Authors: Χ. Κισκύρας, Δ. Χασάπης

Title: Καρτεσιανό γινόμενο

Creator: HDML

Ἀσκήσεις ποὺ προτείνονται γιὰ λύση

Γ.1 Νὰ βρεθεῖ σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου τριγώνου σὲ ἴσες ἀποστάσεις ἀπὸ τὶς κορυφές του.

Γ.2 Νὰ δειχθεῖ ὅτι ἡ διχοτόμος γωνίας τριγώνου σχηματίζει ἴσες γωνίες μὲ τὰ ὕψη τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας αὐτῆς.

Γ.3 Νὰ βρεθεῖ σὲ εὐθεία σημεῖο, ἀπὸ τὸ ὁποῖο νὰ ἄγονται σὲ δύο σημεῖα ἐκτὸς τῆς εὐθείας καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τίς εὐθεῖες μὲ ἴσες γωνίες πρὸς τὴν εὐθεία αὐτή.

Γ.4 Νὰ δειχθεῖ ὅτι ἡ διχοτόμος γωνίας τριγώνου μὲ ἄνισες πλευρὲς διαιρεῖ τὴν ἀπέναντι πλευρὰ σὲ ἄνισα τμήματα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα μικρότερο εἶναι τὸ παρ' τὴν μικρότερη πλευρά.

Γ.5 Νὰ δειχθεῖ ὅτι ἡ διχοτόμος γωνίας τριγώνου εἶναι μικρότερη ἢ ἴση τῆς ἀντίστοιχης διαμέσου.

Γ.6 Νὰ δειχθεῖ ὅτι οἱ ἀποστάσεις ἐσωτερικοῦ σημείου τριγώνου ἀπὸ τίς κορυφές του ἔχουν ἄθροισμα μεγαλύτερο τῆς ἡμιπεριμέτρου καὶ μικρότερο τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου.

Γ.7 Νὰ δειχθεῖ ὅτι οἱ διαγώνιες κάθε τετραπλεύρου ἔχουν ἄθροισμα μικρότερο ἀπὸ τὴν περίμετρό του.

Γ.8 Νὰ δειχθεῖ ὅτι οἱ διάμεσοι κάθε τριγώνου εἶναι πλευρὲς τριγώνου.

Γ.9 Νὰ δειχθεῖ ὅτι ὑπάρχει ἕνα μονάχα τρίγωνο μὲ πλευρὲς τρεῖς ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 3, 4, 7, 10.

Γ.10 Τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελὲς ἂν δύο ἀπὸ τίς μεσοκάθετες ἢ διαμέσου, ἢ διχοτόμους ἢ ὕψη του τέμνονται σὲ σημεῖο μιᾶς εὐθείας τῶν τριῶν ἄλλων εἰδῶν.

ΑΛΓΕΒΡΑ

1. Ζευγάρια

Ὅταν θέλουμε νὰ ἐξηγήσουμε ποὺ μένουμε ἀπαντᾶμε π. χ. «Κολοκοτρώνη 24». Παρατηροῦμε ὅτι εἴμαστε ὑποχρεωμένοι σὲ μιὰ τέτοια ἐρώτηση νὰ ἀπαντᾶμε μὲ δύο στοιχεῖα. Τὸ ἕνα εἶναι τὸ ὄνομα ἑνὸς δρόμου καὶ τὸ ἄλλο ἕνας ἀριθμός.

Εἶναι φανερὸ ὅτι μονάχα μ' αὐτὸ τὸν τρόπο μποροῦμε νὰ προσδιορίσουμε ἀκριβῶς τὴ θέση τοῦ σπιτιοῦ μας, ἐνῶ μὲ μόνο τὸ ὄνομα τοῦ δρόμου ἢ μὲ μόνο τὸν ἀριθμὸ δὲ θὰ μπορούσαμε νὰ τὸ κάνουμε.

Ὅταν θέλουμε πάλι νὰ ἀναφέρουμε κάποιον γνωστό μας λέμε π. χ. «ἡ Ἠλέκτρα Γεωργίου».

Παρατηροῦμε κι' ἐδῶ ὅτι χρειάζονται δύο στοιχεῖα· δηλ. καὶ τὸ ὄνομα καὶ τὸ ἐπώνυμο γιὰ νὰ προσδιορίσουμε τὸν ὁρισμένο ἄνθρωπο.

Σημείωση:

Ἀπὸ τὰ παραδείγματα αὐτὰ φαίνεται ὅτι πολλὲς φορὲς πρέπει νὰ χρησιμοποιήσουμε δύο στοιχεῖα γιὰ νὰ προσδιορίσουμε ἕνα ἀντικείμενο. Μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι τὰ στοιχεῖα αὐτὰ φτιάχνουν ἕνα ζευγάρι.

Ἂς δοῦμε τώρα ἕνα ἄλλο ζευγάρι.

Ἀπ' τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου διαλέγουμε τὸ «α» καὶ τὸ «ν».

Μ' αὐτὰ μποροῦμε νὰ φτιάξουμε τὴ λέξη «ἂν» δηλαδὴ μιὰ λέξη τῆς γλώσσας μας.

Ἂν ὅμως τοποθετήσουμε πρῶτα τὸ «ν» καὶ μετὰ τὸ «α» τότε φτιάχνουμε ἄλλη λέξη: τὴ λέξη «νὰ» ποὺ βέβαια ἔχει ἄλλη σημασία.

Παρατηροῦμε δηλαδὴ ὅτι τὸ ζευγάρι τῶν γραμμάτων (α καὶ ν) φτιάχνει δύο διαφορετικὲς λέξεις ἀνάλογα μὲ τὴ σειρὰ ποὺ θὰ βάλουμε τὰ γράμματα.

Τὸ ἴδιο γίνεται καὶ μὲ τοὺς διψήφιους ἀριθμούς. Ἂν πάρουμε δύο ψηφία π. χ. τὰ (3 καὶ 5), φτάχνουμε τοὺς ἀριθμοὺς 35 καὶ 53 ἀνάλογα πάλι μὲ τὴ σειρὰ τῶν ψηφίων.

Σημείωση:

Στὰ τελευταῖα παραδείγματα βλέπουμε ὅτι ὑπάρχουν ζευγάρια, ποὺ ἔχει σημασία ποιὸ στοιχεῖο θὰ βάλουμε πρῶτο καὶ ποιὸ δεύτερο, γιατὶ στὴν κάθε περίπτωση προσδιορίζουμε καὶ ἄλλο ἀντικείμενο. Αὐτὰ τὰ ζευγάρια τὰ λέμε διαταγμένα.

Ἂς δοῦμε τώρα πῶς μέσα στὴ ζωή μας, πολλὲς φορές, γεννιέται ἡ ἀνάγκη νὰ φτιάξουμε διαταγμένα ζευγάρια.

Ἕναν ποδοσφαιρικὸ ἀγώνα, γιὰ παράδειγμα ἀνάμεσα στὶς ὁμάδες τοῦ Ὀλυμπιακοῦ Πειραιᾶ καὶ τοῦ ΠΑΟΚ Θεσσαλονίκης, τὸν σημειώνουμε γράφοντας τὶς ὁμάδες δίπλα - δίπλα. Μποροῦμε ὅμως ταυτόχρονα μὲ τὸν τρόπο τῆς γραφῆς νὰ δηλώσουμε καὶ τὸν τόπο τῆς συνάντησης.

Ἔτσι ὅταν διαβάζουμε στὶς ἐφημερίδες ὁ ποδοσφαιρικὸς ἀγώνας «Ὀλυμπιακοῦ—ΠΑΟΚ» καταλαβαίνουμε ταυτόχρονα ὅτι ὁ ἀγώνας γίνεται στὸν Πειραιᾶ, ἐνῶ ὅταν διαβάζουμε ὁ ποδοσφαιρικὸς ἀγώνας «ΠΑΟΚ—Ὀλυμπιακοῦ» ὁ ἀγώνας γίνεται στὴ Θεσσαλονίκη.

Ἔχουμε συμφωνήσει δηλαδὴ νὰ γράφουμε πρῶτα τὴν ὁμάδα ποὺ στὴν ἕδρα της γίνεται ὁ ἀγώνας. Οἱ δύο ὁμάδες σχηματίζουν ἕνα ζευγάρι διαταγμένο.

Ἕνα ἄλλο διαταγμένο ζευγάρι ποὺ φτιάχνουμε εἶναι ὅταν θέλουμε νὰ δηλώσουμε μιὰ ἡμερομηνία μέσα σ' ἕνα συγκεκριμένο ἔτος.

Γράφουμε π. χ. «3/5» (τρεῖς πέμπτου) καὶ ἐννοοῦμε «τρεῖς Μαΐου», ἐνῶ τὸ 5/3 (πέντε τρίτου) σημαίνει «πέντε Μαρτίου».

Ἄσκηση 11.

Κοιτάχτε τὸ παρακάτω σχῆμα:

5	Α	Κ	Λ	Υ	Φ
4	Β	Ι	Μ	Τ	Χ
3	Γ	Θ	Ν	Σ	Ψ
2	Δ	Η	Ξ	Ρ	Ω
1	Ε	Ζ	Ο	Π	
	1	2	3	4	5

Σχ. 1

Τὸ κάθε γράμμα μποροῦμε νὰ τὸ παραστήσουμε μὲ ἕνα διαταγμένο ζευγάρι, ἀπὸ ἀριθμούς.

Π. χ. τὸ γράμμα Α τὸ παριστάνουμε μὲ τὸ (1,5) (τὸ (5,1) δὲν παριστάνει κανένα γράμμα).

Μπορεῖτε τώρα νὰ ἀποκρυπτογραφήσετε τὶς παρακάτω λέξεις;

α) (1,1), (3,5), (1,1), (4,5), (2,3), (1,1), (4,2), (2,4), (1,5)

β) (2,4), (4,3), (3,1), (4,4), (2,2), (4,4), (1,5)

γ) (5,5), (2,4), (3,5), (2,4), (1,5).

2. Καρτεσιανὸ γινόμενο

Ἂς πάρουμε τὰ σύνολα:

$$A = \{\alpha, \beta, \gamma\} \quad \text{καὶ} \quad B = \{1, 2\}$$

Μποροῦμε νὰ φτιάξουμε διαταγμένα ζευγάρια παίρνοντας στὸ κάθε ζευγάρι τὸ πρῶτο στοιχεῖο ἀπὸ τὸ σύνολο Α καὶ τὸ δεύτερο ἀπὸ τὸ σύνολο Β.

Ὅλα τὰ ζευγάρια ποὺ μποροῦμε νὰ σχηματίσουμε εἶναι:

$(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, $(\gamma, 1)$, $(\gamma, 2)$.

Τὸ σύνολο αὐτῶν τῶν ζευγαριῶν τὸ λέμε «καρτεσιανὸ γινόμενο» τοῦ συνόλου Α ἐπὶ τὸ Β» καὶ τὸ συμβολίζουμε:

$$A \times B = \{ (\alpha, 1), (\alpha, 2), (\beta, 1), (\beta, 2), (\gamma, 1), (\gamma, 2) \}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἅμα σχηματίσουμε τὸ καρτεσιανὸ γινόμενο τοῦ συνόλου Β ἐπὶ τὸ Α δηλαδὴ ὅλα τὰ ζευγάρια μὲ πρῶτο στοιχεῖο ἀπὸ τὸ Β καὶ δεύτερο ἀπὸ τὸ Α, θὰ ἔχουμε:

$$B \times A = \{(1, \alpha), (1, \beta), (1, \gamma), (2, \alpha), (2, \beta), (2, \gamma)\}$$

Βλέπουμε δηλαδὴ ὅτι τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου $A \times B$ εἶναι διαφορετικὰ ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τοῦ $B \times A$ γιατὶ εἶναι διαταγμένα ζευγάρια. Ἑπομένως καὶ τὰ σύνολα $A \times B$ καὶ $B \times A$ εἶναι διαφορετικά.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α :

Παίρνουμε δύο ζάρια. Ρίχνοντας τὸ καθένα μόνο του μπορεῖ νὰ φέρει τοὺς ἀριθμοὺς 1 ἢ 2 ἢ 3 ἢ 4 ἢ 5 ἢ 6. Δηλαδὴ τὸ σύνολο ὅλων τῶν ἀριθμῶν ποὺ φέρνει τὸ κάθε ζάρι εἶναι:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Ἅμα ρίχνουμε ὅμως καὶ τὰ δύο ζάρια πρῶτα τὸ ἕνα καὶ μετὰ τὸ ἄλλο, θὰ ἔχουμε κάθε φορὰ ἕνα ζευγάρι διαταγμένο.

Ὅλα τὰ ζευγάρια ποὺ μπορεῖ νὰ σχηματιστοῦν εἶναι:

(1,1),	(1,2),	(1,3),	(1,4),	(1,5),	(1,6)
(2,1),	(2,2),	(2,3),	(2,4),	(2,5),	(2,6)
(3,1),	(3,2),	(3,3),	(3,4),	(3,5),	(3,6)
(4,1),	(4,2),	(4,3),	(4,4),	(4,5),	(4,6)
(5,1),	(5,2),	(5,3),	(5,4),	(5,5),	(5,6)
(6,1),	(6,2),	(6,3),	(6,4),	(6,5),	(6,6)

Τὸ σύνολο αὐτὸ εἶναι τὸ καρτεσιανὸ γινόμενο $A \times A$.

Μποροῦμε δηλαδὴ νὰ σχηματίσουμε τὸ καρτεσιανὸ γινόμενο ἑνὸς συνόλου ἐπὶ τὸν ἑαυτό του.

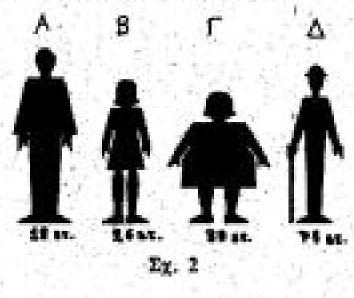
Ἄσκηση 12.

Στὸ ποδοσφαιρικὸ πρωτάθλημα συμμετέχουν 18 ὁμάδες. Βρῆτε τὸ σύνολο τῶν ἀγώνων τους καὶ ἐξετάστε ἂν εἶναι τὸ καρτεσιανὸ γινόμενο τοῦ συνόλου τῶν ὁμάδων ἐπὶ τὸν ἑαυτό του.

3. Διάταξη

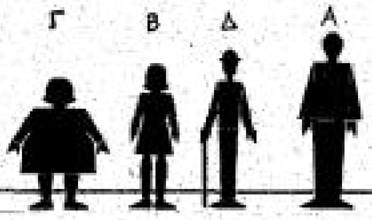
Ἂς παρατηρήσουμε τὶς τρεῖς αὐτὲς εἰκόνες.

Στὴν πρώτη ἔχουμε βάλει ἕνα σύνολο ἀπὸ τέσσερα ἄτομα στὴ σειρὰ ἀνάλογα μὲ τὴν ἡλικία τους ἀρχίζοντας ἀπὸ αὐτὸν ποὺ ἔχει τὴ μικρότερη ἡλικία.



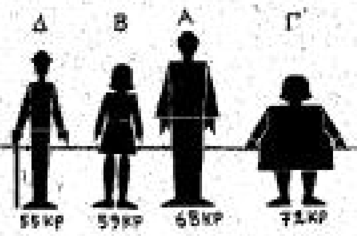
Σχ. 2

Στὴ δεύτερη ἔχουμε βάλει τὰ ἴδια ἄτομα στὴ σειρὰ ἀνάλογα μὲ τὸ **ὕψος** τους ἀρχίζοντας ἀπὸ αὐτὸν ποὺ ἔχει τὸ μικρότερο ὕψος.



Σχ. 3

Στὴν τρίτη εἰκόνα πάλι τὰ ἴδια ἄτομα εἶναι στὴ σειρὰ ἀνάλογα μὲ τὸ **βάρος** τους ἀρχίζοντας ἀπὸ ἐκεῖνον ποὺ ἔχει τὸ μικρότερο βάρος.

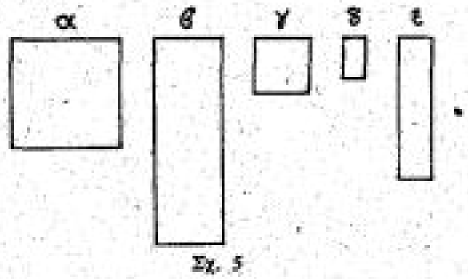


Σχ. 4

Σὲ κάθε μιὰ ἀπὸ αὐτὲς τὶς εἰκόνες ἔχουμε κι' ἀπὸ ἕναν **κανόνα** (ἡλικία, ὕψος, βάρος) μὲ τὸν ὁποῖο βάζουμε τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου μας σὲ μιὰ σειρά. Καὶ ὅπως βλέπουμε γιὰ τοὺς παραπάνω ἀνθρώπους, μὲ διαφορετικὸ κανόνα ἔχουμε καὶ ἄλλη σειρά.

Τὸν κάθε τέτοιο κανόνα τὸν ὀνομάζουμε **διάταξη**.

Ἂς πάρουμε τώρα αὐτὲς τὶς πέντε πλάκες καὶ ἂς προσπαθήσουμε νὰ τοποθετήσουμε τὴ μιὰ πάνω στὴν ἄλλη ἔτσι ποὺ ἡ πάνω νὰ χωράει ὁλόκληρη στὴν κάτω.



Σχ. 5

Μὲ μιὰ γρήγορη ματιὰ καταλαβαίνουμε ὅτι αὐτὸ δὲν μπορεῖ νὰ γίνει γιὰ ὅλα τὰ ζευγάρια ποὺ μποροῦμε νὰ πάρουμε.

Π. χ. οὔτε ἡ «α» χωράει στὴ «β», οὔτε ἡ «β» στὴν «α» ἐνῶ ἡ «γ» χωράει στὴν «α» καὶ στὴ «β» ἡ «ε» χωράει στὴν «β» κ.τ.λ.

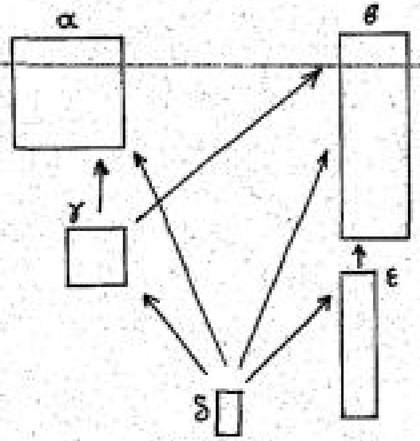
Παρατηροῦμε ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ τοποθετήσουμε τὶς πλάκες σὲ μιὰ σειρὰ ἔτσι ποὺ ἡ κάθε μιὰ νὰ χωράει στὴν ἑπόμενή της ἐνῶ αὐτὸ μπορεῖ νὰ γίνει γιὰ μερικὲς ἀπὸ αὐτές.

Τὸν κανόνα αὐτόν, (ποὺ δὲν μᾶς δίνει τὴ δυνατότητα νὰ τοποθετήσουμε σὲ μιὰ σειρὰ ὅλα τὰ στοιχεῖα παρὰ μονάχα μερικά), τὸν ὀνομάζουμε **μερικὴ διάταξη** ἐνῶ τοὺς κανόνες στὰ προηγούμενα παραδείγματα **ὁλικὴ διάταξη**.

Ἄσκηση 13.

Νὰ σχεδιαστοῦν οἱ πλάκες τοῦ σχήματος «5» μὲ τὸν ἑξῆς τρόπο: ὅταν μιὰ πλάκα χωράει μέσα σὲ μιὰ ἄλλη, αὐτὴ ἡ δεύτερη νὰ σχεδιάζεται στὸ χαρτί μας ψηλότερα ἀπ' τὴν πρώτη καὶ νὰ δείχνουμε μὲ ἕνα βέλος ὅτι ἡ πρώτη χωράει στὴ δεύτερη.

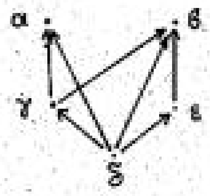
Λύση:



Σχ. 6

Σημείωση 1η.

Ἀντὶ νὰ σχεδιάσουμε ὁλόκληρα τὰ ὀρθογώνια μποροῦμε στὴ θέση τοῦ καθενὸς νὰ βάλουμε ἕνα σημεῖο μὲ τὸ ὄνομά του.



Σχ. 7

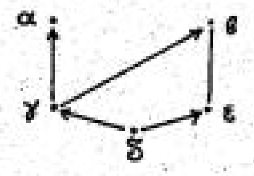
Ἡ παράσταση ποὺ κάνουμε τώρα μὲ σημεῖα καὶ βέλη δὲν χάνει τίποτα σὲ ἀκρίβεια ἀπὸ τὴν παράσταση τοῦ συνόλου μὲ ὀρθογώνια.

Σημείωση 2η.

Μερικὰ βέλη τοῦ παραπάνω σχήματος μποροῦν νὰ παραλειφτοῦν καὶ νὰ ἐννοηθοῦν ἀπ' τὰ ὑπόλοιπα:

Π. χ. τὸ βέλος ἀπὸ τὸ «δ» στὸ «α» δηλώνει ὅτι ἡ πλάκα «δ» χωράει στὴν «α». Ἀλλὰ αὐτὸ μποροῦμε νὰ τὸ καταλάβουμε ἀφοῦ ἡ «δ» χωράει στὴ «γ» καὶ ἡ «γ» στὴν «α». Ὅμοια μποροῦμε νὰ παραλείψουμε τὸ βέλος ἀπὸ τὴ «δ» στὴ «β».

Τότε τὸ σχῆμα γίνεται:



Σχ. 8

Ἐδῶ χρησιμοποιοῦμε τὴν ἑξῆς ἰδιότητα. Ἀπὸ τὸ ὅτι ἡ «δ» χωράει στὴ «γ» καὶ ἡ «γ» στὴ «β» βγαίνει τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ «δ» χωράει στὴ «β».

Ἡ ἰδιότητα αὐτὴ λέγεται **μεταβατικὴ** καὶ τὴ συναντᾶμε σὲ κάθε διάταξη.

Ἄσκηση 14.

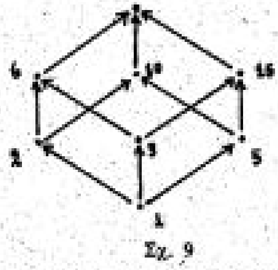
Νὰ παρασταθεῖ τὸ σύνολο:

{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}

μὲ σημεῖα πάνω στὸ χαρτί μας, ἔτσι ποὺ γιὰ κάθε ζευγάρι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ συνόλου μας ποὺ ὁ ἕνας νὰ διαιρεῖ τὸν ἄλλο, αὐτὸς ὁ ἄλλος νὰ σημειώνεται ψηλότερα ἀπὸ τὸ σημεῖο ποὺ παριστάνει τὸν πρῶτο. (Π. χ. ὁ 2 διαιρεῖ δηλ. χωράει ἀκριβῶς στὸν 6 κ.τ.λ.).

Νὰ μποῦν ἀνάμεσα στὰ σημεῖα τὰ λιγότερα δυνατὰ βέλη ποὺ μᾶς ἐξασφαλίζουν ὅτι κάθε φορὰ ποὺ ὁ ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖ ἕναν ἄλλο· μποροῦμε νὰ «ἀνεβοῦμε» ἀπὸ τὸν πρῶτο στὸ δεύτερο μ' ἕνα «μονοπάτι» ἀπὸ τέτοια βέλη.

Λύση:



Σχ. 9

Μπορεῖτε νὰ βρεῖτε ποιὰ βέλη παραλείψαμε;

Ἄσκηση 15.

Ἀπὸ τὰ σπίτια μιᾶς πόλης ὀνομάζουμε:

Κ τὸ σύνολο τῶν σπιτιῶν ποὺ ἔχουν κῆπο
Μ τὸ σύνολο τῶν σπιτιῶν » » μπαλκόνι
Τ » » » » » » τηλεόραση
ΚΜ » » » » » » κῆπο καὶ μπαλκόνι
ΜΤ τὸ σύνολο τῶν σπιτιῶν ποὺ ἔχουν κῆπο καὶ τηλεόραση
ΜΤ τὸ σύνολο τῶν σπιτιῶν ποὺ ἔχουν μπαλκόνι καὶ τηλεόραση
ΚΜΤ τὸ σύνολο τῶν σπιτιῶν ποὺ ἔχουν κῆπο, μπαλκόνι καὶ τηλεόραση

Τέλος ἂς ποῦμε Ε τὸ σύνολο ὅλων τῶν σπιτιῶν τῆς πόλης.

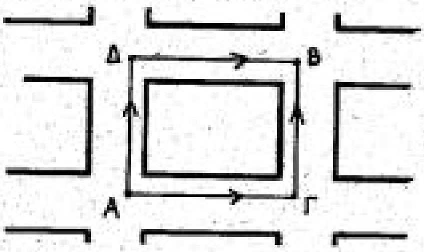
Παραστῆστε τὰ σύνολα αὐτὰ μὲ σημεῖα καὶ βέλη ὅπως στὴν προηγούμενη ἄσκηση. Ἔτσι ποὺ γιὰ κάθε δύο ἀπὸ αὐτὰ ποὺ τὸ πρῶτο εἶναι ὑποσύνολο τοῦ δεύτερου, αὐτὸ τὸ δεύτερο νὰ σημειώνεται ψηλότερα. Νὰ μποῦν ἀνάμεσα στὰ σημεῖα τὰ λιγότερα δυνατὰ βέλη.

Τί παρατηρεῖτε ἀπὸ μία σύγκριση μὲ τὴν προηγούμενη ἄσκηση;

4. Ἰσοδυναμία

α) Τί θὰ κάνουμε ἅμα καεῖ ἡ λάμπα ποὺ φωτίζει τὸ δωμάτιό μας; Ἁπλούστατα θὰ τὴν ἀντικαταστήσουμε μὲ μιὰ ἄλλη ὅμοια καὶ θὰ ἔχουμε πάλι τὸ ἴδιο φῶς.

β) Προσέχτε τὸ παρακάτω σχῆμα.



Σχ. 10

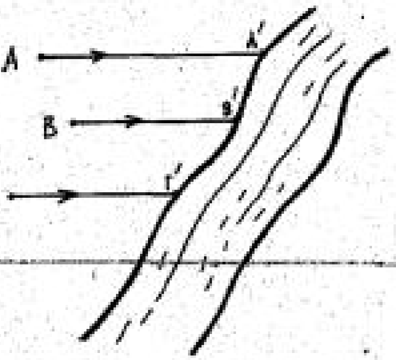
Ἂν κάποιος στέκεται στὸ σημεῖο Α καὶ θέλει νὰ πάει στὸ σημεῖο Β μπορεῖ βέβαια νὰ κάνει τὴ διαδρομὴ ΑΓΒ. Ἀλλὰ καὶ ἡ διαδρομὴ ΑΔΒ ἔχει τὸ ἴδιο μάκρος καὶ ἑπομένως μπορεῖ νὰ ἀντικαταστήσει τὴν ΑΓΒ.

γ) Ὅλοι μας ξέρουμε ὅτι τὰ κλάσματα:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8} \text{ κ.τ.λ.}$$

σημαίνουν τὸ ἴδιο πρᾶγμα: ἀντιπροσωπεύουν τὸ «μισό». Παρόμοια καὶ τὰ $\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \frac{4}{16}$ κ.τ.λ. σημαίνουν τὸ ἴδιο πρᾶγμα: αὐτὰ ἀντιπροσωπεύουν τὸ «τέταρτο» τῆς μονάδας.

δ) Ἂς πάρουμε τώρα μιὰ περίπτωση πιὸ σπάνια. Ἂς ποῦμε ὅτι χανόμαστε σὲ μιὰ ἐκδρομή, ἀλλὰ ξέρουμε ὅτι ἀνατολικά μας ὑπάρχει ἕνα ποτάμι. Τότε τὸ πιὸ ἁπλὸ ποὺ ἔχουμε νὰ κάνουμε εἶναι νὰ βαδίσουμε **ἀνατολικά**, γιατί φτάνοντας στὸ ποτάμι θὰ ὁδηγηθοῦμε σὲ γνωστὸ σημεῖο.



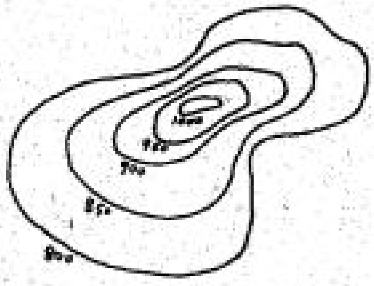
Σχ. 11

Παρατηροῦμε ὅτι σὲ ὁποιο σημεῖο κι' ἂν βρισκόμαστε (στὸ Α ἢ στὸ Β ἢ στὸ Γ κ.τ.λ.), ἀκολουθώντας μιὰ ἀπ' τὶς παράλληλες πορεῖες ΑΑ' ἢ ΒΒ' ἢ ΓΓ', θὰ ἔχουμε τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα: θὰ βρεθοῦμε στὸ ποτάμι.

ε) Κοιτᾶμε τὸ ρολόϊ μας καὶ βλέπουμε τὸν ἀριθμὸ 11. Ἔπειτα ἀπὸ δυὸ ὧρες δὲ θὰ δείχνει 13 ἀλλὰ 1. Τί ἔχει γίνει δηλαδή; Ὁ ἀριθμὸς 1 στὸ ρολόϊ μας ἀντικαθιστᾶ τὸν 13· ὅπως ἐπίσης ὁ 2 τὸν 14 ἢ ὁ 3 τὸν 15 κ.τ.λ.

Ἀπὸ τὰ πιὸ πάνω παραδείγματα βλέπουμε ὅτι στὴ ζωὴ ὑπάρχουν ἀντικείμενα ποὺ ἐνῶ εἶναι διαφορετικά, μπορεῖ νὰ ἀντικαταστήσει τὸ ἕνα τὸ ἄλλο γιὰ μιὰ συγκεκριμένη δουλειά. Αὐτὰ τὰ ἀντικείμενα τὰ λέμε **ἰσοδύναμα** μεταξύ τους.

Κοιτάχτε τὸ παρακάτω σχῆμα. Εἶναι ὁ ὑψομετρικὸς χάρτης μιᾶς ὀρεινῆς περιοχῆς.



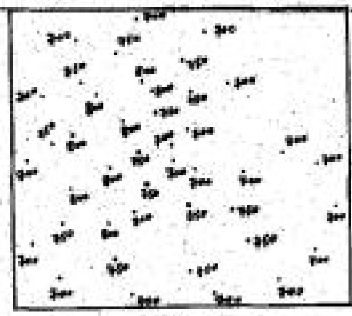
Σχ. 12

Πῶς ἔχει φτιαχτεῖ;

Ἔχουμε συνδέσει ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιοχῆς ποὺ ἔχουν τὸ **ἴδιο** ὕψος μὲ μιὰ κλειστὴ γραμμή, ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ ὕψος 800 m καὶ ἀνὰ 50 m. Τὰ σημεῖα τῆς κάθε μιᾶς γραμμῆς εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ τους ὡς πρὸς τὸ ὕψος ποὺ παριστάνουν καὶ ξεχωρίζουν ἔτσι ἀπὸ τὰ σημεῖα τῶν ἄλλων γραμμῶν.

Ἄσκηση 16.

Στὸ παρακάτω σχῆμα ἔχουμε μετρήσει τὸ ὕψος μερικῶν σημείων σὲ μιὰ περιοχή. Μπορεῖτε νὰ νὰ σχεδιάσετε τὸν ὑψομετρικὸ χάρτη;



Σχ. 13

Ἄσκηση 17

Ἂς πάρουμε τὸ *σύνολο*: Α = {α, β, γ, δ}. Ὑπενθυμίζουμε ὅτι τὰ ὑποσύνολα: {α, β, γ} καὶ {α, γ, δ} εἶναι ἰσοδύναμα, γιατί ἀποτελοῦνται ἀπὸ 3 στοιχεῖα.

Μπορεῖτε νὰ ἀπαντήσετε πόσα ὑποσύνολα καὶ ποιὰ ἔχουμε (ἰσοδύναμα μεταξύ τους):

α) μὲ 4 στοιχεῖα
β) μὲ 3 στοιχεῖα
γ) μὲ 2 στοιχεῖα
δ) μὲ 1 στοιχεῖο.

Ἄσκηση 18

Πῶς μποροῦμε νὰ πάρουμε ὅλα τὰ ἰσοδύναμα ἑνὸς κλάσματος;