι απαραίτητη μια πρώτη ενορατική προσέγγιση της αλήθειας γιατί είναι πιο κοντά στην εμπειρία και στην πραγματικότητα. Με αυτό τον τρόπο οι μαθητές εξοικειώνονται με την αλήθεια πριν ακόμα αποδειχθεί, με συνέπεια η ορθολογική απόδειξη όχι μόνον να βρει καλύτερη υποδοχή, αλλά πολλές φορές να δομηθεί και από αυτούς τους ίδιους τους μαθητές. Τότε η αλήθεια γίνεται πιο γόνιμη αφού αφομοιώνεται πριν από την απόδειξή τους.

Ένα άλλο όφελος που προκύπτει από την παραπάνω διαδικασία είναι ότι καλλιεργούμε στους μαθητές μας την ενορατική σκέψη και τους καθιστούμε ικανότερους να αντιμετωπίζουν μόνοι τους διάφορα Μαθηματικά και άλλα επιστημονικά προβλήματα.

Με ποιο τρόπο όμως θα προκαλέσουμε την ενόραση στους μαθητές μας; Το σχήμα, η εποπτική εργασία, η αναλογική σκέψη, η επαγωγική μέθοδος, η εικόνα, η μοντελοποίηση είναι από τους τρόπους που θα μας βοηθήσουν προς την κατεύθυνση αυτή. Αλλά και οι Η/Υ με τα γραφικά τους μπορούν να προσφέρουν εδώ θετικό έργο.

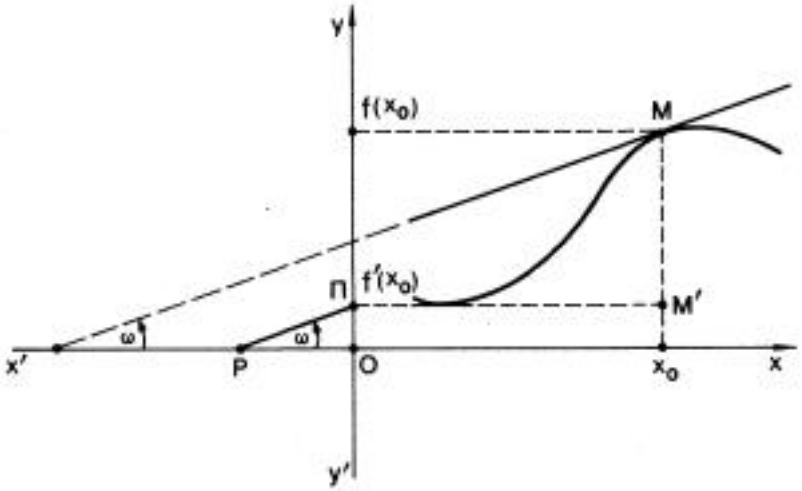
Για να γίνουν σαφέστερα τα παραπάνω θα αναφέρουμε ένα παράδειγμα από τον χώρο της Ανάλυσης. Με την βοήθεια της γραφικής παραγώγισης (που συνοπτικά παρουσιάζεται συνεπάγεται στο [1] σ. 151-153) θα καταλήξουμε ενορατικά σε ορισμένα βασικά θεωρήματα της μελέτης μιας συνάρτησης.

Με τον όρο γραφική παραγώγιση εννούμε την εύρεση της γραφικής παράστασης της $y = f'(x)$, χρησιμοποιώντας την γραφική παράσταση της $y = f(x)$ σε ένα ορθοκανικό σύστημα αξόνων και την γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου. Να αναφέρουμε εδώ σαν παρένθεση ότι η γραφική παραγώγιση αποδεικνύεται πολύ χρήσιμη όταν δεν γνωρίζουμε την αναλυτική έκφραση της $y = f(x)$, αλλά μόνο την γραφική της παράσταση.

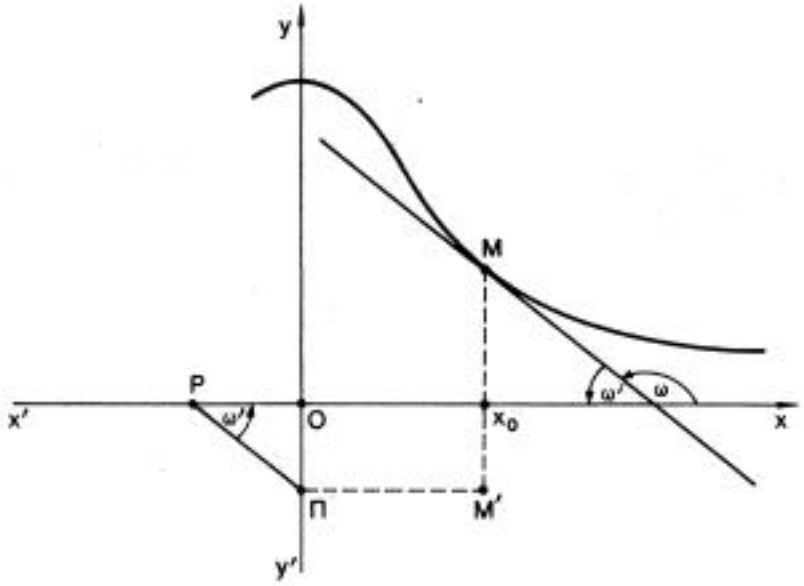
Είναι γνωστή σε όλους μας η γεωμετρική σημασία της παραγώγου μας συνάρτησης σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, στο οποίο παραγωγίζεται. Φέρνουμε λοιπόν την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$ στο σημείο Μ. (Σχ. 1, 1α). Στην συνέχεια πάνω στον άξονα x΄x, αριστερά του Ο, παίρνουμε τμήμα ΡΟ

ίσο με την μονάδα και φέρνουμε από το Ρ παράλληλη στην εφαπτομένη, που τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Π. Η αλγεβρική τιμή του $\overline{O\Pi}$ ισούται με την παράγωγο της $y = f(x)$ στο σημείο x_0.

Πράγματι είναι: $$f(x_0) = \varepsilon\varphi\omega = \frac{(O\Pi)}{(PO)} = (O\Pi) = \overline{O\Pi} \qquad (\Sigma\chi.\ 1)$$



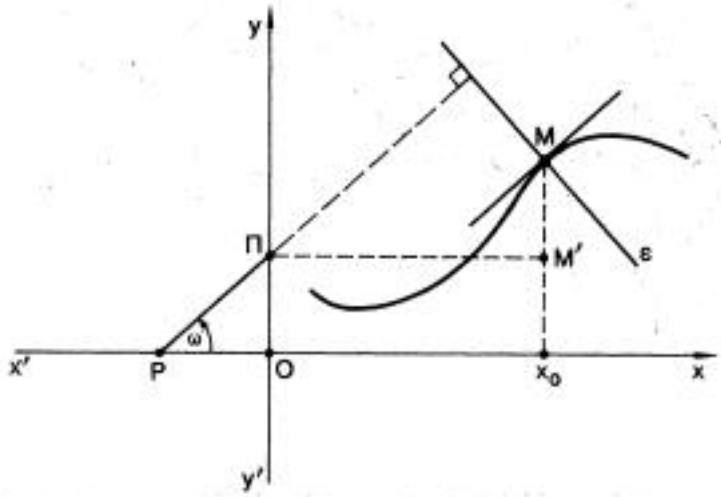
και $$f'(x_0) = \varepsilon\varphi\omega = -\varepsilon\varphi\omega' = -\frac{(O\Pi)}{(PO)} = -\overline{O\Pi} \qquad (\Sigma\chi.\ 1\alpha)$$



Φέρνουμε κατόπιν την κάθετη στον άξονα y΄y στο σημείο Π και την κάθετη στον άξονα x΄x στο x_0. Έστω Μ΄ το σημείο που τέμνονται οι δύο κάθετες. Το Μ΄ έχει τεταγμένη ίση με $f'(x_0)$ και τετμημένη x_0. Δηλ. το $M'(x_0, f'(x_0))$ είναι ένα σημείο της γραφικής παράστασης της $y = f'(x)$. Αν επαναλάβουμε αυτή την εργασία για αρκετά σημεία της καμπύλης και ενώσουμε, με μια συνεχή καμπύλη, τα σημεία Μ΄, που θα βρούμε, θα έχουμε την γραφική παράσταση της $y = f'(x)$.

Η χάραξη όμως της εφαπτομένης στο Μ και της παράλληλης ΡΠ συνήθως γίνεται «με το μάτι» και γι' αυτό ίσως να μην έχουμε μεγάλη ακρίβεια.

Μπορούμε όμως να έχουμε εύκολα τα σημεία Π και με καλύτερη ακρίβεια, ακολουθώντας ένα απλό τέχνασμα. Χρησιμοποιούμε την ανακλαστική επιφάνεια ενός καθρέπτη ή ενός στιλπνού μεταλλικού χάρακα. Τοποθετούμε την ανακλώσα επιφάνεια κάθετα στο επίπεδο των αξόνων x΄x και y΄y, ώστε το σημείο Μ να είναι πάνω σ' αυτή. Έπειτα περιστρέφουμε την επιφάνεια γύρω από το Μ έτσι ώστε να φαίνεται μέσα της το είδωλο της καμπύλης, χωρίς να σχηματίζει γωνία στο Μ. Αν χαράξουμε τώρα μία ευθεία (ε) πάνω στο σχέδιο κατά μήκος της ανακλώσας επιφάνειας, που να διέρχεται από το Μ, αυτή θα είναι «κάθετη» στην καμπύλη και επομένως η

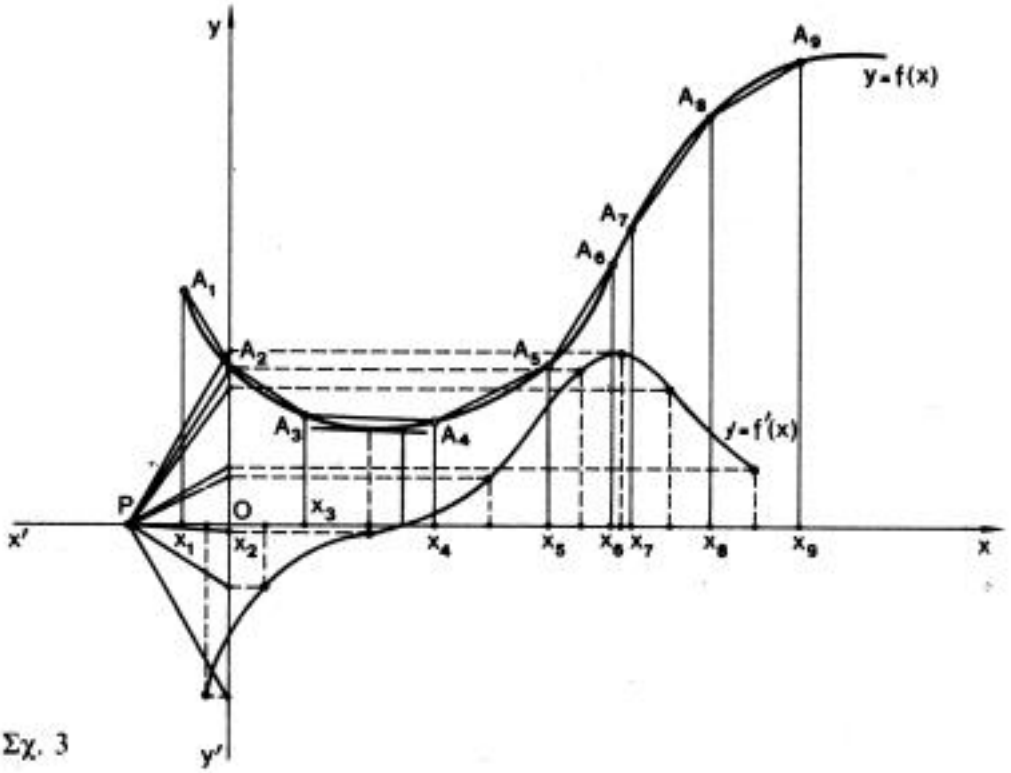


Σχ. 2

εφαπτομένη στο Μ θα είναι κάθετη σ' αυτή. Φέρνουμε στη συνέχεια από το Ρ κάθετη στην (ε), η οποία τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Π. (Σχ. 2). Συνεχίζουμε τώρα όπως στην προηγούμενη περίπτωση για την εύρεση του Μ΄ και την χάραξη της καμπύλης της $y = f'(x)$.

Άλλος τρόπος, προσεγγιστικός όμως, για την γραφική παραγώγιση είναι (Σχ. 3) να χωρίσουμε την καμπύλη σε πολλά τμήματα A_1A_2, A_2A_3, ..., τα σημεία A_1, A_2, A_3, ... αντιστοιχούν στις τετμημένες x_1, x_2, x_3, ... Θεωρούμε, κατά προσέγγιση, ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$ στα μέσα των διαστημάτων $[x_1, x_2]$,

$[x_2, x_3]$, ... είναι παράλληλες στις χορδές A_1A_2, A_2A_3, ... Αν φέρουμε, λοιπόν, από το P παράλληλες προς τις χορδές A_1A_2, A_2A_3, ..., αυτές τέμνουν τον άξονα y΄y σε σημεία Π, που οι αλγεβρικές τιμές των $\overline{O\Pi}$ είναι περίπου ίσες με τις παραγώγους της $y = f(x)$ στα αντίστοιχα μέσα των διαστημάτων $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, ... Κατόπιν βρίσκουμε όπως προηγουμένως τα σημεία M΄ και χαράζουμε την γραφική παράσταση των $y = f'(x)$. Φυσικά όσο περισσότερα σημεία διαμέρισης πάρουμε τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια θα έχουμε.

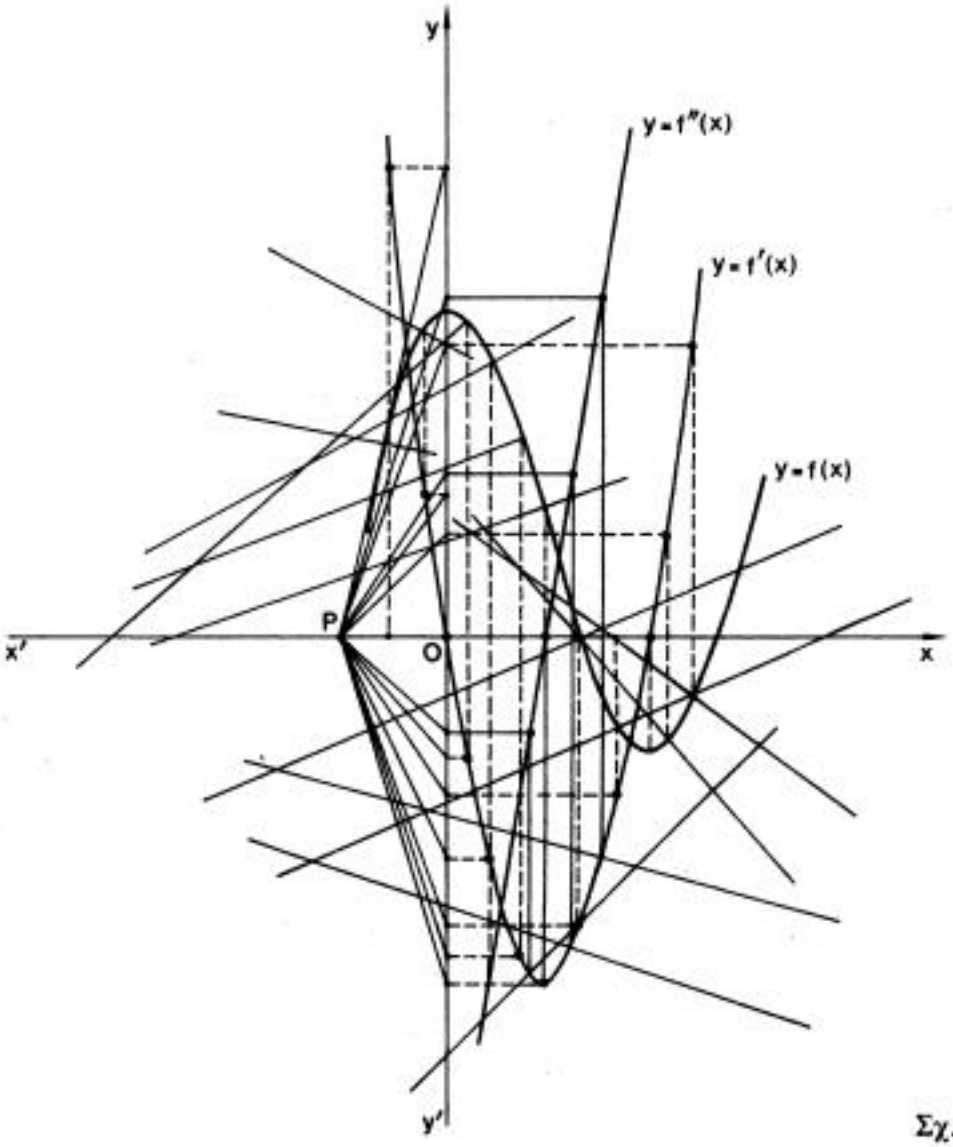


Σχ. 3

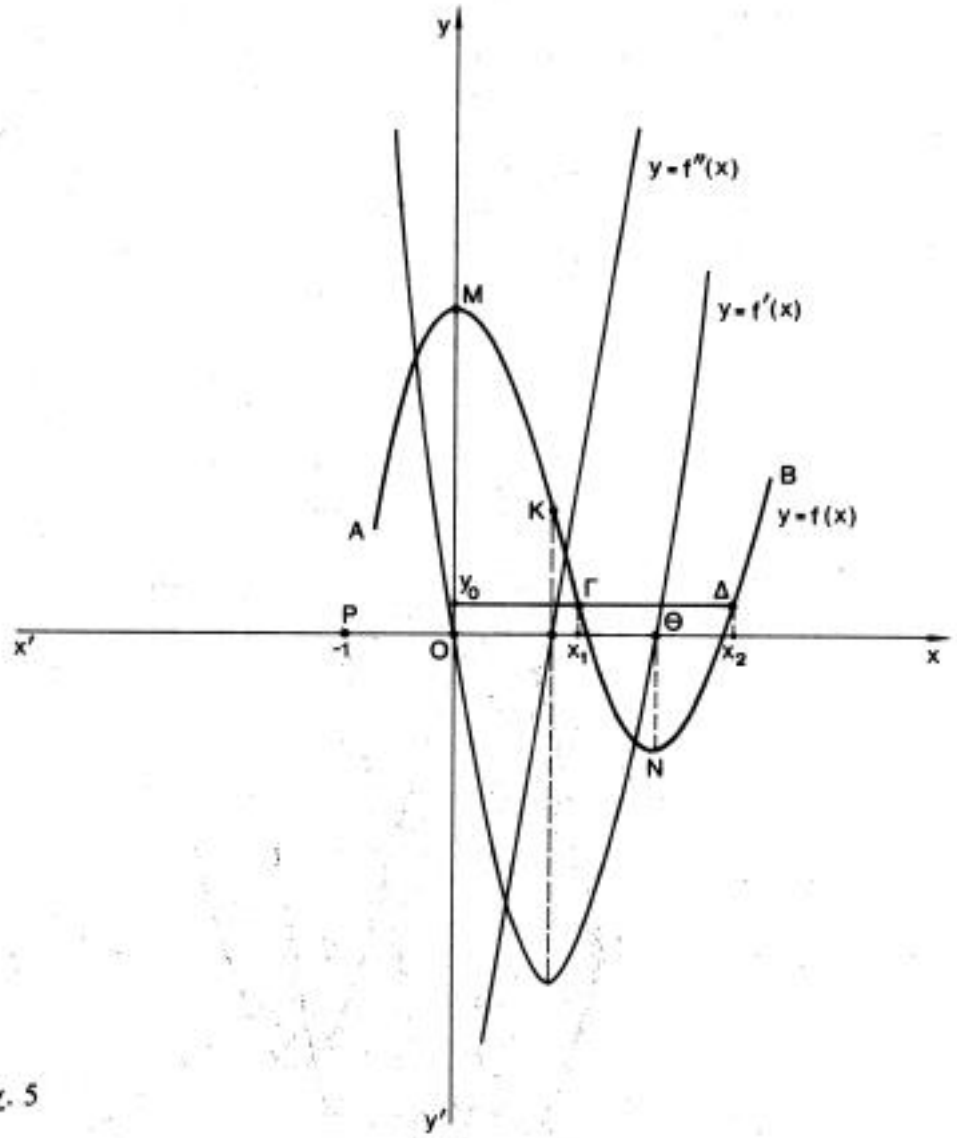
΄Οταν λοιπόν διδάξουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης και την γεωμετρική της ερμηνεία στο σημείο x_0, μπορούμε να δείξουμε στους μαθητές μας την γραφική παραγώγιση. Μετά να βρούμε όλοι μαζί την γραφική παράσταση της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου μιας συνάρτησης, της οποίας θα γνωρίζουμε μόνο την γραφική παράσταση. Θα έχουμε λοιπόν στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των $y = f(x)$, $y = f'(x)$ και $y = f''(x)$. Παρατηρώντας, στην συνέχεια, προσεκτικά τα τρία διαγράμματα και συσχετίζοντάς τα ερευνητικά μπορούμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα για την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυριότητα και το σημείο καμπής της $y = f(x)$.

Σαν ένα παράδειγμα για την μέθοδο αυτή, έχω κατασκευάσει τις γραφικές παρα-

στάσεις των $y = f'(x)$ και $y = f''(x)$, για μια συνάρτηση $y = f(x)$, της οποίας δίνεται μόνο η γραφική παράσταση. Τα διαγράμματα τα έχω βρει με τον δεύτερο τρόπο (ανακλαστική επιφάνεια). (Σχ. 4). Για να μην μας μπερδεύουν όμως οι πολλές γραμμές έχω αποτυπώσει τα διαγράμματα των $y = f(x)$, $y = f'(x)$ και $y = f''(x)$ σε άλλο σχέδιο (Σχ. 5) από όπου θα εξάγουμε τα συμπεράσματά μας. Παρατηρώντας, λοιπόν, προσεκτικά το Σχ. 5 και ερευνώντας, λοιπόν, προσεκτικά το Σχ. 5 και ερευνώντας την σχέση των τριών διαγραμμάτων εξάγουμε τα επόμενα συμπεράσματα.



Σχ. 4



Σχ. 5

1) Θεώρημα Rolle.

Φέρνουμε την ΓΔ // x΄x. Είναι $f(x_1) = f(x_2) = y_0$. Η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίζεται παντού στο (x_1, x_2) (η καμπύλη είναι λεία και δεν έχουμε σε κάποιο σημείο εφαπτομένη κάθετη στον άξονα x΄x. Η παραγωγισιμότητα άλλωστε μας επέτρεψε την κατασκευή της καμπύλης της $y = f'(x)$). Με αυτές τις προϋποθέσεις παρατηρούμε ότι υπάρχει σημείο στο (x_1, x_2) όπου η $y = f'(x)$ μηδενίζεται, είναι το σημείο Θ.

2) Όπου η $y = f'(x)$ είναι θετική, η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, τμήματα

ΑΜ και ΝΒ. Ενώ όπου η $y = f'(x)$ είναι αρνητική, η $y = f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα, τμήμα ΜΝ.

3) Στα σημεία Μ και Ν που η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα η f΄ μηδενίζεται. Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι στα σημεία που η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα η f΄ μηδενίζεται.

4) Στο τμήμα ΑΚ η f έχει τα κοίλα προς τα κάτω και στο ΚΒ προς τα πάνω. Παρατηρούμε δε ότι στο πρώτο τμήμα αντιστοιχεί αρνητική f΄΄, ενώ στο δεύτερο θετική. Στο σημείο Κ που έχουμε σημείο καμπής η f΄΄ μηδενίζεται. Εδώ μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι όπου η f΄΄ είναι αρνητική η f έχει τα κοίλα προς τα κάτω, ενώ όπου η f΄΄ είναι θετική η f έχει τα κοίλα προς τα πάνω. Τα σημεία μηδενισμού της f΄΄ είναι σημεία καμπής για την f, αρκεί δεξιά και αριστερά από αυτά η f΄΄ να έχει διαφορετικό πρόσημο, που σημαίνει ότι η f θα έχει στρέψει τα κοίλα της προς αντίθετες κατευθύνσεις.

Για να ενισχυθούν όπως τα παραπάνω συμπεράσματα καλό θα είναι να μην μείνουμε σε ένα μόνο παράδειγμα, αλλά να δώσουμε περισσότερα. Επίσης θα θέσουμε τον προβληματισμό αν ισχύει το αντίστροφο στα 2 και 3. Με την εκλογή κατάλληλων παραδειγμάτων να φανεί ότι δεν ισχύει. Δηλ. αν η f είναι ↑ ή ↓ τότε η f΄ είναι δυνατόν να μηδενίζεται σε κάποιο σημείο του αντίστοιχου διαστήματος. Επίσης αν η f΄ μηδενίζεται σε κάποιο σημείο δεν έπεται ότι σ' αυτό το σημείο θα έχουμε κατ' ανάγκην ακρότατο. (Επιβάλλεται δεξιά και αριστέρα του σημείου μηδενισμού η f΄ να έχει διαφορετικό πρόσημο, για να έχουμε ακρότατο σ' αυτό σημείο). Με την βοήθεια, λοιπόν, πολλών παραδειγμάτων γραφικής παραγώγισης, μπορούμε να κάνουμε καλή συζήτηση με τους μαθητές, καλύπτοντας όλες τις περιπτώσεις. Έτσι θα έχουμε τα συμπεράσματα της μελέτης μιας συνάρτησης πιο απτά με αποτέλεσμα οι μαθητές να τα αφομοιώσουν πριν τα αποδείξουμε.

Άλλες ωφέλειες που προκύπτουν επίσης από την παραπάνω διαδικασία είναι: 1) Οι μαθητές θα αισθάνονται την χαρά της ανακάλυψης γιατί θα συμμετέχουν ενεργητικά στην διαδικασία και 2) Θα κεντρισθεί το ενδιαφέρον τους για την λογική απόδειξη. Από παιδαγωγικής πλευράς όλα αυτά συνιστώνται γιατί είναι θετικά στοιχεία για την μάθηση.

Από όλα τα παραπάνω πιστεύω πως εξάγεται το συμπέρασμα, ότι μία ενορατική προσέγγιση της αλήθειας είναι πολλές φορές χρήσιμη, ίσως και απαραίτητη, για μια δυναμική προσπέλαση στην γοητεία της λογικής συνέπειας, της ακρίβειας και της γενίκευσης, που μόνο τα Μαθηματικά έχουν το χάρισμα να διαθέτουν. Τα Μαθηματικά που αντικατοπτρίζουν σε όλο τους το πλάτος το μεγαλείο της ανθρώπινης λογικής.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.

1) BERMANT A.F. — ARAMANOVICH I.G.
Mathematical Analysis, MOSCOW, 1975

2) BRUNER S. JEROME
Η διαδικασία της Παιδείας ΑΘΗΝΑ, χ.χ.
3) Αναπολιτάνου Α. Διον.
Εισαγωγή στην φιλοσοφία των Μαθηματικών ΑΘΗΝΑ 1985.
4) Δαμαλά Αρ. Γεωργίου
Διδακτική των Μαθηματικών Αθήνα 1980
5) Ράπτη Ν.
Η ανάπτυξη της διανόησεως ΑΘΗΝΑ 1974
6) Τομασίδη Χρ.
Εισαγωγή στην Ψυχολογία