Author: Alain Bouvier

Title: Το δικαίωμα στο Λάθος.

Abstract: Τα λάθη των μαθητών μας ενοχλούν. Αυτή η άποψη ακούγεται συχνά σε συγκεντρώσεις καθηγητών. Είναι λάθη βιασύνης; Είναι λάθη τυχαίων απαντήσεων; Το άρθρο αυτό προσπαθεί να δώσει εξήγηση στο δικαίωμα του λάθους.

Creator: HDML

ΤΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΣΤΟ ΛΑΘΟΣ

του Alain Bouvier
IREM-Lyon
Université Claude Bernard
Lyon —FRANCE

(Απόδοση στα Ελληνικά: Βαγγέλης Ευσταθόπουλος)

Τα λάθη των μαθητών μας, μας ενοχλούν. Αυτή η άποψη ακούγεται συχνά σε συγκεντρώσεις συναδέλφων. Γιατί όμως; Τι άραγε σημαίνει αυτή μας η στάση; Βλέπουμε μέσα από την εμφάνιση αυτών των λαθών την **δική** μας αποτυχία;

Τα ίδια λάθη εμφανίζονται με την ίδια συχνότητα επιμένοντας σ' όλη τη διάρκεια της φοίτησης, αντιστέκονται στις «διορθώσεις» λες και η διδασκαλία, παρ' όλες τις προθέσεις μας, διδάσκει λάθη. Τι συμβαίνει πραγματικά; Γιατί η μάθηση της μητρικής μας γλώσσας φαίνεται ότι είναι πετυχημένη, ενώ στα μαθηματικά συμβαίνει το αντίθετο, αν και τα τελευταία διδάσκονται αρκετό χρόνο, σχεδόν όλη τη διάρκεια της φοίτησης στο σχολείο;

Ας πάρουμε ένα απλό παράδειγμα, τον υπολογισμό του 2^3. Ανάμεσα στις λανθασμένες απαντήσεις, συναντάμε συχνότερα τις εξής δύο:

$$2^3 = 6 \qquad \text{και} \qquad 2^3 = 5$$

Σε πολλές περιπτώσεις, αρκεί να πούμε στους μαθητές που γράφουν αυτό: «Είσαι σίγουρος;» ή «Γιατί;», ώστε να αλλάξουν την απάντησή τους και να μας δώσουν την αναμενόμενη (σωστή) απάντηση.

Οι περισσότεροι καθηγητές λένε: είναι **λάθος βιασύνης.** Και όμως σύμφωνα με τον S. FREUD και το μικρότερο λάθος (μικρότερο επιφανειακά) έχει την εξήγησή του.

Τα λάθη δεν είναι το αποτέλεσμα «τυχαίων» απαντήσεων, μαρτυρούν τη χρήση, από τη πλευρά των μαθητών, μια λογικής. Αλλά ποιας;

Τις λανθασμένες ισότητες $2^3 = 6$ και $2^3 = 5$, μερικοί τις αποδίδουν σε «σύγχυση» ανάμεσα στο 2^3 και στο $2 \cdot 3$ ή ανάμεσα στο 2^3 και στο $2 + 3$ αντίστοιχα. Αυτή η «ερμηνεία» δεν λέει τίποτε! Ένα παιδί μπορεί να μπερδέψει τις παρακάτω εικόνες; Θα έλεγε ότι το σπίτι είναι βάρκα παρατηρώντας τη πρώτη εικόνα ή ότι είναι σπίτι η βάρκα βλέποντας την δεύτερη εικόνα;

Εάν αυτές οι σύντομες και περιληπτικές «εξηγήσεις» που αναφέρθηκαν παραπά-

νω, δεν ρίχνουν φως πάνω σ' αυτό που συμβαίνει ανάμεσα στο μαθητή και στη γνώση, όταν αυτός δίνει απαντήσεις που χαρακτηρίζονται από μας τους καθηγητές λανθασμένες, πρέπει για να φωτίσουμε την υπόθεση να επανέλθουμε στο δύσκολο ερώτημα και συνάμα κεντρικό: **«Τι μαθαίνουμε;»**

Ξεκινώντας με την υπόθεση ότι «προσπαθώντας γινόμαστε καλοί μουσικοί», θα κάνουμε κατ' αρχήν μια σύντομη αναδρομή στη κοινωνική και ιστορική εξέλιξη των γνώσεων. Κατόπιν θα επανέλθουμε στη μάθηση και τη γνωστική εξέλιξη των μαθητών μας για να τελειώσουμε με το ρόλο που παίζουμε στις τάξεις μας και το νόημα που δίνουμε σ' αυτές τις καταστάσεις μάθησης προτείνοντάς τις για το σχολείο. Και τέλος πάνω απ' όλα σε σχέση με την επιμόρφωση τι συμπεράσματα αντλούμε;

1. Τομές

Κυρίως θέλουμε να μιλήσουμε για μαθηματικά, όμως ας αρχίσουμε ανακαλώντας στη μνήμη μας άλλες επιστήμες και να σημειώσουμε μερικούς σταθμούς της εξέλιξης των επιστημών αυτών. Ας προσπαθήσουμε να καταλάβουμε **πώς η επιστήμη αντιτίθεται στο σκοταδισμό αμφισβητώντας όλα όσα προέρχονται από αυτόν,** πώς οι επιστήμες αναπτύχθηκαν δια μέσου των «επιστημονικών επαναστάσεων» των «βίαιων αλμάτων» και των «**τομών**».

1.1. Μερικές τομές στις αντιλήψεις των ανθρώπων

Οι παλιοί ανατολικοί πολιτισμοί οι προγενέστεροι της Ελληνικής αρχαιότητας είχαν μια «**κυκλική**» αντίληψη του χρόνου: ό,τι γίνεται σήμερα θα επαναληφθεί αύριο. Η άποψη αυτή παραχώρησε τη θέση της σε μια άλλη «**γραμμική**» αντίληψη: Το νερό του ποταμού δε κυλάει ποτέ και προς δύο διευθύνσεις.

Τίποτε δεν θα γίνει όπως παλιά. Το παρελθόν δεν αναπαράγεται.

— Στην παλαιοντολογία* καθημερινά ανασκευάζουν τις θεωρίες καταγωγής του ανθρώπου και των ειδών, διατυπώνοντας νέες απόψεις. Και όμως μέχρι τον 18ο αιώνα οι επιστήμονες δεν διέκριναν στις ανασκαφές τους τίποτε άλλο παρά κοχύλια. Τα παράξενα μεγέθη τους και οι ιδιόμορφες όψεις τους αποδίδονταν σαν ανθρώπινες κατασκευές (MERCATI Michel, 1541-1593) ή σαν φυσικά φαινόμενα.

---

* Όρος καθιερωμένος το 1834 από τον H. de Blainville.

Κατά τη διάρκεια του 17ου αιώνα και στις αρχές του 18ου αιώνα, ειδικότερα μετά τις μεγάλες εξερευνήσεις στην Αμερική και την Ωκεανία, όπου τα ήθη και η ζωή των ανθρώπων διέφεραν από τους Ευρωπαίους ριζικά, εκεί που ακόμα και η χλωρίδα και η πανίδα παρουσιάζουν μεγάλες πρωτοτυπίες, εμφανίζεται η πρώτη βαθειά τομή: Τα απολιθώματα δεν είναι παιχνίδια της φύσης, αλλά μαρτυρίες παλιών ζωντανών όντων.

Όπως συμβαίνει συχνά στην εξέλιξη των επιστημών αυτή η «ανακάλυψη», αυτή η καινούρια ιδέα έφερε μαζί της και καινούρια προβλήματα. Ας θυμηθούμε τις θέσεις του Charles Robert DARWIN (1804-1882) για την εξελικτική του θεωρία, που θεωρήθηκαν ανήθικες και αντιχριστιανικές και αντικρούστηκαν από καταξιωμένους διανοητές, όπως ο Lord KELVIN. Έγιναν μάλιστα αντικείμενο περίφημων δικών σε κάποιες από τις πολιτείες των ΗΠΑ στα μέσα του 20ου αιώνα!!! Στον ίδιο επίσης τομέα, να θυμίσουμε ότι οι νόμοι της κληρονομικότητας του Johann MENDEL (1822-1884) γύρω στο 1865 δεν βρήκαν την απήχησή τους, παρά λίγο πριν τις αρχές του 20ου αιώνα.

— Η γή θεωρήθηκε για αρκετό καιρό σαν επίπεδος δίσκος. Έτσι λοιπόν γιατί να ψάξουμε προς τα δυτικά το δρόμο για τις Ινδίες; Δεν θάταν άσκοπο να θυμηθούμε εδώ τις δυσκολίες που αντιμετώπησε ο Nicolas COPERNIC (1473-1543) που φοβούμενος τα αντίποινα των θεολόγων δεν δημοσίευσε τα έργα του παρά μόνο λίγο καιρό πριν το θάνατό του. Το ίδιο και ο Calileo GALILEE (1564-1642) του οποίου η δίκη πέρασε στην αιωνιότητα αλλά το έργο του εμπνέει ακόμα αρκετούς συγγραφείς και επιστήμονες. «Και όμως η γη κινείται!»

— Στη χημεία, η ταξινόμηση των ατόμων από τον Dimitrie MENDELIEV (1834-1907) χρειάστηκε 10 χρόνια για να γίνει αντιληπτή, παρά τις δύο διαδοχικές δημοσιεύσεις του 1869 και του 1871.

Το ίδιο και με την έννοια της χημικής ισορροπίας που αναπτύχθηκε και καθιερώθηκε από τον πιο αξιόλογο χημικό του 18ου αιώνα Claude Louis BERTHOLLET (1748-1822). Η θεωρία αυτή δεν εφαρμόστηκε σύντομα, πήρε 50 χρόνια γιαυτό, παρ' όλη την δημοτικότητα του επιστήμονα εφευρέτη.

— Στην Ιατρική, ως τον Louis PASTEUR (1822-1895) η ζύμωση είχε ήδη μελετηθεί και η παρατηρούμενη παρουσία των μυκήτων εξηγείτο με το δόγμα της αυθόρμητης γέννησης, ενάντια στην οποία ο PASTEUR πρότεινε τη δική του εξήγηση: Οι μύκητες είναι έμβια όντα, εξειδικευμένα για την παραγωγή αυτών που θα ζυμώσουν. Είναι γνωστό ότι ένα από τα χαρακτηριστικά του PASTEUR ήταν το γεγονός ότι ήθελε το καθετί να το αποδείξει με πολλή μεγάλη ακρίβεια προσπαθώντας να στηρίζεται σε γεγονότα. Οι εξηγήσεις του ήταν λεπτομερείς και ποτέ δεν έπαιρνε σαν δεδομένες τις ισχύουσες απόψεις. Το γεγονός αυτό είχε σαν αποτέλεσμα σ' όλη του τη ζωή να έρχεται σε αντιπαράθεση με το ιατρικό κατεστημένο της εποχής του.

— Στην πολιτική οικονομία, τα συγγράμματα και η σκέψη του Karl MARX (1818-1883) συνεχίζουν να κατέχουν μια αξιόλογη θέση. Θεαματικά καθιέρωσε την

υλιστική και διαλεκτική άποψη για την ιστορία, δίνοντας μεγάλη σημασία στη σχέση των παραγωγικών δυνάμεων, στη πάλη των τάξεων, παρέχοντας έτσι ένα γενικό θεωρητικό πλαίσιο στη σοσιαλιστική σκέψη του 19ου αιώνα, σε αντίθεση με τους προγενέστερους όπως ο PROUDHON που θεωρήθηκε σαν «μικρο-αστός».

— Στη ψυχολογία, ο Sigmund FREUD (1856-1939) κατέρριψε τη σύγχυση που υπήρχε ανάμεσα στις ψυχικές δραστηριότητες και σ' αυτές της συνείδησης. Ίδρυσε ένα είδος ψυχανάλυσης και αγωνίστηκε για πολύ καιρό ενάντια στις θεωρίες των συγχρόνων του, εντελώς μόνος. Δεν δίστασε να συγκρίνει την κατάστασή του με κείνη των COPERNIC και DARWIN. Όπως εκείνοι έτσι και αυτός προκάλεσε το μίσος και το σαρκασμό όλων των κονφορμιστών.

— Ας τελειώσουμε αυτή τη σύντομη και περιληπτική ανασκόπηση, με τη φυσική όπου δεν θα παραθέσουμε παρά ένα μόνο παράδειγμα, τη θεωρία της σχετικότητας του Albert EINSTEIN (1878-1955). Στα τέλη του 19ου αιώνα πολλοί υποστήριζαν ότι η φυσική ήταν «τελειοποιημένη». Έμειναν όμως έκπληκτοι από την ανακάλυψη των ακτίνων X από τον Wilhelm RÖNTGEN (1845-1923). Την ίδια περίπου εποχή ο EINSTEIN επιδόθηκε σε μια βαθιά κριτική μελέτη των εννοιών του διαστήματος και του χρόνου — κυρίως — και το 1905 διατυπώνει νέες αρχές **ερχόμενος σε αντίθεση** με τις κλασσικές θεωρίες. Έτσι η μάζα ενός σώματος μεταβάλλεται και εξαρτάται από τη ταχύτητα, του φωτός. Μερικοί δεν δίστασαν να διακρίνουν στο πρόσωπό του τον φιλόσοφο παρά τον φυσικό που ξεκινώντας από τις γνώσεις της εποχής του, τις συμπλήρωσε και τις αναδιοργάνωσε. Γιαυτόν οι διαισθήσεις, οι αρχές και οι έννοιες προηγούντο των πειραματικών επαληθεύσεων. Σε μια ιστορία των επιστημών διαβάζουμε: «Ο Einstein τάβαλε με τις έννοιες τις πιο αποδεκτές της εποχής του, και μέσω μιας θαυμαστής σκέψης πρότεινε για τον κόσμο των φυσικών μια αντίληψη εντελώς καινούρια (...) Η σχετικότητα έπρεπε να προκαλέσει αφισβητήσεις (...) ενδιέφερε κυρίως τις δυσκολίες του ανθρώπινου μυαλού στο να ξεπεράσει τις συνήθειές του και καθόλου τις αμφισβητήσεις που γεννήθηκαν από το πειραματισμό και την έρευνα».

Ας ρίξουμε μια ματιά στους φιλοσόφους και επιστήμονες που προαναφέραμε: BERTHOLLET, COPERNIC, DARWIN, EINSTEIN, FREUD, GALILEE, MARX, MEDELIEV, PASTEUR. Όλοι τους εργάστηκαν **αντίθετα** προς τις επικρατούσες ιδέες και τις θεωρίες της εποχής τους, **ενάντια** στον επιστημονικό χώρο. Εξίσου αμφισβητούμενες, όσο και οι ίδιοι, υπήρξαν οι εργασίες τους. **Μετά από αυτές, δεν σκέπτονται όπως πριν.** Προκάλεσαν μία **τομή** στην επιστημονική σκέψη και την ανάγκασαν σε μια ολοκληρωτική **αναδιοργάνωση.**

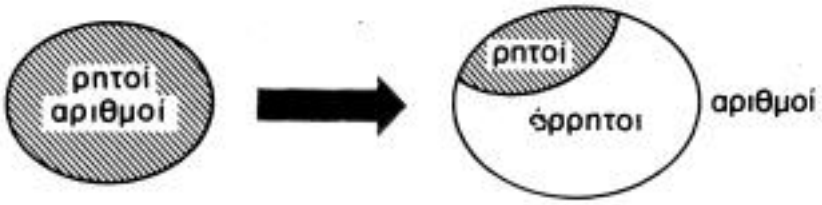
1.2. Μερικές τομές στην αντίληψη των μαθηματικών

Θα δούμε τώρα ότι το ίδιο ισχύει και στα μαθηματικά, ακόμα κι' αν αυτό είναι λιγότερο γνωστό απ' ότι στις άλλες επιστήμες.

Στα μαθηματικά, η τομή η πιο γνωστή, αφορά την ανακάλυψη των άρρητων

αριθμών καθώς και την απόδειξη από τον Πυθαγόρα, ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός.

Τα μαθηματικά πέρασαν ξαφνικά από την ιδέα «**κάθε** αριθμός είναι πηλίκο δύο φυσικών» στην αντίληψη της ύπαρξης δύο κατηγοριών αριθμών: των ρητών και των άρρητων:



Το σοκ αυτό πήρε καιρό για να γίνει αποδεκτό και άφησε αισθητά τα ίχνη του. Ένας από τους φοιτητές μου στο Πανεπιστήμιο της Lyon, μου δήλωσε πρόσφατα (όπως ο KRONECKER στα 1882) «ο π δεν υπάρχει». Γνωρίζω δε έναν αξιόλογο μαθηματικό που σε διαλέξεις του αναπτύσει θέματα όπως «Οι πραγματικοί αριθμοί δεν υπάρχουν».

Πάντα στο ίδιο θέμα των αριθμών, θα μπορούσαμε να επικαλεστούμε τη χρήση αυτών των «μυστηριωδών» μιγαδικών αριθμών που επέτρεψαν μέσω «παραλόγων» υπολογισμών την εύρεση των ριζών εξισώσεν 3ου βαθμού. Και όμως ενώ σήμερα σε βιβλία θεωρίας αριθμών* βρίσκουμε τον $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-3}$ κτλ. ..., στα γαλλικά σχολεία, «απαγορεύεται» να το διδάσκουμε, σαν να επρόκειτο για ταχυδακτυλουργικά κόλπα!! Πότε άραγε θα μάθουμε;

— Μια άλλη σοβαρή τομή στα μαθηματικά αφορά τη συμπεριφορά και τη στάση μας απέναντι στη θεμελείωση της γεωμετρίας. Αφού πρώτα προσπάθησαν να αποδείξουν το 5ο αξίωμα του Ευκλείδη, αφού απέκρυψαν από την επιστημονική κοινότητα τα συμπεράσματα, έπρεπε μια μέρα να αναπαραθέσουν στην Ευκλείδια γεωμετρία, νέες γεωμετρικές εικονοκλαστικές. Ξαφνικά το παλιό πλαίσιο καταστράφηκε και στο νέο **οι γεωμετρίες**, προσέθεταν νέα προβλήματα και κυρίως αυτό της ταξινόμησης.

— Χωρίς αυτό να γίνει καθολοκληρίαν σαφές, στις αρχές του 19ου αιώνα ήταν ολοφάνερο ότι μια συνεχής συνάρτηση είναι παραγωγίσημη εκτός από μερικά σημεία. Και από τότε, φανταστείτε, όπως ο Weierstrass, μπορούμε να βρούμε συναρτήσεις παντού συνεχείς μα καθόλου παραγωγίσημες! Ο Hermite αρνιόταν να ενδιαφερθεί με τέτοια μαθηματικά προβλήματα που τα χαρακτήριζε «τέρατα». Τι να έλεγε σήμερα, όπου μετά τον B. MANDELBROT, ανακαλύπτουν ιδιότητες καμπύλων ακόμα περισσότερο «παθολογικών», τα fractales των οποίων η διάσταση δεν είναι ακέραιος

---

* «A classical intoduction to modern number theory» K. IRELAND and M. ROSEN, Springer Verlag.

αριθμός, αλλά ένας πραγματικός αριθμός α που περιέχεται μεταξύ 1 και 2!

— Όσοι έκαναν πανεπιστημιακές σπουδές πριν το 1970 σίγουρα αισθάνθηκαν τα αποτελέσματα των κυμάτων του σοκ της δημιουργίας της θεωρίας των συνόλων, των φανταστικών, ανατρεπτικών αποτελεσμάτων του CANTOR: $\mathbb{N}$ και $\mathbb{R}$ δεν είναι ισοδύναμα, αλλά $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}^2$ είναι.

Ας θυμηθούμε την φοβερή ευχή που έκανε ο Cantor σένα γράμμα του: «Το βλέπω, δεν μπορώ όμως να το πιστέψω» Δεν υπήρξε ο μοναδικός! Η εχθρότητα του περιβάλλοντός του ήταν άγρια και διαρκής. Τον έσπρωξε στην τρέλλα.

Αυτή η σύντομη λίστα των τομών δεν εξαντλείται. Δίπλα στις πιο θεαματικές, μπορούμε να παρατηρήσουμε και άλλες, ειδικές, και ακόμα να δούμε εδώ και αλλού το προοίμιο των άλλων όπως non standard ανάλυση κτλ.

— Καθένας μας αισθάνεται μέσα του, όσο ποτέ άλλοτε στο παρελθόν, τις έννοες: των αριθμών, του μέτρου, της καμπύλης τόσο ξεκάθαρες όσο ποτέ. Αλλά εξ' ίσου καταλαβαίνουμε ότι κάθε στιγμή είναι δυνατόν όλα αυτά αυτόματα να αμφισβητηθούν και με νέους τρόπους να αναθεωρηθούν ολοκληρωτικά, ενώ για τη στιγμή μοιάζουν να είναι γαντζομένα στον εαυτό τους.

2. Τομές και μάθηση

Η πρώτη μας ανασκόπηση μας οδήγησε να σκεφτούμε και να αναφερθούμε στην ιστορική και κοινωνική εξέλιξη των γνώσεων. Προσπαθήσαμε να περιγράψουμε όσο γινόταν ανάγλυφα τις τομές, τις αμφισβητήσεις των ιδεών που ήταν από όλους αποδεκτές, και την αναδιοργάνωση των γνώσεων, **κοινή μοίρα** της επιστημονικής προόδου. Η επόμενη αναφορά μας θα μας οδηγήσει σε μερικές σκέψεις πάνω στη μάθηση μέσα στη τάξη, κάτι που θέτει και το πρόβλημα του **ρόλου** του καθηγητή.

2.1. Η παιδαγωγική των μικρών βημάτων

Πάλι για τις τομές (ας είναι ακόμα μία!), σχετικά με τις εργασίες που έγιναν μέχρι τώρα στη ψυχολογία.

Ο WATSON ίδρυσε αυτό που ονομάζουμε ο **μπιχαβιορισμός** (behaviour ή behaviorisme) (θεωρία της συμπεριφοράς). Προσπάθησε να αναγάγει την ψυχολογία σε μια αντικειμενική μελέτη των πράξεων και των **παρατηρουμένων συμπεριφορών**. Ειδικά επικεντρώθηκε στο δίδυμο «ερέθισμα-αποτέλεσμα» όπου το ερέθισμα είναι φυσικά μετρήσιμο και η απάντηση-αποτέλεσμα αντικειμενικά παρατηρήσιμη. Πολύ νωρίς εφάρμοσε τις ερευνές του **στη μάθηση** και στην ανθρώπινη **συμπεριφορά**. Η θεωρία του γνώρισε μεγάλη επιτυχία γύρω στα 1924, κυρίως στις Η.Π.Α.

Συνεχίζοντας τις εργασίες αυτές, οι νεο-μπιχαβιοριστές, όπως ο HULL, θέλησαν να κατανοήσουν καλύτερα τη δράση των δυνάμεων που προσδιόριζαν τη συμπεριφορά και τα αποτελέσματά τους στη μάθηση. Έτσι μελετώντας με τη διαδικασία «δοκιμή-λάθος» κατέληξαν στις εξής αρχές: Η συσχέτιση «ερέθισμα-αποτέλεσμα» ευνοούνται από τις επιτυχίες και ενοχλούνται από τις αποτυχίες ή και την ανία.

Στα 1954, ο SKINNER εφάρμοσε συστηματικά τα παραπάνω στη μάθηση. Θεώρησε τον μανθάνοντα σαν ένα **μαύρο κουτί***, που ενδιαφέρεται να μάθει για ότι γίνονται και συμβαίνουν μέσα σ' αυτό, όπως θάκανε και ένας φωτογράφος της εποχής με το μαύρο κουτί της φωτογραφικής μηχανής του.

Ενδιαφέρθηκε να προσδιορίσει τις «βασικές μονάδες συμπεριφοράς» και να συγκεντρώσει τις κατάλληλες συμπεριφορές υποκειμένων που επεξεργάζονταν κάποια «προγράμματα». Εδώ βρίσκουμε τις βάσεις της **προγραμματισμένης διδασκαλίας** που οδήγησαν σε μια «μέθοδο» που την ονομάζουμε «μέθοδο των μικρών βημάτων», σ' ένα έλεγχο της μάθησης λεπτό και ακριβή και στην οργάνωση της μάθησης με προγραμματισμό. Οι τρεις λέξεις κλειδιά είναι:

ΑΚΡΙΒΕΙΑ — ΕΞΑΤΟΜΙΚΕΥΣΗ — ΑΥΤΟΜΑΤΙΣΜΟΣ

Καθεμιά από αυτές έχει κάποιες ενδιαφέρουσες κατευθύνσεις έρευνας. Για μας τους καθηγητές, η προγραμματισμένη διδασκαλία περιέχει τρία χαρακτηριστικά που διαχέονται στις παρακάτω τρεις υποθέσεις.

*** Υποθέσεις:**

1) Η ΓΝΩΣΗ μπορεί να μοιραστεί σε ενότητες σαφώς καθορισμένες.
2) Μαθαίνουμε συσσωρεύοντας γνώσεις.
3) Τα λάθη αφήνουν ανεξίτηλα ίχνη, καταστρεπτικά για τις επόμενες γνώσεις.

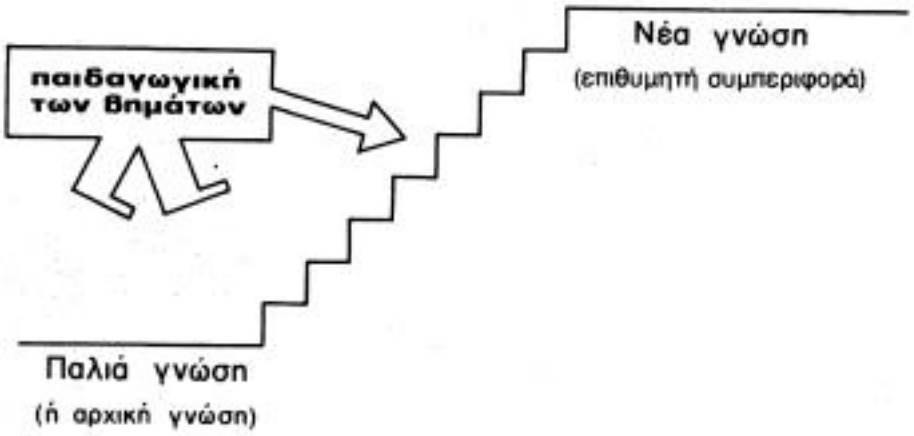
*** Πρακτικοί κανόνες για την οργάνωση της μάθησης**

1) Πηγαίνετε από το απλό στο πολύπλοκο.
2) Κατασκευάζετε πολύ μικρές ενότητες.
3) Τεμαχίστε τις δυσκολίες για να αποφύγετε συστηματικά τα λάθη.

Όλα τα παραπάνω μπορούμε να τα συνοψίσουμε με το ακόλουθο σχήμα.

---

* Όπως οι παλιές φωτογραφικές μηχανές.



Η πρωταρχική επιτυχία μίας προγραμματισμένης διδασκαλίας συνυπάρχει με τις ιστορικές συνθήκες (π.χ. ανάγκη επιμόρφωσης μεγάλου αριθμού τεχνικών σε πολύ περιορισμένο χρόνο) και τις προκαθορισμένες φιλοδοξίες. Επιτρέπει στον καθένα να μελετήσει αυτά που θέλει, όποτε τα θέλει, με εγγυημένη επιτυχία για σωστή μάθηση.

Πολλοί όμως θα αναρωτηθούν για το νόημα τέτοιων μαθήσεων τέτοιων παρατηρίσημων συμπεριφορών. Ο GRUWDER σημειώνει ότι σε τέτοιες διδακτικές ενότητες, σωστές απαντήσεις είναι αποτελέσματα αποτυχημένων συλλογισμών... και λοιπόν πως θα βγούμε ενισχυμένοι από μια τέτοια κατάσταση;

΄Ολοι γνωρίζουμε για παραγωγές όπως: βιβλία, εκπαιδευτικά πακέτα (software), βιντεοταινίες, ... κτλ. που παρουσιάζονται σε μορφή διδακτικών ενοτήτων, λιγότερο ή περισσότερο επεξεργασμένων, για μια προγραμματιζόμενη διδασκαλία. Η θεαματική ανάπτυξη της μικρο-πληροφορικής τόσο στο σχολείο όσο και στο σπίτι έχουν σαν αποτέλεσμα τον εφοδιασμό της αγοράς με ένα αυξανόμενο αριθμό πακέτων κάθε μορφής. Ωστόσο όμως οι αρχές της προγραμματισμένης διδασκαλίας εισέβαλαν εξ' ίσου και στο πεδίο της επιμόρφωσης. Για παράδειγμα η **μικρο-διδασκαλία** είναι μια τεχνική επιμόρφωσης των δασκάλων που συνίσταται στην επεξεργασία σύντομων ενοτήτων (π.χ. 10 λεπτών) με πρόθεση να ελέγξουν τις ενοτητες αυτές (μαγνητοσκοπώντας τις. Τη μαγνητοσκόπιση θα ακολουθήσει προβολή και κριτική ανάλυση. Η εργασία αυτή θα επαναληφθεί μέχρι πλήρους ικανοποίησης του στόχου.

Υπάρχουν όμως και άλλες — πολύ φανερές — επιδράσεις της παρουσίας του νεο-μπιχαβιορισμού στο σύστημα της εκπαίδευσης. Ακόμα στο ρεύμα της «παιδαγωγικής των στόχων» διακρίναμε από τη πλευρά των παιδαγωγών την υιοθέτηση ενός νέου ρεύματος ιδεών της γνωστικής ψυχολογίας.

΄Ομως οι ερευνητές όπως και οι καθηγητές, συμπέραναν ότι η προγραμματισμένη διδασκαλία και τα παραγωγά της αν και θεραπεύουν τις ατέλειες περιορισμένων βλαβών, δεν επιτρέπουν την απόκτηση επιπρόσθετων ιδιαίτερων γνώσεων. Τέλος η εργασία πάνω στις διάφορες ευρετικές κατά τη διάρκεια λύσης προβλημάτων (επίπε-

δο μεταγνωστικό) μένει ανεκτέλεστη. Έτσι παραμένει ανοιχτό το ερώτημα:

Ένας μαθητής μέσα στην τάξη, πώς χτίζει τη γνώση;

2.2. Η παιδαγωγική της μή-έννοιας

Ας ξεκινήσουμε από δύο παραδείγματα:

1) Ένας μαθητής υποστήριξε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = 5x - 3$ είναι $D = \mathbb{R} - \{1\}$. Στο ερώτημα γιατί; Απάντησε:

Επειδή· $$f(x) = \frac{5x - 3}{1},$$

και ο παρανομαστής δεν μπορεί να είναι μηδέν, τότε γιαυτό είναι $D = \mathbb{R} - \{1\}$.

2) Κάποιος άλλος έγραψε: $$\frac{\alpha + \beta}{\alpha + \gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$$

Του ζητήσαμε να αντικαταστήσει $\alpha = 4$, $\beta = 6$ και $\gamma = 1$. Οπότε μετά από πράξεις κατέληξε στο ότι: $2 = 6$

χωρίς να εκδηλώσει την παραμικρή έκπληξη. Όταν ρωτήθηκε τι σκέφτεται: μπορεί ένα παιδί να είναι ταυτόχρονα 2 χρόνων και 6 χρόνων; απάντησε ως εξής: «Ωραία... μα στα μαθηματικά δεν είναι το ίδιο».

Τα δύο αυτά παραδείγματα είναι δανεισμένα από το βιβλίο της Stella Baruk «Η ηλικία του καπετάνιου» (1985), του οποίου ο τίτλος είναι εμπνευσμένος από μία έρευνα που έγινε στο IREM της Grenoble εδώ και μερικά χρόνια. Πρόσφατα, νομίζοντας ότι θα έχουν γίνει κάποιες πρόοδοι, επανέλαβα το ίδιο πείραμα με κείνο του IREM της Grenoble σε 6 τάξεις (4 του δημοτικού CE_1, CE_2, CM_1, CM_2) και στην πρώτη Γυμνασίου ($6^{ème}$). Ζήτησα:

1) $$\begin{array}{r} 27 \\ +\ 32 \\ \hline \\ \end{array}$$

2) Σ' ένα καΐκι υπάρχουν 11 αγελάδες και 22 κατσίκες. Πόσο χρονών είναι ο καπετάνιος;

Στον επόμενο πίνακα: Η πρώτη στήλη περιέχει την τάξη με τον αριθμό των μαθητών, η δεύτερη στήλη το ποσοστό των λανθασμένων απαντήσεων στην άσκηση (1) δηλ. την πρόσθεση και η τρίτη στήλη το ποσοστό των απαντήσεων που έγραψαν 33 ή άλλο αριθμό (47, 57, ... κτλ.) σαν απάντηση στο πρόβλημα (2) για την ηλικία του Καπετάνιου.

Τάξη (μαθητές)	Λάθη πρόσθεσης άσκηση (1)	Απαντήσεις (33 ή άλλος αριθμός) άσκηση (2)
CE_1 (15)	67%	100%
CE_2 (18)	72%	89%
CM_1 (24)	50%	38%
CM_2 (21)	5%	95%
6^{eme} (16)	0%	81%

Ας βάλουμε στην αρχή την τάξη CM_1, στην οποία η δασκάλα — χάρις στην οποία έγινε και το πείραμα — εφάρμοσε κάθε δυνατή μεθοδολογία και έτσι τα αποτελέσματα έχουν άλλη ερμηνεία. Όμως στις άλλες τάξεις βλέπουμε ότι οι μαθητές όσο προχωρούν τις τάξεις προοδεύουν στην εκτέλεση του αλγόριθμου της πρόσθεσης, (στήλη 2) ενώ το ποσοστό στις λάθος απαντήσεις για τη 2η άσκηση (στήλη 3) μειώνεται αλλά όχι με ιδιαίτερο μεγάλο ρυθμό.

Στο δημοτικό (CE_1, ..., CM_2) οι μαθητές φαίνεται να απαντούν εντελώς αυτόματα σε ποσοστό κατά μέσο όρο 80%.

Το ίδιο πείραμα έκανα και με καθηγητές καθώς και σχολικούς συμβούλους και τα ποσοστά καθώς και η συμπεριφορά πλησίαζαν πολύ αυτά του προηγούμενου πειράματος.

Τι σημαίνουν αυτές οι παρατηρήσεις;

Επικαλέστηκα προηγουμένως πως με αφορμή θεωρητικές προϋποθέσεις - παρατηρήσεις πάνω στη μάθηση, ο Skinner και οι διαδοχοί του ανέπτυξαν την θεωρία της προγραμματισμένης διδασκαλίας και πως διαδοχικά καθιερώθηκε η παιδαγωγική των μικρών βημάτων. Αυτή η τελευταία, ανεξάρτητα από αυτά ή όχι, καθιέρωσε μια εμπειρική παιδαγωγική που συνίσταται στο τεμαχισμό, όσο γίνεται, των δυσκολιών. Το αποτέλεσμα είναι ότι οι μαθητές μας, του σήμερα αλλά και του χτες (οι δάσκαλοι σήμερα των πρώτων) δέχονται και δέχτηκαν μια εκπαίδευση βασισμένη κυρίως πάνω σε διαφορετικά (ποικίλα) πρότυπα της διδασκαλίας των μικρών βημάτων. Όμως όσο τεμαχίζουμε ένα έργο για ένα μαθητή, τόσο και χάνουμε τη συνολική όψη αυτού του έργου, **την σημασία του**. Έτσι εξασκούμε προοδευτικά τους μαθητές μας, από μικρή κιόλας ηλικία, να εκτελούν συνταγές ή το χειρότερο να εκτελούν αυτά **που τους μοιάζουν για συνταγές**, χωρίς να ψάχνουν για το νόημά τους.

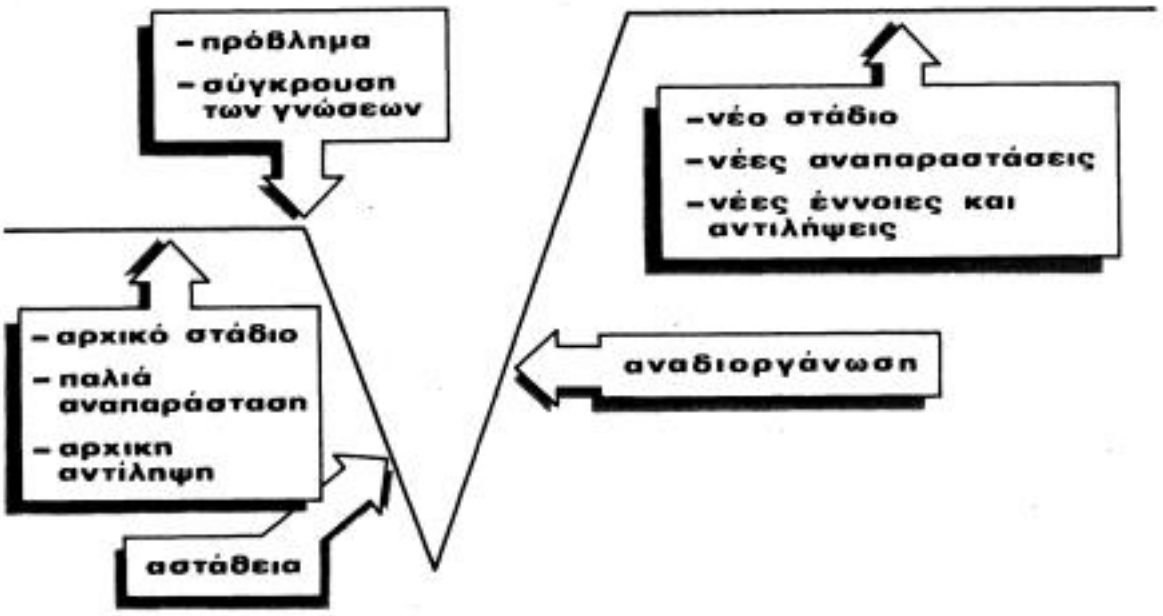
Η παιδαγωγική των μικρών βημάτων είναι η παιδαγωγική της μη-έννοιας.

2.3. Η τάξη, μια «επιστημονική κοινότητα»

Στην εποχή που ο Watson ανάπτυξε με επιτυχία τις βάσεις του μπιχαβιορισμού, ένας ζωολόγος ο Jean Piaget, επιδίδοταν σε εργασίες στην ψυχολογία. Θα του πάρει

περισσότερο από μισό αιώνα η προσπάθεια να διατυπώσει τους μηχανισμούς με τους οποίους εξελίσσεται η γνώση. Εκκέντρωσε τις έρευνές του πάνω στον **αριθμό, το διάστημα, το χρόνο, τη ταχύτητα** και **τη τύχη**. Σιγά-Σιγά έβαλε τα θεμέλια και τις θέσεις των βασικών ιδεών αυτού που ονόμασε **κατασκευαστική θεωρία της γνώσης**. Δεν γνωρίζω αντικείμενα, μαθηματικά ή όχι, στα οποία να μην αναφέρονται επάνω τους η θεωρία του Jean Piaget.

Η νοημοσύνη μας κατασκευάζεται λειτουργώντας μέσα από διάφορα **στάδια** κατά την διάρκεια των οποίων συνειδητοποιούνται οι νέες ιδέες και αντιλήψεις. Οι αλλαγές αυτές των σταδίων δεν είναι απαλλαγμένες από άλματα. Οι ρήξεις για τις οποίες μιλάει ο G. Bachelard είναι ακριβώς αυτές οι αναφορές του διαφοροποιούν την αντίληψη της μάθησης κατά Piaget από εκείνη των μπιχαβιοριστών και της παιδαγωγικής των μικρών βημάτων. Αυτή τη νέα αντίληψη της μάθησης την συμβολίζω συνήθως με το ακόλουθο σχήμα*.



Για τον Piaget και τους διαδόχους του (Wallen, Dioce, Myguy, Anne Perret-Clermont) **το παιδί είναι ένας επιστήμονας** που εξελήσσει τις γνώσεις του και την νοημοσύνη του, μέσα από αλληλεπιδράσεις με άλλους. Κυρίως όμως μέσα από **καταστάσεις-προβληματισμού**** (situations-problèmes).

---

* Που πρωτοκαθιέρωσα στο άρθρο μου «On strategies for teaching» στο περιοδικό For th- learning of Mathematics No 5.1 1985 p.p. 2-11.

** Ο όρος καθιερώθηκε γύρω στα 1986 και η έκφραση αυτή, αλλά και η ιδέα θεσμοθετήθηκαν στα αναλυτικά προγράμματα μαθηματικών του Γυμνασίου.

Για να μπορέσουμε να συγκρίνουμε την εφαρμογή στη πράξη της θεωρίας της κατασκευαστικής απόκτησης της γνώσης, θα αναφερθούμε σε μερικά σημεία που είχαν διατυπωθεί στη προηγούμενη παράγραφο.

* Υποθέσεις: 1) Η ΓΝΩΣΗ, προφανώς, δεν μπορεί να χωριστεί σε μικρότερες ενότητες καλώς προσδιορισμένες. Δεν δουλεύουμε παρά μόνο με **αναπαραστάσεις** των εννοιών ενός δοσμένου υποκειμένου (μαθητών)*
2) Μαθαίνουμε μέσα από αντιπαράθεση των γνώσεων σε μια κατάσταση - προβληματισμού. Έτσι περνάμε από μία αναπαράσταση σε μία άλλη.
3) Τα «λάθη» ανήκουν και αυτά στις διαδικασίες μάθησης και η αναλυσή τους από το ίδιο το υποκείμενο (μαθητή) δεν μπορεί παρά να ευνοήσει την μάθηση.

* Πρακτικά συμπεράσματα για την οργάνωση της μάθησης:
1) Πηγαίνουμε από το δύσκολο στο απλό, προτείνοντας καταστάσεις - προβληματισμού ανοικτού τύπου. Π.χ. Στην Α΄ Λυκείου δίνουμε για έρευνα την εύρεση των ριζών της εξίσωσης $200\eta\mu x - x = 0$ **πριν** την συστηματική μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. **Το σύνθετο είναι κείνο που δίνει νόημα.**
2) Να συνηθίσουμε τους ίδιους τους μαθητές να αναλύουν και να κριτικάρουν κάθε αποτέλεσμά τους άλλα και κάθε εργασία τους, ανεξάρτητα αν σε μας φαίνεται αληθής ή όχι.
Να μαθαίνουμε προσδιορίζοντας και αναλύοντας το απλό μέσα στο σύνθετο.

Έτσι η τάξη μπορεί να θεωρηθεί σαν μία **μικρή επιστημονική κοινότητα** με τους δικούς της κανόνες λειτουργίας, που τις περισσότερες φορές λειτουργούν έμεσα (υποδηλούμενα). Εδώ ο πρωταρχικός ρόλος του δάσκαλου είναι να βοηθήσει τη τάξη για να λειτουργήσει σαν μια επιστημονική κοινότητα. Αυτό επιτυγχάνεται μόνο αν ο δάσκαλος-καθηγητής, δίνει στους μαθητές του κατάλληλα προβλήματα που θα ευνοούν αντιπαραθέσεις γνωστικού χαρακτήρα, οι οποίες με την σειρά τους θα προκαλούν επιστημονικές «διαμάχες». Τέλος την παραπάνω φάση, θα πρέπει να ακολουθεί η φάση της επικύρωσης των νέων γνώσεων, μέσα από διαδικασίες που θα ευννοούν τη μέγιστη δυνατή συμμετοχή των μαθητών.

— Για μας τους καθηγητές που θα θέλαμε να εργαστούμε μέσα σαυτή τη προοπτική, υπάρχουν (κυριαρχούν αναπάντητα και συνάμα δύσκολα ερωτήματα - κλειδιά, ανοιχτά για μελέτη.

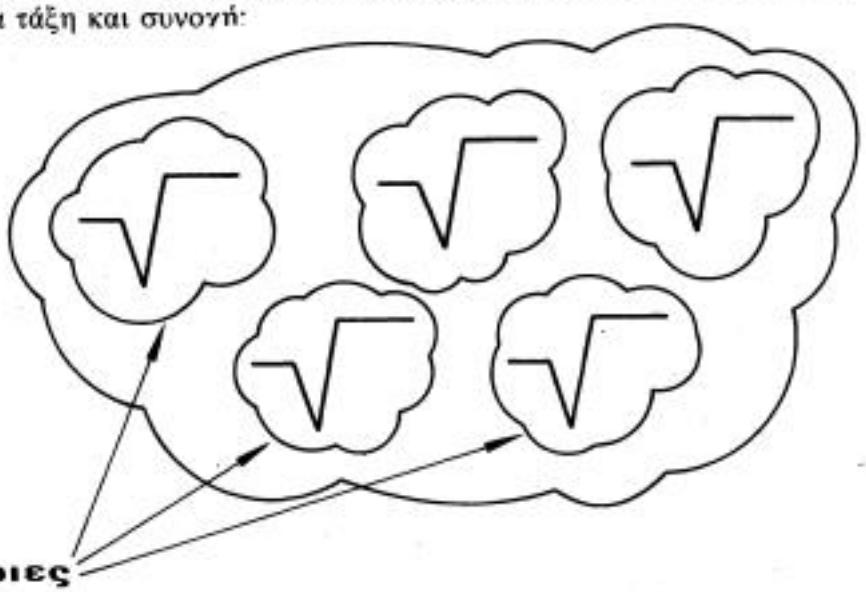
* Πώς μπορούμε να καταλάβουμε τις **αναπαραστάσεις** που αποκτούν, για τη συγκεκριμένη γνώση, οι μαθητές **μας**;

---

* Βλέπε γιαυτό το εξαίρετο βιβλίο του Jacques Nimier "Les maths, le français, les langues... A quoi ça me sert" Cedéc-Nathan, Paris 1985. («Τα μαθηματικά, τα γαλλικά, οι γλώσσες... σε τι μου χρησιμεύουν;»).

* Πώς θα ανακαλύψουμε και θα ξεπεράσουμε τα **εμπόδια** που εμφανίζονται στις γνώσεις;
* Πώς κατασκευάζονται (δηλαδή δημιουργούνται) **καταστάσεις-αντιπαράθεσης**;

Τέλος και πάνω από όλα και με την υπόθεση ότι τα παραπάνω ερωτήματα έχουν απαντηθεί, εκείνο που θα πρέπει να προσέξουμε είναι το γεγονός: πως θα εννοήσουμε την ανάλυση, την σύνθεση των διαφόρων εννοιών που κάθε μαθητής επινοεί; Πώς θα αποφύγει από μόνος του ένα είδος σύγχυσης των γνώσεων; Πώς θα βοηθήσουμε τον μαθητή να συσχετίσει τις αποκτημένες γνώσεις και να τις οργανώσει δηλαδή να τις βάλει σε κάποια τάξη και συνοχή:



Πριν ασχοληθούμε με λεπτομέρεια με δύο παραδείγματα καταστάσεων — αντιπαράθεσης, ας σημειώσουμε μια δυσκολία που πρέπει να την έχουμε, καλά στο μυαλό μας:

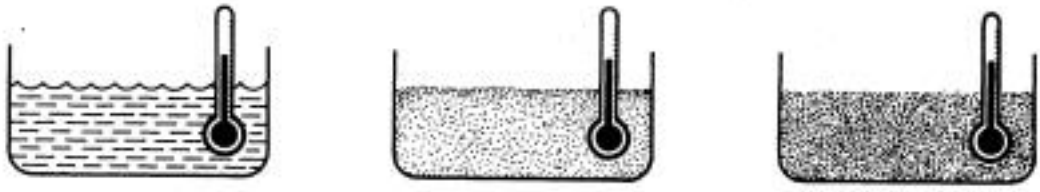
Παρά την δημιουργία και κατασκευή των νέων αναπαραστάσεων, των νέων μοντέλων, τα παλιά υπάρχουν, αντιστέκονται και παραμένουν ενεργά.

Ποιός δεν έχει το αίσθημα ότι η γη είναι επίπεδη, ακίνητη και ότι ο «ήλιος σηκώνεται από τα ανατολικά και πέφτει στα δυτικά»; Ποιός δεν πρόσεξε, στην παραλία μιας θάλασσας, κατα την διάρκεια ενός ηλιοβασιλέματος, τον ήλιο που σιγά-σιγά «πέφτει για ύπνο»; Εξ' άλλου υπάρχουν στη California των ΗΠΑ μια οργάνωση που περιλαμβάνει ανθρώπους που υποστηρίζουν ότι η γη είναι επίπεδη, μάλιστα γι' αυτό παρουσιάζουν εξηγήσεις «λογικές» και «επιστημονικά επιχειρήματα» που είναι αντιφατικά από μόνα τους π.χ. αεροπορικά ταξίδια, δοφυρόφοι κτλ.

Είναι φανερό ότι τα παλιά πρότυπα αφήνουν ανεξίτηλα ίχνη στην συλλογική αντίληψη που έχει ο κόσμος αλλά και καθένας προσωπικά για τις διάφορες έννοιες.

Να δύο παραδείγματα παρμένα από άλλες επιστήμες και όχι από τα μαθηματικά

1) Έχουμε τρία πανομοιότυπα δοχεία που περιέχουν νερό, άμμο και ρινίσματα σιδήρου αντίστοιχα.



Τα τοποθετούμε για αρκετές μέρες σ' ένα φούρνο με θερμοκρασία 80° και ζητάμε να μας απαντήσουν! Ποιο από τα τρία θα δίχνει την ψηλότερη θερμοκρασία αν τα βγάλουμε από τον φούρνο; Αρκετά συχνά αυτό με το σίδηρο προβάλεται σαν «πιο ζεστό» παρά αυτό με την άμμο.

2) Ρωτάμε τους μαθητές μας: Πίνετε 1 λίτρο νερό. Σχεδιάστε την τροχιά του υγρού μέσα στο σώμα σας. Πολλά από τα σχέδια δεν διαφέρουν μεταξύ τους. Όσον αφορά τα έντερα: πρόκειται για σωλήνες. Άρα είναι «αδιαπέραστα».

Αυτά τα δυο απλά, για να μην πως απλούστατα παραδείγματα, απεικονίζουν αυτό που ο G. Bachelard υποστήριξε εδώ και μερικά χρόνια: Στην εξέλιξη των γνώσεων συναντάμε **εμπόδια.** Αυτά τα εμπόδια δεν οφείλονται σε άγνοια, αλλά **σε «κακά φτιαγμένες (κτισμένες) γνώσεις».**

2.4. Το προφανές και το εμπόδιο

Ας δούμε το παρακάτω πρόβλημα που το αποδίδουν συχνά στο Tartaglia:

«Δύο στρατιώτες έχουν αντίστοιχα 2 και 3 ψωμιά. Στο γεύμα τους, θάθελαν να τα μοιράσουν εξ' ίσου. Έρχεται όμως ένας τρίτος στρατιώτης που δεν έχει να φάει. Οι δύο πρώτοι στρατιώτες μοιράζονται εξ' ίσου με τον τρίτο στρατιώτη τα 5 ψωμιά. Ο Τρίτος στρατιώτης αφού έφαγε και πριν τους αποχαιρετήσει τους ευχαρίστησε και τους άφησε 5 χρυσά νομίσματα για να τα μοιράσουν δίκαια οι δύο πρώτοι. Πόσα νομίσματα πρέπει να πάρει καθένας από τους δύο πρώτους;

Ας ονομάσουμε Α, Β τους πρώτους στρατιώτες και Γ το τρίτο, αυτόν που άφησε στους άλλους τα 5 χρυσά νομίσματα. Μια συχνή δικαιολόγηση από μαθητές που ασχολούνται με την λύση του προβλήματος, εμφανίζεται με την επόμενη αρχική κατάσταση.

Στρατιώτες	Ψωμιά	Νομίσματα
Α	2	2
Β	3	3
Σύνολο	5	5

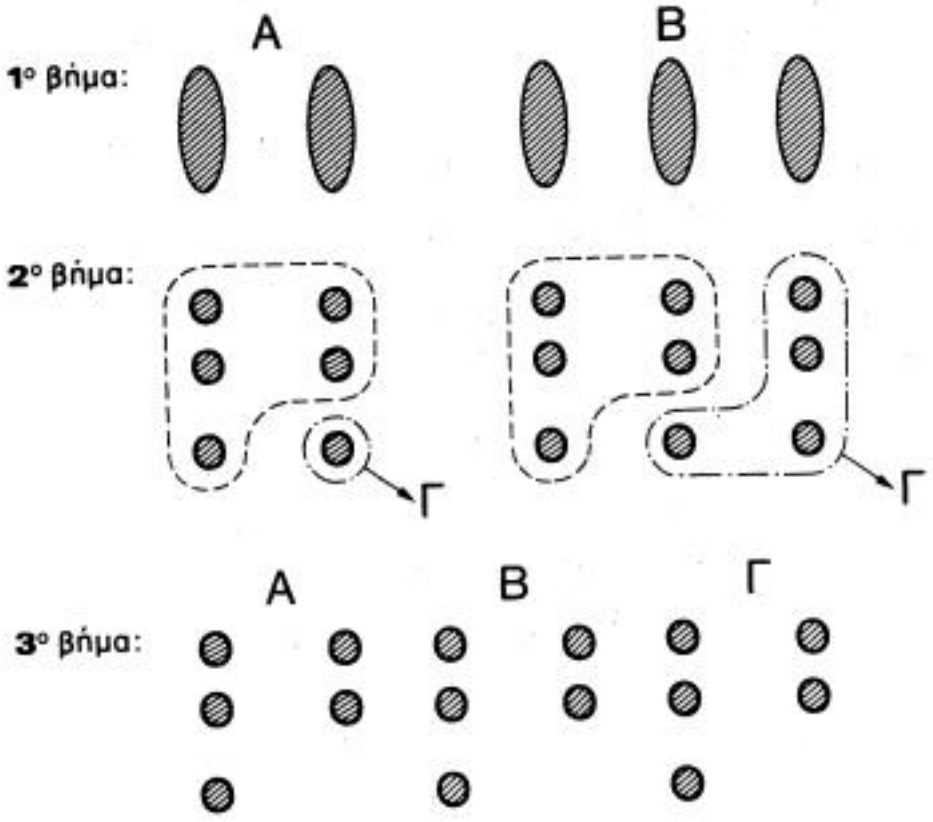
Που είναι το πρόβλημα όμως; Η λύση τόσο απλή, τόσο προφανής... και ωστόσο!

Στο παρακάτω σχήμα, παρουσιάζουμε:

στο 1ο βήμα: την αρχική κατάσταση

στο 2ο βήμα: για μια δίκαιη διανομή των ψωμιών χωρίζουμε καθένα σε τρία (3) μέρη.

στο 3ο βήμα: βλέπουμε το δίκαιο μοίρασμα



— η μερίδα καθενός είναι: $\frac{5}{3}$ του ψωμιού

Ο Α θα δώσει $\frac{6}{3}-\frac{5}{3}=\boxed{\frac{1}{3}}$, ενώ ο Β θα δώσει τα $\frac{9}{3}-\frac{5}{3}=\boxed{\frac{4}{3}}$. Επομένως ο Β θα πάρει $\boxed{4}$ χρυσά νομίσματα και ο Α μόνο $\boxed{1}$ χρυσό νόμισμα.

Το δεύτερο πρόβλημα που θα αναφερθώ, το διατύπωσε ο Nicolas Balacheff.

«Ένας χωρικός αγόρασε ένα άλογο 400 $, το ξαναπουλάει 500 $, ξανααγοράζει το ίδιο άλογο 600 $ και το ξαναπουλάει 700$ κέρδισε ή έχασε και πόσα $;

Έδωσα το πρόβλημα αυτό με διαφορετικές μορφές σε κοινό. Όλοι συμμετείχαν

σε μία συζήτηση-αντιπαράθεση πολύ ζωντανή. Για άλλους είχε χάσει, για άλλους είχε κερδίσει και όσο για τις απαντήσεις, ποικιλία από αυτές. Να δύο από όλες όσες πήρα.

— Κέρδισε 300 $, διαφορετικά μεταξύ τελικής τιμής πώλησης και αρχικής αγοράς.

$$700\ \$ - 400\ \$ = 300\ \$$$

— Κέρδισε 100 $, γιατί διαδοχικά, κερδίζει 100 $, χάνει 100 $ και κερδίζει 100 $.

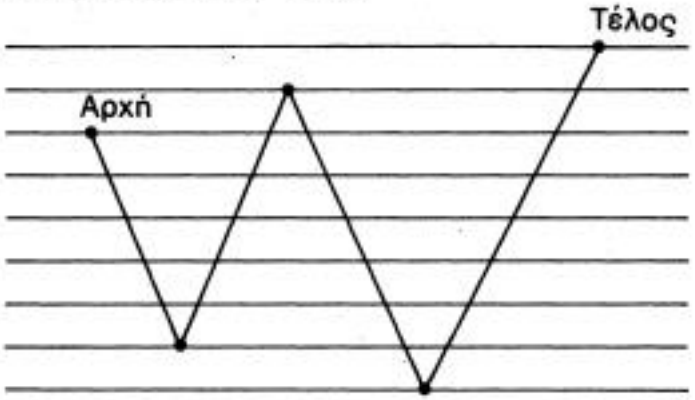
Φυσικά και οι δύο απαντήσεις είναι λανθασμένες. Κέρδισε 200 $. Ωστόσο να σημειώσω ότι η αντιπαράθεση κάθε φορά ήταν ζωντανή και όσον αφορά την λύση, υπήρχαν ακροατές, που δεν πίστευαν από τις λύσεις που δόθηκαν. Στη συνέχεια τους πρότεινα.

1) — Αγορά: $400\ \$ + 600\ \$ = 1000\ \$$
— Πωλήσεις: $500\ \$ + 700\ \$ = 1200\ \$$
— Κέρδος: $1200\ \$ - 1000\ \$ = 200\ \$$

ή

2) $(-400) + 500 + (-600) + 700 = 200\ \$$

3)



Το κοινό των δύο παραδειγμάτων:

Τα «προφανή» είναι εμπόδια

Λόγω της ίδια αντίληψης για πολούς μαθητές είναι «αληθές» ότι

$$x^2 > x \qquad \text{ακόμα ότι} \qquad \sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$$

Να λοιπόν γιατί δεν πρέπει να προτείνουμε στους μαθητές απλές **προφανείς** καταστάσις για επεξεργασία και λύση.

Σε μας λοιπόν τους καθηγητές ανήκει η ευθύνη για εξάσκηση των μαθητών μας με προβλήματα και κριτική ανάλυση καταστάσεων, προτείνοντάς τους **σύνθετες καταστάσεις, που δεν θα τους οδηγούν σε «αυτόματες» επεξεργασίες.**

• Από τα λάθη στις αναπαραστάσεις των μαθητών μας

— Για να βοηθηθούμε στην αλλαγή της πρακτικής της διδασκαλίας μας, δεν φτάνει

μόνο η δική μας προσωπική επιθυμία για αλλαγή. Χρειάζεται μια σωστή και διαρκής επιμόρφωση που θα συνδυάζει τις προσωπικές (ατομικές) και συλλογικές διαστάσεις του προβλήματος.

— Με το να ξαναφέρουμε στα επίσημα αναλυτικά προγράμματα την ιδέα των **καταστάσεων-προβληματισμού**, νομίζω, ότι μερικά εμπόδια θεσμικής κυρίως μορφής φαίνεται ότι απαλείφθηκαν. Αυτό μας επιτρέπει να προσδιορίζουμε καλύτερα τις δυσκολίες που συναντιούνται σε μια τέτοια πρακτική.

— Δεν μπορούμε μόνοι μας να φανταστούμε και να δημιουργήσουμε μεγάλο αριθμό καταστάσεων-προβληματισμού με σκοπό να τις προτείνουμε στους μαθητές μας. Από την άλλη μεριά δεν διαθέτουμε τον απαιτούμενο χρόνο για πειραματισμό προτού τις εφαρμόσουμε στη τάξη.

— Αντιθέτως μια τέτοια εργασία είναι ευκολότερη αλλά και πλουσιότερη αν σχεδιαστεί συλλογικά. Γιαυτό θα πρέπει **οι θεσμοί της επιμόρφωσης, οι παιδαγωγικές κινήσεις, τα περιοδικά** κτλ να παίξουν σημαντικό ρόλο για το σκοπό αυτό. Πρέπει να ευνοήσουν συναντήσεις, ανταλλαγές απόψεων και συσσώρευση εμπειριών. Για τους περισσότερους από τους καθηγητές, η αρχική επιμόρφωση, φαίνεται να είναι ξεχασμένη μοιάζει σαν προσωρινή διασκέδαση, σαν ξεκούραση (δεν λέει τίποτε αυτό!) ξεκομμένη από την καθημερινή πρακτική της τάξης.

— Όχι μόνο δεν βλέπω καμμία μοιρολατρία, αλλά πιστεύω ότι είναι δυνατόν να προκαλέσουμε μια βαθειά τομή σαυτές τις νοοτροπίες, μια αλλαγή στις σχέσεις μεταξύ επαγγελματικής πρακτικής, και επιμόρφωσης. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει, και το μπορούν να **«πολιορκήσουν»** τους χώρους επιμόρφωσης για μια πραγματική και ουσιαστική δουλειά πάνω στις πρακτικές της διδασκαλίας, με σκοπό μια κριτική και οργανωμένη συσσώρευση των εμπειριών τους που θα τους επιτρέψει να κατακτήσουν νέες γνώσεις που θα τις μεταβάλουν συνεχώς.

— Εξ' ίσου χρήσιμες αλλά και απαραίτητες είναι οι μεθοδικές ανταλλαγές, επιστημονικού επιπέδου, πάνω στις καταστάσεις που επικρατούν στην τάξη.

— Μας μένει ακόμα να καθοδηγήσουμε ταυτόχρονα μια έργασία πάνω στις αναπαραστάσεις των μαθητών **μας** και πάνω στις **δικές μας** αναπαραστάσεις που δημιουργούνται. Γι' αυτό κάθε εργασία που γίνεται στα πλαίσια της επιμόρφωσης ή της πανεπιστημιακής έρευνας μπορεί να μας βοηθήσουν για τη λήψη αποφάσεων.

— **Δεν θα είμαι σε θέση** να παρατηρήσω και να αναλύσω τις μαθήσεις των μαθητών μου αν **δεν είμαι ικανός να αναλύσω τις δικές μου**, στα μαθηματικά όπως και σε κάθε άλλη μου δραστηριότητα (σπορ, τέχνη, γράμματα, κτλ.) και όχι απαραίτητα σε σχολικό περιβάλλον.

— Όσον αφορά τη μελέτη των αναπαραστάσεων των μαθητών μας, είναι στο χέρι μας, να τις πλησιάσουμε και να δημιουργήσουμε καταστάσεις που θα οδηγούν σε παρατηρήσιμα γεγονότα και σε συλλογή συμπερασμάτων. Κάθε φορά, σε κάθε στιγμή, δεν μπορούμε να αποφύγουμε προς τους εαυτούς μας την εξής ερώτηση:

«γιαυτόν εκεί τον μαθητή, τι σημαίνει αριθμός; τι είναι παραλληλόγραμμο; τι είναι συνάρτηση; τι είναι παράγωγος;»

΄Εχουμε λοιπόν ακόμα ανάγκη, να περιπλανηθούμε στο κόσμο των λαθών των μαθητών μας.