Authors: Τ. Πατρώνης, Α. Τριανταφύλλου, Κασοκεράκη Μ., Θ. Πρίφτης

Title: Για την-- Β τάξη

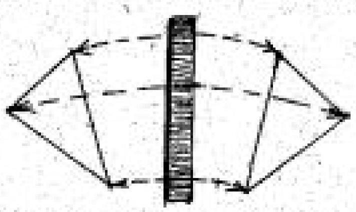
Creator: HDML

ΓΙΑ ΤΗΝ Β' ΤΑΞΗ

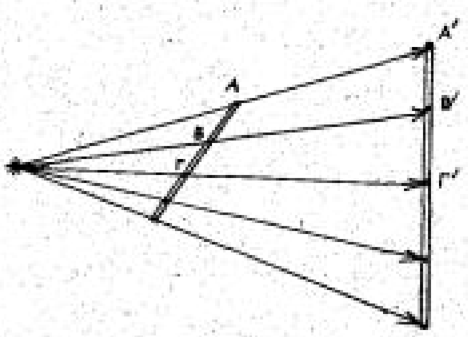
ΑΛΓΕΒΡΑ

1. Ἀντιστοιχία ἕνα πρὸς ἕνα καὶ ἰσοδύναμα σύνολα. Πολλὲς φορὲς χρειάζεται νὰ ἀντιστοιχίσουμε ἕνα πρὸς ἕνα τὰ στοιχεῖα δύο συνόλων. Π. χ. μιλᾶμε γιὰ ἕνα σύνολο φίλων μας χωρὶς νὰ τοὺς βλέπουμε, χρησιμοποιώντας τὰ ὀνόματά τους ἢ ἄλλα χαρακτηριστικὰ παρατσούκλια κ.λ.π. Ἀλλὰ πρέπει *σὲ κάθε φίλο νὰ ἀντιστοιχεῖ ἕνα μόνο ὄνομα καὶ σὲ κάθε ὄνομα ἕνας μονάχα φίλος*, ὥστε νὰ μὴν ὑπάρχει φόβος νὰ γίνει σύγχιση. Ἄλλα παραδείγματα ἀντιστοιχίας ἕνα πρὸς ἕνα: Ὅταν μετρᾶμε (ἀπαριθμοῦμε) τὰ στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου, δὲν κάνουμε τίποτ' ἄλλο παρὰ τὰ ἀντιστοιχίζουμε μὲ τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3,..., καθένα στοιχεῖο μὲ ἕναν ἀριθμὸ μέχρι νὰ τελειώσουν ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου.

Ὅταν βάλουμε ἕνα σχῆμα, π. χ. ἕνα τρίγωνο μπροστὰ σ' ἕναν καθρέφτη, οἱ κορυφὲς τοῦ τριγώνου ἀντιστοιχοῦν μία πρὸς μία μὲ τὶς κορυφὲς τοῦ εἰδώλου του ποὺ φαίνεται μέσα στὸν καθρέφτη.



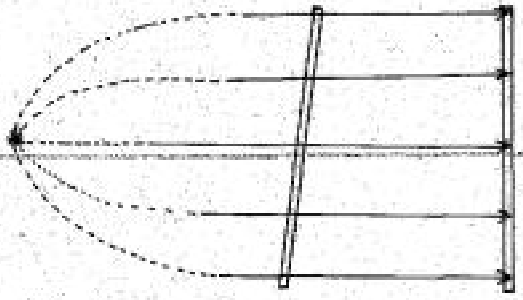
Ἕνα ἄλλο παράδειγμα; Ἀπὸ ἕναν προβολέα (ποὺ τὸν σημειώνουμε στὸ σχῆμα σὰν ἀστεράκι *) ξεκινάει μιὰ δέσμη ἀπὸ ἀκτίνες φωτός. Ἡ δέσμη συναντάει ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα (ποὺ μπορεῖ νὰ εἶναι ἕνα λεπτὸ ξύλο ἢ μιὰ τεντωμένη κλωστή) καὶ «προβάλλει» τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο πανί.



Ἡ «σκιὰ» τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ποὺ φαίνεται στὸ πανὶ εἶναι κι' αὐτὴ ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα. Τὰ σημεῖα Α, Β, Γ,..., στὰ ὁποῖα «κόβεται» τὸ πρῶτο εὐθύγραμμο τμῆμα ἀπὸ τὶς ἀκτίνες τῆς δέσμης ἀντιστοιχοῦν ἕνα πρὸς ἕνα μὲ τὰ σημεῖα Α', Β', Γ',..., ὅπου κόβεται τὸ δεύτερο.

Λόγου χάρη τὸ πάνω - πάνω σημεῖο Α τοῦ πρώτου τμήματος ἀντιστοιχεῖ μὲ τὸ πάνω - πάνω σημεῖο Α', τοῦ δεύτερου, τὸ ἀμέσως παρακάτω σημεῖο Β τοῦ πρώτου τμήματος μὲ τὸ ἀμέσως παρακάτω Β' τοῦ δεύτερου κλπ.

Ἂν τὸ φῶς ἐρχόταν ἀπὸ πολὺ μακρυά, οἱ ἀκτίνες τῆς δέσμης θὰ ἦταν *παράλληλες* καὶ θὰ εἴχαμε αὐτὸ τὸ σχῆμα:



Σὲ ὅποια περίπτωση ἔχουμε ἀντιστοιχία ἕνα πρὸς ἕνα μεταξὺ δύο συνόλων, ὅσα στοιχεῖα ἔχει τὸ ἕνα σύνολο θὰ ἔχει καὶ τὸ ἄλλο (ἂν τὸ ἕνα ἔχει ἂς ποῦμε 10.561 στοιχεῖα δὲν μπορεῖ τὸ ἄλλο νὰ ἔχει 10.562 γιατὶ αὐτὸ τὸ ἕνα ποὺ περισσεύει δὲ θὰ ἀντιστοιχεῖ μὲ κανένα ἀπὸ τὸ πρῶτο σύνολο). Γιαυτὸ δύο σύνολα ποὺ τὰ στοιχεῖα τους ἀντιστοιχοῦν ἕνα πρὸς ἕνα τὰ λέμε *ἰσοδύναμα* (ἔχουν ἴδια δύναμη, ἴδιο πληθικὸ ἀριθμό).

Φυσικὰ δυὸ ἰσοδύναμα σύνολα μπορεῖ νὰ μὴν εἶναι ἴσα, (νὰ μὴν ἔχουν δηλ. τὰ ἴδια στοιχεῖα), γιατὶ μπορεῖ τὰ στοιχεῖα τοῦ ἑνὸς νὰ εἶναι τελείως διαφορετικὰ ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τοῦ ἄλλου: τὸ σύνολο τῶν πέντε δαχτύλων μας εἶναι ἰσοδύναμο μ' ἕνα σύνολο ἀπὸ πέντε μῆλα ποὺ εἶναι βέβαια τελείως διαφορετικὰ ἀπὸ τὰ δάχτυλά μας!

2. Ἀπειροσύνολα. Τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν:

1, 2, 3,..., 1.000.000, 1.000.001, 1.000.002,...

δὲν ἔχει τελευταῖο στοιχεῖο, γιατὶ ὁποιονδήποτε φυσικὸ ἀριθμὸ κι ἂν πάρουμε, ὁσονδήποτε μεγάλον, ἂν τοῦ προσθέσουμε μιὰ μονάδα θὰ ἔχουμε μεγαλύτερο ἀριθμό. Γιαυτὸ λέμε ὅτι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι «ἄπειροι στὸ πλῆθος» ἢ ὅτι ἀποτελοῦν ἕνα «*ἀπειροσύνολο*».

Ἄλλα παραδείγματα ἀπειροσυνόλων:

α) Τὸ σύνολο ὅλων τῶν ἄρτιων (ζυγῶν) ἀριθμῶν τῆς ἀριθμητικῆς:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14,...

Ἂς παρατηρήσουμε ἐδῶ κάτι ἀληθινὰ περίεργο: *Ὑπάρχει ἀντιστοιχία ἕνα πρὸς ἕνα* ἀνάμεσα στὰ δυὸ παραπάνω ἀπειροσύνολα, τὸ σύνολο ὅλων τῶν φυσικῶν καὶ τὸ σύνολο τῶν ζυγῶν τῆς ἀριθμητικῆς. Ἡ ἀντιστοιχία φαίνεται μὲ διπλὰ βέλη ἔτσι:

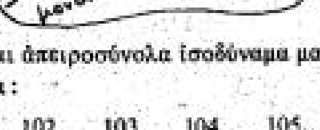
$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & 1.000.001 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & \cdots & 2.000.002 & \cdots \end{array}$$

Ἐπομένως τὰ δυὸ αὐτὰ ἀπειροσύνολα εἶναι *ἰσοδύναμα* κι ὅμως τὸ ἕνα εἶναι γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ ἄλλου. Πραγματικά, κάθε ζυγὸς ἀριθμὸς τῆς ἀριθμητικῆς εἶναι φυσικὸς ἀριθμός, καὶ ἐκτὸς ἀπὸ τοὺς ζυγούς, τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν περιέχει καὶ τοὺς μονοὺς («περιττοὺς») ἀριθμοὺς τῆς ἀριθμητικῆς

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15,...

Τὸ σύνολο αὐτὸ εἶναι καὶ τὸ *συμπλήρωμα* τοῦ συνόλου τῶν ζυγῶν τῆς ἀριθμητικῆς ὡς πρὸς τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν, καὶ εἶναι κι αὐτὸ ἰσοδύναμο μὲ τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν! (Ἀντιστοιχία ἕνα πρὸς ἕνα τῶν μονῶν ἀριθμῶν μὲ ὅλους τοὺς φυσικοὺς μπορεῖτε νὰ βρεῖτε καὶ μόνοι σας).

Ἔχουμε λοιπὸν δύο ἀπειροσύνολα συμπληρωματικὰ μεταξύ τους ὡς πρὸς τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν, ποὺ εἶναι καὶ ἰσοδύναμα μαζί του!



κῶν εἶναι ἀπειροσύνολα ἰσοδύναμα μαζί του. Παραδείγματα:

101, 102, 103, 104, 105,...

(ὅλοι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ μετὰ τὸ 100)

1, 101, 201, 301, 401,...

5, 15, 25, 35, 45,...

1, 11, 101, 1001, 10001, 100001,...

Τέτοια παραδείγματα μποροῦμε νὰ φτιάξουμε ὅσα θέλουμε. Προσοχὴ μονάχα στὸ ὅτι *ἕνα σύνολο μὲ 50 δισεκατομμύρια στοιχεῖα δὲν εἶναι ἀπειροσύνολο!* Ἕνα ὑποσύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν γιὰ νὰ εἶναι ἀπειροσύνολο πρέπει νὰ μὴ σταματάει πουθενά, νὰ ξεπερνάει ὁποιονδήποτε ἀριθμό.

Ἀλλὰ γιὰ νὰ βγοῦμε καὶ ἔξω ἀπὸ τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἂς δοῦμε κι ἕνα ἄλλο παράδειγμα:

γ) Τὸ σύνολο ὅλων τῶν «κλασματικῶν μονάδων».

$$\frac{1}{1}=1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \ldots,\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{101},\ \frac{1}{102},\ \ldots$$

εἶναι κι αὐτὸ ἰσοδύναμο μὲ τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Μαντέψετε ποιὰ εἶναι ἡ ἀντιστοιχία;

Ἀπὸ τὰ παραπάνω μπορεῖ νὰ μᾶς γεννηθεῖ τὸ ἐρώτημα:

Ἄραγε ὅλα τὰ ἀπειροσύνολα εἶναι ἰσοδύναμα μὲ τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν; Ἡ ἀπάντηση εἶναι «ὄχι». Ὑπάρχουν ἀπειροσύνολα ποὺ δὲν εἶναι ἰσοδύναμα μὲ τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν. Τὰ ἀπειροσύνολα ἔχουν ἐξερευνηθεῖ καὶ ταξινομηθεῖ ἀπὸ τὸν G. Cantor καὶ τοὺς συνεργάτες του.

3. Τὸ σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν (συμβολίζεται Q).

Τὸ σύνολο Q γιὰ νὰ τὸ φτιάξουμε κάναμε τὰ παρακάτω βήματα. Στὴν α΄ τάξη εἴχαμε ξεκινήσει ἀπὸ τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν:

$$\text{συμβ. } \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots\}.$$

Ὁρίσαμε μεταξὺ τῶν στοιχείων του δύο πράξεις τὴν πρόσθεση καὶ τὸν πολλαπλασιασμό.

Μετὰ κατασκευάσαμε τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων τῆς ἀριθμητικῆς (συμβ. $\mathbb{N}_0$) βάζοντας ἕνα ἀκόμη στοιχεῖο στὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, δηλ. κατασκευάσαμε τὸ σύνολο:

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots\}$$

Μετὰ τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων τῆς ἀριθμητικῆς κατασκευάσαμε τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν βάζοντας σὰν στοιχεῖα του ὅλους τοὺς ἀκεραίους τῆς ἀριθμητικῆς καὶ τοὺς ἀντιθέτους των, δηλ. φτιάξαμε τὸ σύνολο:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -\nu, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots\}$$

Ἀπὸ τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων φτιάξαμε τὸ σύνολο τῶν ρητῶν βάζοντας σὰν στοιχεῖα του τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ μποροῦν νὰ γραφτοῦν μὲ τὴ μορφὴ κλάσματος μὲ ἀκέραιο ἀριθμητὴ καὶ ἀκέραιο$\neq 0$ παρονομαστή. Ἂν πάρουμε ὅλους τοὺς ἀκεραίους καὶ τοὺς γράφουμε τὸν καθένα σὰν κλάσμα βάζοντας του παρονομαστὴ τὴν μονάδα τότε μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι οἱ ἀκέραιοι περιέχονται στὸ σύνολο τῶν ρητῶν.

Π. χ. $3 = \frac{3}{1}$, $438 = \frac{438}{1}$ κλπ.

Δηλαδὴ οἱ ρητοὶ εἶναι εἶναι πιὸ «πλούσιο» σὲ στοιχεῖα σύνολο ἀπὸ τοὺς ἀκεραίους, ὅπως οἱ ἀκέραιοι πιὸ πλούσιο σύνολο ἀπὸ τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς.

Τὰ σύνολα αὐτὰ τὰ φτιάξαμε, ξεκινώντας ἀπὸ τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν, διότι οἱ πράξεις ποὺ ὁρίσαμε στὸ κάθε σύνολο (π. χ. στὸ N ὁρίσαμε πρόσθεση, πολλασιασμὸ καὶ ἀφαίρεση, διαίρεση) δὲν ἔδιναν ἀποτέλεσμα γιὰ κάποια στοιχεῖα τοῦ συνόλου (π. χ. γιὰ τὴν ἀφαίρεση $(+6)-(+8)$ δὲν ἔχουμε στοιχεῖο (ἀριθμὸ) στὸ σύνολο τῶν φυσικῶν).

Ἔτσι γιὰ νὰ μποροῦν οἱ πράξεις νὰ ἔχουν νόημα γιὰ ὅλα τὰ στοιχεῖα (ἀριθμοὺς) τοῦ συνόλου ἐπεκτείναμε κάθε φορὰ τὸ σύνολο, βάζοντας μέσα καὶ τὰ στοιχεῖα (ἀριθμοὺς) ποὺ μᾶς ἔλειπαν καὶ φτιάχναμε ἕνα νέο σύνολο.

Ἐπειδὴ ἡ ἀνάγκη αὐτὴ τῶν ἐπεκτάσεων δὲν φαινότανε ἀμέσως ἀλλὰ μετὰ ἀπὸ καιρό, τὸ κάθε καινούργιο σύνολο ποὺ κατασκευαζότανε ἔτσι ἔπαιρνε καὶ δικό του ὄνομα.

Ἔτσι ἀπὸ τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων Z φτιάξαμε τὸ σύνολο τῶν ρητῶν:

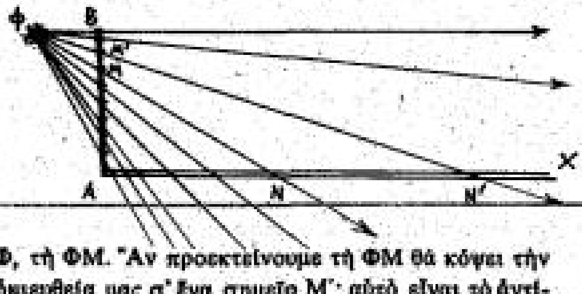
$$Q = \{x \mid x = \frac{\alpha}{\beta},\ \alpha, \beta \in Z,\ \beta \neq 0\},$$

στὸ ὁποῖο δίνουν ἀποτέλεσμα καὶ οἱ τέσσερες πράξεις: πρόσθεση, ἀφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση, μ' ἕναν περιορισμὸ γιὰ τὴν διαίρεση: πρέπει ὁ ἀκέραιος ποὺ θὰ γίνει παρονομαστὴς νὰ μὴν εἶναι μηδέν.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΣΥΝΟΛΑ ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΤΑΞΗΣ

4. Πῶς ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα μπορεῖ νὰ «προβληθεῖ» πάνω σὲ μιὰ ἡμιευθεία, ἔτσι ποὺ σὲ κάθε σημεῖο ποὺ παίρνουμε στὴν ἡμιευθεία νὰ ἀντιστοιχεῖ ἕνα σημεῖο πάνω στὸ εὐθύγραμμο τμῆμα καὶ ἀντίστροφα: σὲ κάθε σημεῖο ποὺ παίρνουμε στὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ἐκτὸς ἀπὸ τὸ ἕνα ἄκρο του νὰ ἀντιστοιχεῖ ἕνα σημεῖο στὴν ἡμιευθεία.

Λύση. Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα AB τὸ βλέπετε «ὄρθιο» πάνω ἀπὸ τὴν ἀρχὴ τῆς ἡμιευθείας AX. «Φωτίζουμε» τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα μ' ἕνα «φῶς» («προβολέα») Φ ποὺ βρίσκεται λίγο πιὸ πίσω ἀπ' τὸ B καὶ στὸ ἴδιο ὕψος (τὸ «φῶς» νὰ τὸ βλέπετε κι αὐτὸ σὰν ἕνα σημεῖο στὸ σχῆμα). Τώρα κάθε σημεῖο M ποὺ σημειώνουμε πάνω στὸ εὐθύγραμμο τμῆμα μᾶς ὁρίζει μιὰ «ἀκτίνα» ποὺ ξεκινάει ἀπ' τὸ

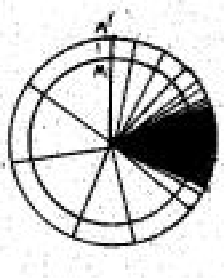


Φ, τὴ ΦΜ. Ἂν προεκτείνουμε τὴ ΦΜ θὰ κόψει τὴν ἡμιευθεία μας σ' ἕνα σημεῖο M'· αὐτὸ εἶναι τὸ ἀντίστοιχο τοῦ M. Ἀντίστροφα, ἂν μᾶς δώσουν ἕνα σημεῖο N' πάνω στὴν ἡμιευθεία, μποροῦμε ἐμεῖς νὰ βροῦμε ποιανοῦ σημείου N πάνω στὸ εὐθύγραμμο τμῆμα εἶναι ἀντίστοιχο τὸ N': Ἀρκεῖ νὰ ἑνώσουμε τὸ Φ μὲ τὸ N' μὲ μιὰ «ἀκτίνα», κι ἐκεῖ ποὺ θὰ κόψει αὐτὴ ἡ ἀκτίνα τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα εἶναι τὸ N.

Μήπως κάτι δὲν πάει καλά; Ἡ τελευταία ἀκτίνα στὸ σχῆμα πρὶν ἀπὸ τὸ B ἀργὰ ἢ γρήγορα θὰ συναντήσει τὴν AX (δὲν μᾶς χωράει νὰ τὸ δείξουμε). Ἀλλὰ γιὰ τὴν ἀκτίνα AB τί λέτε;

5. Στὸ σχῆμα ἔχουμε δυὸ ὁμόκεντρους κύκλους (κύκλους μὲ τὸ ἴδιο κέντρο καὶ διαφορετικὴ ἀκτίνα). Νὰ ἐξετάσετε ἂν τὰ σύνολα τῶν σημείων τῶν δύο κύκλων εἶναι ἰσοδύναμα.

Λύση. Σὲ κάθε σημεῖο M ποὺ παίρνουμε στὸν ἐσωτερικὸ κύκλο ἀντιστοιχεῖ μιὰ μόνο ἀκτίνα. Ἂν αὐτὴ αὐτὴ τὴν ἀκτίνα τὴν προεκτείνουμε θὰ κόψει τὸν ἐξωτερικὸ κύκλο σὲ ἕνα σημεῖο M', ποὺ εἶναι τὸ ἀντίστοιχο τοῦ M.



Ἀντίστροφα, ἂν μᾶς δοθεῖ τὸ M' πάνω στὸ μεγαλύτερο κύκλο τὸ ἑνώνουμε μὲ τὸ κέντρο κι ἐκεῖ ποὺ θὰ κοπεῖ ὁ μικρότερος ἔχουμε τὸ M. Ἔτσι φτιάχνουμε ἀντιστοιχία ἕνα πρὸς ἕνα ἀνάμεσα στὰ δύο σύνολα, γιαυτὸ εἶναι ἰσοδύναμα.

6. Γιὰ τὶς πράξεις ὅπως ξέρουμε ἰσχύουν:

Ὅταν μπροστὰ ἀπὸ μία παρένθεση ὑπάρχει τὸ σημεῖο (+) (ἢ δὲν ὑπάρχει σημεῖο) τότε ἡ παρένθεση μπορεῖ νὰ φύγει χωρὶς νὰ ἀλλάξουν τὰ πρόσημα τῶν ὅρων μέσα σ' αὐτή, ὅταν ἔξω ἀπὸ τὴ παρένθεση ὑπάρχει τὸ πρόσημο (−), τότε ἡ παρένθεση ἂν φύγει ἀλλάζουν τὰ σημεῖα τῶν ὅρων μέσα σ' αὐτή.

Ὅταν μέσα σὲ μιὰ παρένθεση βρίσκονται ἄλλες παρενθέσεις, ἡ πρώτη παρένθεση γράφεται μεγαλύτερη ἢ σὰν ἀγκύλη. Τότε καλύτερα νὰ φύγουν πρῶτα οἱ παρενθέσεις κι' ἔπειτα οἱ ἀγκύλες, ἂν καὶ μποροῦν νὰ φύγουν πρῶτα οἱ ἀγκύλες.

Ὑπολογίστε τὴν ἀριθμητικὴ παράσταση:

$$A \equiv -\left(+\frac{2}{9}-\frac{4}{3}+2\right)+$$
$$+2-7-[+8-5+(+5-2+4)-(+6-1+3)].$$

Λύση. α^{ος} Τρόπος:

$$A \equiv -\frac{2}{9}+\frac{4}{3}-2+$$
$$+2-7-(8-5+5-2+4-6+1-3)$$
$$A \equiv -\frac{2}{9}+\frac{4}{3}-2+$$
$$+2-7-8+5-5+2-4+6-1+3$$

ἢ παραλείποντας τὰ ἀντίθετα,

$$A \equiv -\frac{2}{9}+\frac{4}{3}-7-8+2-4+6-1+3$$
$$A \equiv -\frac{2}{9}+\frac{12}{9}-\frac{63}{9}-\frac{72}{9}+$$
$$+\frac{18}{9}-\frac{36}{9}+\frac{54}{9}-\frac{9}{9}+\frac{27}{9}$$
$$A \equiv +\frac{12}{9}+\frac{18}{9}+\frac{54}{9}+\frac{27}{9}-$$
$$-\frac{2}{9}-\frac{63}{9}-\frac{72}{9}-\frac{36}{9}-\frac{9}{9}$$
$$A = +\frac{111}{9}-\frac{182}{9} \equiv -\frac{71}{9} \quad \boxed{A \equiv -\frac{71}{9}}$$

β^{ος} Τρόπος:

$$A \equiv -\left(\frac{2}{9}-\frac{4}{3}+2\right)+2-7-$$
$$-8+5-(+5-2+4)+(+6-1+3)$$
$$A \equiv -\frac{2}{9}+\frac{4}{3}-2+2-7-8+$$
$$+5-5+2-4+6-1+3$$
$$A \equiv -\frac{2}{9}+\frac{4}{3}-7-8+2-4+6-1+3$$

Κάνουμε τὰ κλάσματα ὁμώνυμα:

$$A \equiv -\frac{2}{9}+\frac{12}{9}-\frac{63}{9}-\frac{72}{9}+$$
$$+\frac{18}{9}-\frac{36}{9}+\frac{54}{9}-\frac{9}{9}+\frac{27}{9}$$
$$A = +\frac{111}{9}-\frac{182}{9} \quad \boxed{A = -\frac{71}{9}}$$

7. **Ἂν** $x = -\frac{22}{33}$, $y = -\frac{7}{11}$, $z = +\frac{5}{3}$,

ὑπολογίστε τοὺς ἀριθμοὺς

$$A = -x+y+z, \quad B = x-y+z, \quad \Gamma = x+y-z,$$
$$\Delta = -x-(y+z).$$

Μετὰ ὑπολογίστε τὸ ἄθροισμα $A+B+\Gamma+\Delta$.

Λύση. Ἀντικαθιστοῦμε τὶς τιμὲς τῶν x, y, z στὶς παραστάσεις A, B, Γ, Δ

$$A = -\left(-\frac{22}{33}\right)+\left(-\frac{7}{11}\right)+\left(+\frac{5}{3}\right)=$$
$$=\frac{22}{33}-\frac{7}{11}+\frac{5}{3}=\frac{22}{33}-\frac{21}{33}+\frac{55}{33}=$$
$$=\frac{77}{33}-\frac{21}{33} \quad \text{ἄρα} \quad \boxed{A=\frac{56}{33}}$$
$$B=\left(-\frac{22}{33}\right)-\left(-\frac{7}{11}\right)+\left(+\frac{5}{3}\right)=$$
$$=-\frac{22}{33}+\frac{7}{11}+\frac{5}{3}=\frac{22}{33}+\frac{55}{33}=$$
$$=\frac{76}{33}-\frac{22}{33}=\frac{54}{33} \quad \text{ἄρα} \quad \boxed{B=\frac{54}{33}}$$
$$\Gamma=\left(-\frac{22}{33}\right)+\left(-\frac{7}{11}\right)-\left(+\frac{5}{3}\right)=$$
$$=-\frac{22}{33}-\frac{7}{11}-\frac{5}{3}=-\frac{22}{33}-\frac{21}{33}-\frac{55}{33}=-\frac{98}{33}$$
$$\text{ἄρα} \quad \boxed{\Gamma=-\frac{98}{33}} \quad \text{καὶ ὅμοια} \quad \boxed{\Delta=-\frac{12}{33}}$$

Ὁπότε $A+B+\Gamma+\Delta=$

$$=\frac{56}{33}+\frac{54}{33}-\frac{98}{33}-\frac{12}{33}=\frac{110}{33}-\frac{110}{33}=0.$$

8. Νὰ βγάλετε τὶς παρενθέσεις καὶ τὶς ἀγκύλες ἀπὸ τὴν παράσταση:

$$\Pi \equiv \left[-\left[-\left(\frac{2}{4}+\frac{1}{8}-\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{7}{8}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\right]-\frac{6}{8}\right]-\left[-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+\frac{3}{8}\right].$$

Λύση. 1η.

$$\Pi \equiv \left[-\left(+\frac{2}{4}-\frac{1}{8}+\frac{5}{2}+\frac{7}{8}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)-\frac{6}{8}\right]-\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\right)$$

$$\Pi \equiv \left(-\frac{2}{4}+\frac{1}{8}-\frac{5}{2}-\frac{7}{8}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-\frac{6}{8}\right)+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{3}{8}$$

$$\Pi \equiv -\frac{2}{4}+\frac{1}{8}-\frac{5}{2}-\frac{7}{8}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-\frac{6}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{3}{8}$$

$$\Pi \equiv -\frac{4}{8}+\frac{1}{8}-\frac{20}{8}-\frac{7}{8}+\frac{12}{8}+\frac{4}{8}-\frac{6}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}-\frac{3}{8}$$

$$\Pi \equiv \frac{20}{8}-\frac{40}{8}=-\frac{20}{8}$$

$$\Pi = -\frac{10}{4}=-2{,}5 \quad \boxed{\Pi \equiv -2{,}5}$$

2η. $$\Pi \equiv -\left[-\left(-\frac{2}{4}+\frac{1}{8}-\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{7}{8}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\right]-\frac{6}{8}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)-\frac{3}{8}$$

$$\Pi \equiv \left(-\frac{2}{4}+\frac{1}{8}-\frac{5}{2}\right)-\left(\frac{7}{8}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)-\frac{6}{8}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)-\frac{3}{8}$$

$$\Pi \equiv -\frac{2}{4}+\frac{1}{8}-\frac{5}{2}-\frac{7}{8}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-\frac{6}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{3}{8} \quad \boxed{\Pi = -2{,}5}$$

9. Νὰ βρῆτε τὶς ἀριθμητικὲς τιμὲς στὶς ἀκόλουθες παραστάσεις:

$A \equiv (x+y)(x-y) \qquad \Gamma \equiv (x-y+z)(x-y+z)$

$B \equiv x\cdot x-y\cdot y \qquad \Delta \equiv x\cdot x+y\cdot y+z\cdot z+2xz-2xy-2yz$

ὅταν $x=1 \quad y=-2 \quad z=3.$

Λύση. Ἀντικαθιστοῦμε τὶς τιμὲς τῶν x, y, z στὶς παραστάσεις Α, Β, Γ, Δ καὶ ἔχουμε:

$$A \equiv (1+(-2))(1-(-2)) = (1-2)\cdot(1+2) =$$
$$= (-1)\cdot(+3) = -3 \quad \boxed{A=-3}$$

$$B \equiv (+1)(+1)-[(-2)(-2)]=1-[+4]=1-4=-3$$
$$\boxed{B=-3}$$

$$\Gamma \equiv (1-(-2)+3)(1-2)+3) =$$
$$= (1+2+3)(1+2+3) = (+6)\cdot(+6) = +36$$
$$\boxed{\Gamma = +36}$$

$$\Delta \equiv (+1)(+1)+(-2)(-2)+(+3)(+3)+$$
$$+2(+1)(+3)-2(+1)(-2)-2(-2)(+3) =$$
$$=(+1)+(+4)+(+9)+2(+3)-2(-2)-2(-6) =$$
$$= 1+4+9+(+6)-(-4)-(-12)$$
$$\Delta \equiv 1+4+9+6+4+12 = +36 \quad \boxed{\Delta = +36}$$

Παρατήρηση. Γιὰ τὶς συγκεκριμένες τιμὲς $x=1$ $y=-2$ $z=3$ οἱ παραστάσεις Α, Β εἶναι ἴσες, καθὼς καὶ οἱ Γ, Δ. Δηλαδή:

$$(x+y)(x-y)=x\cdot x-y\cdot y \quad \text{γιὰ } x=1 \ y=-2 \ \text{καὶ}$$
$$(x-y+z)(x-y+z)=x\cdot x+y\cdot y+z\cdot z+2xz-2xy-2yz$$
$$\text{γιὰ } x=1 \ y=-2. \ z=3.$$

Οἱ ἰσότητες αὐτὲς ὑπάρχουν γιὰ ὅλες τὶς τιμὲς τῶν x, y, z ὅπως θὰ ἐξηγηθεῖ ἀργότερα.

Ὑπενθύμηση. Τὰ γινόμενα καὶ πηλίκα δυὸ ὁμοσήμων ἀριθμῶν εἶναι θετικὰ καὶ δυὸ ἑτεροσήμων ἀρνητικά. Δηλαδή:

(+)·(+)	μᾶς δίνει	+		(+):(+)	μᾶς δίνει	+
(+)·(−)	»	»	−	(+):(−)	»	»	−
(−)·(+)	»	»	−	(−):(+)	»	»	−
(−)·(−)	»	»	+	(−):(−)	»	»	+

10. Νὰ ἐκτελεστοῦν οἱ πράξεις :

$$\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right):\left(3-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{3}{4}\ \frac{1}{2}\right):\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)}.$$

Λύση.

$$\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right):\left(3-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\right):\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\right):\left(\frac{12}{4}-\frac{2}{4}-\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{5}{4}+\frac{2}{4}\right):\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{4}\right)}=$$

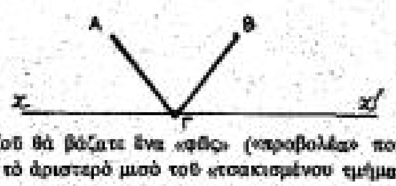
$$=\frac{\left(+\frac{3}{4}\right):\left(+\frac{9}{4}\right)}{\left(+\frac{7}{4}\right):\left(-\frac{1}{4}\right)}=$$

$$=\frac{\left(+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(+\frac{4}{9}\right)}{\left(+\frac{7}{4}\right)\cdot\left(-\frac{4}{1}\right)}=\frac{\left(+\frac{12}{36}\right)}{\left(-\frac{28}{4}\right)}=$$

$$=-\frac{\frac{12}{36}}{\frac{28}{4}}=-\frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{1}}=-\frac{1}{21}.$$

Προτεινόμενες ἀσκήσεις

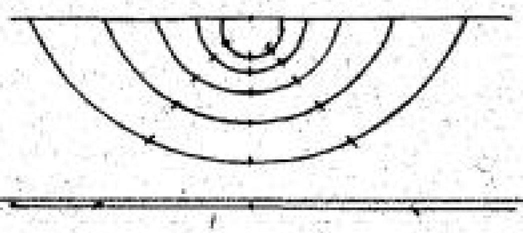
B.1 Στὸ σχῆμα ἔχουμε «τσακίσει στὰ δύο» ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα, μὲ τὴ «μύτη» τοῦ «τσακίσματος» Γ νὰ ἀκουμπάει σὲ μιὰ εὐθεία x'x καὶ τὰ ἄκρα του Α καὶ Β σὲ ἴσες ἀποστάσεις ἀπ' αὐτήν.



Ποῦ θὰ βάζατε ἕνα «φῶς» («προβολέα» ποὺ νὰ προβάλλει τὸ ἀριστερὸ μισὸ τοῦ «τσακισμένου τμήματος» στὴν ἡμιευθεία Γx' καὶ τὸ δεξιὸ μισὸ στὴ Γx, ἔτσι ὥστε τὰ σημεῖα ποὺ παίρνουμε πάνω σ' ὁλόκληρη τὴν εὐθεία καὶ ἐκεῖνα ποὺ παίρνουμε πάνω στὸ «τσακισμένο τμῆμα» νὰ ἀντιστοιχοῦν μεταξύ τους ἕνα μ' ἕνα ; Ὕστερα ἀπ' αὐτὸ τί λέτε : σὲ ποιὸ «χωράνε περισσότερα» σημεῖα : στὴν εὐθεία ὁλόκληρη ἢ σ' ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ;

B.2 Μπορεῖτε νὰ φτιάξετε ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα ἀνάμεσα σὲ μιὰ ὁλόκληρη εὐθεία καὶ σ' ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα, χωρὶς νὰ «τσακίσετε» τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ; Χρησιμοποιεῖστε καὶ δύο «προβολεῖς» ταυτόχρονα.

B.3 Πάνω σὲ κάθε τόξο τοῦ σχήματος, καθὼς καὶ στὴν κάτω ὁριζόντια εὐθεία μποροῦμε νὰ φανταστοῦμε ὅσα σημεῖα θέλουμε (ἄπειρα σημεῖα). Ἐξηγῆστε γιατὶ τὰ ἀπειροσύνολα ποὺ θὰ φτιάξουμε ἔτσι (ἕνα ἀπειροσύνολο σὲ κάθε τόξο) εἶναι μεταξύ τους ἰσοδύναμα.



B.4 Τὸ σύνολο ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ παραπάνω σημάδια :

 κ.τ.λ.

(χωρὶς τέλος) μὲ ποιὰ γνωστά σας ἀπειροσύνολα εἶναι ἰσοδύναμο ;

B.5 Τὸ σύνολο ὅλων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ποὺ εἶναι μικρότεροι τοῦ 10.000,000 (συμβολικὰ τὸ σύνολο :

{x | x φυσικὸς < 10.000.000})

εἶναι ἀπειροσύνολο ἢ ὄχι ; Ἴδιο ἐρώτημα γιὰ τὸ σύνολο :

{x | x ἄρτιος > 20.000.000}.

Εἶναι τὸ τελευταῖο αὐτὸ σύνολο ἰσοδύναμο μὲ τὸ σύνολο ὅλων τῶν φυσικῶν ;

B.6 Νὰ βγάλετε τὶς ἀγκύλες καὶ τὶς παρενθέσεις ἀπὸ τὶς παρακάτω παραστάσεις :

α) $A_1=-\left[-\left[-\left(\frac{1}{3}+2-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)\right]+\right.$

$\left.+6\right]+\left(\frac{11}{3}+2\right).$

β) $B_1=$

$$=\frac{-\left[-\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}+2\right)\right]+\left(6+\frac{1}{2}\right)}{-\left[-\left[\left(\frac{5}{2}+6\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}\right)\right]-\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{2}\right)\right]+\left(\frac{5}{2}+1\right)}$$

B.7 Νὰ βρεῖτε τὶς ἀριθμητικὲς τιμὲς στὶς ἀκόλουθες παραστάσεις :

$A=(x+y)(x+y)-(x-y)(x-y)$

$B=4xy$

$\Gamma=(x+y)(x+y)+(x-y)(x-y)$

$\Delta=2(x\cdot x+y\cdot y)$ ὅταν $x=1$ $y=-2$

Τί παρατηρεῖτε ;

B.8 Νὰ κάμετε τὶς πράξεις :

$(-19)(-11)(-3)(-(-2-0-6)-(1-5-4))$.

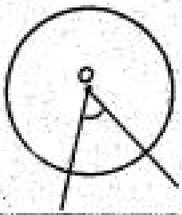
B.9 Νὰ κάμετε τὶς πράξεις :

$$\frac{-\left[-\left(\frac{3}{2}+1\right)-\left(\frac{1}{4}+2\right)\right]-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+4\right):\left(-\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{2}+1\right)-\left[-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\left(\frac{5}{2}\right)-\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)}$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

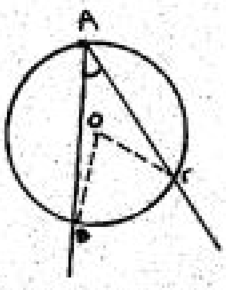
ΕΠΙΚΕΝΤΡΕΣ ΚΙ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

Συνοπτικὴ θεωρία : Γράφουμε κύκλο μὲ κέντρο Ο καὶ ἀκτίνα R. Ἡ γωνία ποὺ ἔχει κορυφὴ τὸ κέντρο Ο λέγεται **ἐπίκεντρη γωνία.**



Τὸ ἄνοιγμα τῆς ἐπίκεντρης γωνίας σὲ μοῖρες εἶναι ὅσο καὶ τὸ ἄνοιγμα τοῦ τόξου, ποὺ περιέχει, σὲ μοῖρες. Τὸ τόξο αὐτὸ τὸ λέμε «ἀντίστοιχο τόξο τῆς ἐπίκεντρης γωνίας».

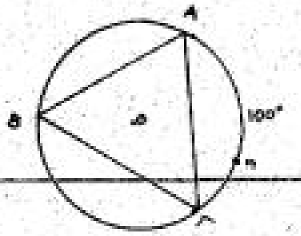
Ἐγγεγραμμένη γωνία λέμε τὴν γωνία ποὺ ἔχει τὴν κορυφή της πάνω στὸν κύκλο καὶ οἱ πλευρές της τὸν κόβουν (τέμνουν).



Τὸ ἄνοιγμα τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας εἶναι ὅσο τὸ μισὸ ἀπὸ τὸ ἄνοιγμα τοῦ τόξου ΒΓ ποὺ περιέχει ἡ γωνία. Ἄρα εἶναι καὶ ἴσο μὲ τὸ μισὸ ἄνοιγμα τῆς ἐπίκεντρης μὲ ἀντίστοιχο τόξο τὸ ΒΓ.

Οἱ ἐπίκεντρες κι' ἐγγεγραμμένες γωνίες μᾶς βοηθᾶνε στὴν ἐπίλυση πολλῶν δύσκολων γεωμετρικῶν προβλημάτων.

1. Ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) εἶναι ἐγγεγραμμένο σὲ κύκλο (O, R) δηλαδὴ οἱ κορυφές του Α, Β, Γ εἶναι πάνω στὸν κύκλο. Ἐὰν τὸ τόξο ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν χορδὴ ΑΓ εἶναι 100°, νὰ ὑπολογιστοῦν οἱ γωνίες τοῦ τριγώνου.



Λύση. Ἡ γωνία Β τοῦ ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένη μὲ ἀντίστοιχο τόξο τὸ ΑηΓ. Ἄρα ἔχουμε :

$$\widehat{B}=\frac{\widehat{A\eta\Gamma}}{2}=\frac{100^0}{2}=50^0.$$

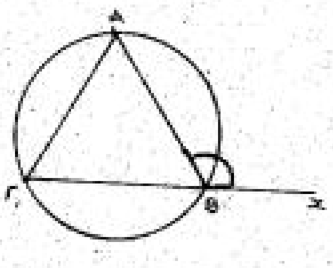
Ἐπειδὴ τὸ ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ βάση ΒΓ, ἔχουμε $\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$, ἄρα $\widehat{\Gamma}=50^0$.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν γωνία Α θὰ προσθέσουμε τὶς γωνίες $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$ καὶ τὸ ἐξαγόμενο θὰ τὸ ἀφαιρέσουμε ἀπὸ 180°. Ἔχουμε λοιπόν :

$$50^0+50^0=100^0 \quad \text{ἄρα} \quad \widehat{A}=180^0-100^0=80^0.$$

Ἄρα : $\widehat{A}=80^0$.

2. Ἔστω τρίγωνο ἐγγεγραμμένο σὲ κύκλο (O, R). Ἐὰν τὸ τόξο ΑΒ ἔχει ἄνοιγμα 120°, τὸ τόξο ΒΓ 80°, πόσες μοῖρες εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ γωνία Β τοῦ ΑΒΓ ;



Λύση. Ἡ γωνία $\widehat{\Gamma}$ τοῦ ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένη μὲ ἀντίστοιχο τόξο τὸ ΑΒ μὲ ἄνοιγμα 120°.

Ἄρα : $\widehat{\Gamma}=\frac{120^0}{2}=60^0.$

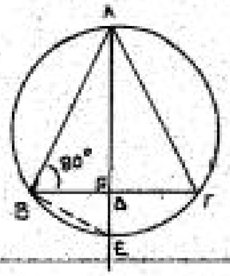
Ἡ γωνία $\widehat{A}$ γιὰ τὸν ἴδιο λόγο εἶναι :

$$\widehat{A} = \frac{80^0}{2} = 40^0.$$

Ζητᾶμε πόσες μοῖρες εἶναι τὸ ἄνοιγμα τῆς γωνίας ΑΒΧ. Ἡ γωνία ΑΒΧ σὰν ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ ΑΒΓ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν 2 ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν Α, Γ.

Ἄρα : $ΑΒΧ = Α + Γ = 40^0 + 60^0 = 100^0$.

3. Τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένο σὲ κύκλο (Ο, R), μὲ τὶς γωνίες Β, Γ ὀξεῖες. Ἔστω ΑΔ τὸ ὕψος του, ποὺ ὅταν τὸ προεκτείνουμε τέμνει τὸ τόξο ΒΓ στὸ Ε. Ἐὰν ἡ γωνία Β ἔχει ἄνοιγμα 80⁰, πόσες μοῖρες εἶναι τὸ ἄνοιγμα τοῦ τόξου ΒΕ ;



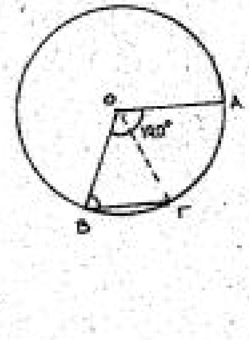
Λύση. Ἂν βροῦμε πόσες μοῖρες εἶναι τὸ ἄνοιγμα τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας ΒΑΕ, τότε τὸ ἀντίστοιχο τόξο της, τὸ ΒΕ ἔχει ἄνοιγμα τῆς γωνίας ΒΑΕ.

Ἀλλὰ ἡ $\widehat{ΒΑΕ}$ εἶναι μιὰ ἀπ' τὶς δυὸ ὀξεῖες γωνίες τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΔΑ. Ἄρα :

$$\widehat{ΒΑΕ} = 90^0 - \widehat{B} \Rightarrow \widehat{ΒΑΕ} = 90^0 - 80^0 \Rightarrow \widehat{ΒΑΕ} = 10^0.$$

Ἄρα : $ΒΕ = 2 \cdot \widehat{ΒΑΕ} = 2 \cdot 10^0 = 20^0$.

4. Ἔστω κύκλος (Ο, R) καὶ $\widehat{ΑΟΒ}$ μιὰ ἐπίκεντρη γωνία μὲ ἄνοιγμα 120⁰. Ἀπὸ τὸ Β φέρνουμε παράλληλη εὐθεία ποὺ τέμνει τὸν κύκλο στὸ Γ. Πόσες μοῖρες εἶναι τὸ ἄνοιγμα καθενὸς τόξου ΑΓ, ΒΓ ;



Λύση. Ἐπειδὴ ΟΑ || ΒΓ ἕπεται ὅτι οἱ γωνίες ΑΟΒ, ΓΒΟ εἶναι παραπληρωματικὲς ὁπότε :

$$\widehat{B} = 180^0 - 120^0 = 60^0, \text{ ἄρα } \widehat{B} = 60^0.$$

Ἂν γνωρίζαμε πόσες μοῖρες ἦταν ἡ ἐπίκεντρη γωνία ΒΟΓ, τότε πόσες μοῖρες θὰ ἦταν καὶ τὸ ΒΓ. Ἂς προσπαθήσουμε νὰ ὑπολογίσουμε τὸ ἄνοιγμα τῆς ἐπίκεντρης γωνίας ΒΟΓ.

Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνο ΒΟΓ εἶναι ἰσοσκελὲς (ἀφοῦ ΟΒ = ΟΓ, ἀκτῖνες), ἔχουμε $\widehat{ΟΓΒ} = 60^0$, ἄρα $\widehat{ΓΟΒ} = 60^0$ ὁπότε εἶναι $\widehat{ΒΓ} = 60^0$. Ἐπειδὴ $\widehat{ΑΟΒ} = 120^0$, τότε $\widehat{ΑΓΒ} = 120^0$. Ἀλλὰ $\widehat{ΒΓ} = 60^0$ ὁπότε :

$$\widehat{ΑΓ} = 120^0 - \widehat{ΒΓ} = 120^0 - 60^0 = 60^0$$

Προτεινόμενες ἀσκήσεις πρὸς λύσιν

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Β.10 Ἔστω κύκλος (Ο, R), μιὰ ἀκτίνα του ΟΑ καὶ ΑΒ μιὰ χορδή του, ἔτσι ποὺ $\widehat{ΟΑΒ} = 40^0$. Γράφω μιὰ ἀκτίνα ΟΓ || ΑΒ. Πόσες μοῖρες εἶναι τὸ ἄνοιγμα τοῦ τόξου ΒΓ ; (Φέρτε τὴν ἀκτίνα ΟΒ ἢ προεκτείνεται τὴν ἀκτίνα ΟΑ)

Β.11 Μᾶς δίνουν ἕνα κύκλο (Κ, R) καὶ μιὰ ἐγγεγραμμένη γωνία $\widehat{ΒΑΓ}$ μὲ ἄνοιγμα 30⁰ ἔτσι ποὺ ἡ διχοτόμος ΑΔ τῆς γωνίας νὰ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου. Φέρνουμε τὶς εὐθεῖες ΚΒ καὶ ΚΓ. Ζητᾶμε νὰ ὑπολογίσουμε τὶς ἐπίκεντρες γωνίες $\widehat{ΒΚΔ}$ καὶ $\widehat{ΒΚΑ}$.

Β.12 Μᾶς δίνουν ἕνα κύκλο (Κ, R) καὶ μιὰ ἐγγεγραμμένη γωνία ΒΑΓ, μὲ ἄνοιγμα 35⁰. Φέρνουμε ἀπὸ τὸ Β τὴν κάθετη στὴν ΑΓ ποὺ τὴν τέμνει στὸ Δ καὶ τὸ τόξο στὸ Ε. Ζητᾶμε πόσες μοῖρες εἶναι τὸ τόξο ΑηΕ.

Β 13 Μᾶς δίνουν ἕνα κύκλο (Κ, R) καὶ μιὰ διάμετρο ΑΚΒ. Σημειώνουμε ἕνα σημεῖο Γ στὸν κύκλο καὶ ζητᾶμε πόσες μοῖρες εἶναι τὸ ἄνοιγμα τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας ΑΓΒ.

Β.14 Μᾶς δίνουν ἕνα κύκλο (Κ, R) καὶ 2 παράλληλες χορδές, ΑΒ, ΓΔ. Ζητᾶμε νὰ συγκριθοῦν τὰ τόξα ΑΔ καὶ ΒΓ ποὺ εἶναι μέσα στὴν ταινία τῶν παραλλήλων χορδῶν. (Φέρτε τὴν ΒΔ ἢ ΑΓ).

Β.15 Μᾶς δίνουν ἕνα κύκλο (Κ, R) καὶ μιὰ ἐγγεγραμμένη γωνία ΒΑΓ. Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας κόβει τὸ τόξο ΒΓ στὸ Δ. Ἰσχυριζόμαστε ὅτι τὸ Δ κόβει τὸ τόξο ΒΓ στὴ μέση. Ἔχουμε δίκιο ;

Β.16 Μᾶς δίνουν ἕνα κύκλο (Κ, R) καὶ μιὰ ἀκτίνα ΚΑ. Φέρνουμε τὴν μεσοκάθετη στὴν ΚΑ ποὺ κόβει τὸν κύκλο στὰ Β, Γ. Νὰ δείξετε ὅτι ΒΚΓ = 120⁰.