Author: Λ. Καπετανάς

Title: Πράξεις με κλασματικές αλγεβρικές παραστάσεις

Creator: HDML

Γ΄ ΤΑΞΗ

Πράξεις με κλασματικές αλγεβρικές παραστάσεις

– Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο αλγεβρ. παραστάσεων

Λ. Καπετανάς

Α. Πρόσθεση – Αφαίρεση κλασμάτων

Αρχίζουμε το άρθρο αυτό με επανάληψη για την πρόσθεση και αφαίρεση αριθμητικών κλασμάτων:

Αν τα κλάσματα είναι ομώνυμα προσθέτουμε ή αφαιρούμε αντιστοίχως τους αριθμητές και παρονομαστή βάζουμε τον ίδιο:

$$\text{π.χ. } \frac{5}{7}+\frac{3}{7}=\frac{8}{7},\ \frac{9}{10}-\frac{4}{10}=\frac{5}{10}$$

Αν τα κλάσματα είναι ετερώνυμα τα μετατρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα και μετά κάνουμε τις πράξεις. Η μετατροπή ετερωνύμων. κλασμάτων σε ομώνυμα γίνεται με την βοήθεια του ελαχίστου κοινού πολλαπλασίου των παρονομαστών

$$\text{π.χ. } \frac{2}{3}+\frac{5}{6}-\frac{1}{12}=\frac{2}{3}+\frac{5}{6}-\frac{1}{12}=$$

$$=\frac{8}{12}+\frac{10}{12}-\frac{1}{12}=\frac{17}{12}$$

Επειδή, λοιπόν, και οι κλασματικές παραστάσεις έχουν νόημα κλασμάτων, οι πράξεις ανάμεσα σ' αυτές γίνονται με ανάλογο τρόπο.

Φαίνεται, λοιπόν, η αναγκαιότητα, να ορίσουμε ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο αλγεβρικών παραστάσεων, το οποίο θα χρησιμοποιούμε για την μετατροπή ετερωνύμων κλασματικών παραστάσεων σε ομώνυμες.

Β. Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο αλγεβρικών παραστάσεων.

Θυμάστε πώς βρίσκουμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δύο ή περισσοτέρων αριθμών; Ας το επαναλάβουμε.

Ζητάμε για παράδειγμα το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 4, 6 και 8 . Δηλαδή θέλουμε να βρούμε το πιο μικρό από τα κοινά πολλαπλάσια των 4, 6 και 8. Άρα ο αριθμός που ζητάμε πρέπει να διαιρείται και με τους τρεις. Αυτό θα συμβαίνει εάν ο αριθμός αυτός μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο που θα περιέχει όλους του παράγοντες των 4, 6 και 8 και μάλιστα μόνο αυτούς, για να είναι ο ελάχιστος από τα κοινά πολ/σια.

Θα αναλύσουμε, λοιπόν, τους αριθμούς αυτούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και στη συνέχεια θα σχηματίσουμε τον αριθμό που έχει παράγοντες τους κοινούς και μη κοινούς παράγοντες των αριθμών αυτών και τον καθ' ένα παράγοντα θα τον πάρουμε με τον μεγαλύτερο εκθέτη, που παρουσιάζεται στις αναλύσεις των αριθμών. Έτσι, λοιπόν, για τους αριθμούς 4, 6 και 8 έχουμε:

$$4=2^2,\ 6=2\cdot3,\ 8=2^3$$

Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των 4, 6 και 8 είναι: Ε.Κ.Π(4, 6, 8) $=3\cdot2^3=3\cdot8=24$

Με ανάλογο τρόπο θα ορίσουμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων.

Έχουμε τις αλγεβρικές παραστάσεις:

$$A=16x^4-x^2,\ B=4x^4+x^3$$

Θέλουμε να βρούμε μια αλγεβρική παράσταση Γ που να διαιρείται και με την Α και με την Β. Άρα πρέπει η Γ να περιέχει οπωσδήποτε όλους τους παράγοντες των Α και Β. Είναι φανερό ότι μπορούμε να βρούμε πολλές τέτοιες αλγεβρικές παραστάσεις. Μας ενδιάφερει, όμως να βρούμε την πιο απλή σε μορφή αλγεβρική παράσταση Γ που να διαιρείται με τις Α και Β. Γι' αυτό, λοιπόν, η Γ πρέπει να περιέχει μόνο τους παράγοντες των Α και Β και μάλιστα τους κοινούς να τους πάρουμε μια φορά. Σε όλους δε τους παράγοντες πρέπει να βάλουμε τον μεγαλύτερο εκθέτη που παρουσιάζεται κατά την ανάλυσή τους σε γινόμενο. Όλα αυτά προϋποθέτουν την ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων των Α και Β. Η ανάλυση αυτή πρέπει να είναι πλήρης, δηλ. να μην προχωρεί άλλο. Τότε μιλάμε για ανάλυση των αλγεβρικών παραστάσεων σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Αναλύουμε, λοιπόν, τις Α και Β σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

$A = 16x^4 - x^2 = x^2(16x^2 - 1) = x^2[(4x)^2 - 1^2] =$
$= x^2(4x+1)(4x-1)$

$B = 4x^4 + x^3 = x^3(4x+1)$

Παίρνουμε την παράσταση $\Gamma = x^3(4x+1)(4x-1)$. Την παράσταση αυτή θα ονομάζουμε ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των Α και Β.

Ανακεφαλαιώνουμε λοιπόν :

Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που τις έχουμε αναλύσει σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, λέγεται το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους, που τον καθένα παράγοντα, τον παίρνουμε με τον μεγαλύτερο εκθέτη που εμφανίζεται στην ανάλυση αυτή.

Ας δούμε ένα ακόμη παράδειγμα. Ζητάμε το ελάχιστο κοινό πολ/σιο των αλγεβρικών παραστάσεων:

$A = 8\alpha^2$, $B = 2(\alpha^2\beta^2 - \alpha^4)$ και
$\Gamma = \alpha\beta^2 - 2\alpha^2\beta + \alpha^3$

Αναλύουμε σε γινόμενο τις παραστάσεις:

$A = 8\alpha^2 = 2^3 \cdot \alpha^2$

$B = 2(\alpha^2\beta^2 - \alpha^4) = 2\alpha^2(\beta^2 - \alpha^2) =$
$= 2\alpha^2(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)$

$\Gamma = \alpha\beta^2 - 2\alpha^2\beta + \alpha^3 = \alpha(\beta^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2) =$
$= \alpha \cdot (\beta-\alpha)^2$

Το Ε.Κ.Π των Α, Β και Γ είναι η παράσταση

$$\Delta = 2^3 \cdot \alpha^2(\beta+\alpha)\cdot(\beta-\alpha)^2$$

Γ. Πρόσθεση – αφαίρεση κλασματικών παραστάσεων.

Είμαστε τώρα έτοιμοι να ασχοληθούμε με την πρόσθεση και αφαίρεση κλασματικών παραστάσεων.

Παράδειγμα 1^{ο}

Θέλουμε να βρούμε το άθροισμα των αλγεβρικών κλασματικών παραστάσεων:

$$A = \frac{\alpha^4 + 2\alpha^2}{\alpha^4\beta^2 + \alpha^2\beta^2} \quad \text{και} \quad B = \frac{1}{\alpha^4\beta^2 + \alpha^2\beta^2}$$

Πρώτα απ' όλα κάνουμε την παραδοχή ότι για όλες τις κλασματικές παραστάσεις που θα χρησιμοποιήσουμε από δω και πέρα οι τιμές των γραμμάτων είναι τέτοιες, ώστε οι παρονομαστές να είναι διαφορετικοί από μηδέν. Οπότε δεν θα ασχολούμαστε με περιορισμούς για τα γράμματα.

Επειδή είναι ομώνυμες κλασμ. παραστάσεις προσθέτουμε όπως και τα ομώνυμα αριθμητικά κλάσματα:

$$A + B = \frac{\alpha^4 + 2\alpha^2}{\alpha^4\beta^2 + \alpha^2\beta^2} + \frac{1}{\alpha^4\beta^2 + \alpha^2\beta^2} =$$

$$= \frac{\alpha^4 + 2\alpha^2 + 1}{\alpha^4\beta^2 + \alpha^2\beta^2} = \frac{\left(\alpha^2+1\right)^2}{\alpha^2\beta^2\left(\alpha^2+1\right)} = \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2\beta^2}$$

Παράδειγμα 2^{ο}

Θέλουμε να βρούμε το άθροισμα:

$$\frac{\alpha}{8\alpha^2 - 2} + \frac{-2\alpha}{4\alpha^2 + 4\alpha + 1}$$

Επειδή οι παραστάσεις είναι ετερώνυμες θα τις μετατρέψουμε σε ομώνυμες, με την βοήθεια του Ε.Κ.Π των παρονομαστών:

$8\alpha^2 - 2 = 2(4\alpha^2 - 1) = 2(2\alpha+1)(2\alpha-1)$

$4\alpha^2 + 4\alpha + 1 = (2\alpha+1)^2$

Ε.Κ.Π $(8\alpha^2 - 2,\ 4\alpha^2 + 4\alpha + 1) = 2(2\alpha+1)^2 \cdot (2\alpha-1)$

Έχουμε, λοιπόν:

$$\frac{\alpha}{8\alpha^2 - 2} + \frac{-2\alpha}{4\alpha^2 + 4\alpha + 1} =$$

$$= \frac{\alpha}{2(2\alpha+1)\cdot(2\alpha-1)} + \frac{-2\alpha}{\left(2\alpha+1\right)^2} =$$

$$= \frac{\alpha(2\alpha+1)}{2\left(2\alpha+1\right)^2\cdot(2\alpha-1)} + \frac{-2\alpha\, 2(2\alpha-1)}{2\left(2\alpha+1\right)^2\cdot(2\alpha-1)} =$$

$$= \frac{2\alpha^2 + \alpha - 8\alpha^2 + 4\alpha}{2\left(2\alpha+1\right)^2\cdot(2\alpha-1)} = \frac{-6\alpha^2 + 5\alpha}{2\left(2\alpha+1\right)^2\cdot(2\alpha-1)} =$$

$$= \frac{\alpha(-6\alpha+5)}{2\left(2\alpha+1\right)^2\cdot(2\alpha-1)}$$

Όπως βλέπετε η διαδικασία μετατροπής των παραστάσεων σε ισοδύναμες με ίδιους παρονομαστές είναι παρόμοια με εκείνη των αριθμητικών κλασμάτων. Δηλ. πολ/ζουμε τους όρους κάθε κλασματικής παράστασης με το πηλίκο του Ε.Κ.Π. των παραστάσεων δια του παρονομαστή της.

Δ. Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση αλγεβρικών κλασματικών παραστάσεων

Θυμάστε πως πολλαπλασιάζουμε και πώς διαιρούμε αριθμητικά κλάσματα; Ο πολ/σμός των κλασμάτων είναι ευκολότερος από την πρόσθεση, γιατί δεν απαιτείται μετατροπή των ετερωνύμων σε ομώνυμα. Πολ/ζουμε αριθμητή με αριθμούς και παρονομαστή με παρονομαστή.

π.χ. $\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}=\frac{4\cdot 6}{5\cdot 7}=\frac{24}{35}$

Η διαίρεση των κλασμάτων μετατρέπεται σε πολλαπλασιασμό του διαιρετέου με τον αντίστροφο του διαιρέτη:

π.χ. $\frac{4}{9}:\frac{2}{3}=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{2}=\frac{4\cdot 3}{9\cdot 2}=\frac{2}{3}$

Ανάλογη διαδικασία ακολουθούμε και για τις αντίστοιχες πράξεις, με τις κλασματικές παραστάσεις, όπως θα φανεί στα παρακάτω παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 1ο
Έχουμε τα κλάσματα

$$A=\frac{9x^2-y^2}{x^3+x^2} \quad \text{και} \quad B=\frac{x^3+1}{3x^2+yx}$$

και θέλουμε να βρούμε το γινόμενό τους.
Έχουμε λοιπόν:

$$A\cdot B=\frac{9x^2-y^2}{x^3+x^2}\cdot\frac{x^3+1}{3x^2+yx}=\frac{\left(9x^2-y^2\right)\left(x^3+1\right)}{\left(x^3+x^2\right)\left(3x^2+yx\right)}=$$

$$=\frac{(3x+y)(3x-y)(x+1)\left(x^2-x+1\right)}{x^2(x+1)\cdot x(3x+y)}=$$

$$=\frac{(3x-y)\left(x^2-x+1\right)}{x^3}$$

Παράδειγμα 2ο

Δίνονται τα κλάσματα: $A=\frac{x^2y+xy^2}{a^2-4}$

$B=\frac{a^2-4a+4}{x^2-y^2}$ και $\Gamma=\frac{x^3-y^3}{a^3-2a^2}$

Θέλουμε να βρούμε το γινόμενο των τριών αυτών παραστάσεων. Ο πολ/σμός γίνεται με τον ίδιο τρόπο, που πολ/ζουμε τρία ή περισσότερα αριθμητικά κλάσματα.

Δηλαδή:

$$A\cdot B\cdot\Gamma=\frac{x^2y+xy^2}{a^2-4}\cdot\frac{a^2-4a+4}{x^2-y^2}\cdot\frac{x^3-y^3}{a^3-2a^2}=$$

$$=\frac{\left(x^2y+xy^2\right)\cdot\left(a^2-4a+4\right)\cdot\left(x^3-y^3\right)}{\left(a^2-4\right)\cdot\left(x^2-y^2\right)\cdot\left(a^3-2a^2\right)}=$$

$$=\frac{xy(x+y)\cdot(a-2)^2(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)}{(a+2)(a-2)\cdot(x-y)(x+y)a^2(a-2)}=$$

$$=\frac{xy\cdot\left(x^2+xy+y^2\right)}{a^2\cdot(a+2)}$$

Παράδειγμα 3ο
Έστω τα κλάσματα:

$$A=\frac{x^2-3x+2}{4x^2-4x+1}, \quad B=\frac{x^2-1}{2x^2-x}$$

Θέλουμε να βρούμε το πηλίκο A : B έχουμε:

$$A:B=\frac{x^2-3x+2}{4x^2-4x+1}:\frac{x^2-1}{2x^2-x}=$$

$$=\frac{x^2-3x+2}{4x^2-4x+1}\cdot\frac{2x^2-x}{x^2-1}=$$

$$=\frac{(x-1)(x-2)}{(2x-1)^2}\cdot\frac{x(2x-1)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{(x-1)(x-2)x(2x-1)}{(2x-1)^2(x-1)(x+1)}=\frac{x(x-2)}{(2x-1)(x+1)}$$

Προτεινόμενες ασκήσεις

Γ22 Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις

(i) $\frac{6a\beta}{9a^2-\beta^2}+\frac{3a}{3a+\beta}+\frac{\beta}{3a-\beta}$

$\left(\textbf{ΑΠ. } \frac{3a+\beta}{3a-\beta}\right)$

(ii) $\frac{4}{4x^2-9y^2}-\frac{1}{2x^2+3yx}$

$\left(\textbf{ΑΠ. } \frac{1}{x(2x-3y)}\right)$

(iii) $\dfrac{4\alpha^2-\beta^2}{(2\alpha-\beta)^2}+\dfrac{4\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{3\left(8\alpha^3-\alpha^3\right)}$

$\left(\textbf{ΑΠ. } \dfrac{6\alpha+3\beta+1}{3(2\alpha-\beta)}\right)$

(iv) $\dfrac{1}{x^2-9}+\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{2x+1}{x+3}$

$\left(\textbf{ΑΠ. } \dfrac{6}{(x-3)(x+3)}\right)$

(v) $\dfrac{x^3-\psi^3}{x^2\psi-x\psi^2}+\dfrac{x^3+\psi^3}{x^2\psi+x\psi^2}$

$\left(\textbf{ΑΠ. } \dfrac{2\left(x^2+\psi^2\right)}{x\psi}\right)$

(vi) $\dfrac{2}{x+5}-\dfrac{6}{x^2-25}+\dfrac{1}{x+5}$

$\left(\textbf{ΑΠ. } \dfrac{3(x-7)}{(x+5)(x-5)}\right)$

(vii) $\dfrac{9x^2-16}{4y^2-12y+9}\cdot\dfrac{4y^2-9}{3x^2-4x}$

$\left(\textbf{ΑΠ. } \dfrac{(3x+4)(2y+3)}{x(2y-3)}\right)$

(viii) $\dfrac{\alpha^3-4\alpha^2}{\alpha^2+4\alpha+3}\cdot\dfrac{\alpha^3+1}{\alpha^3-16\alpha}$

$\left(\textbf{ΑΠ. } \dfrac{\alpha\left(\alpha^2-\alpha+1\right)}{(\alpha+3)(\alpha+4)}\right)$

(ix) $\dfrac{\beta^2-2\beta+4}{\beta^3-\beta^4}\cdot\dfrac{\beta-2\beta^2+\beta^3}{\beta^3+8}\cdot\dfrac{\beta^2+2\beta}{\beta^2-1}$

$\left(\textbf{ΑΠ. } -\dfrac{1}{\beta(\beta+1)}\right)$

(x) $\dfrac{x^2+6x+8}{x^3-10x^2+25x}\cdot\dfrac{x^3-25x}{x^2-16}\cdot\dfrac{x^2-8x+16}{2x^2+10x}$

$\left(\textbf{ΑΠ. } -\dfrac{(x+2)(x-4)}{2x(x-5)}\right)$

*** Γ23** (i) Απλοποιήστε τις παραστάσεις:

$A=\dfrac{y^2-y^3}{4y^2+20y+25}\cdot\dfrac{4y^2-25}{1-y^2}\cdot\dfrac{1}{2y^2-5y}$

$\left(\textbf{Απ. } \dfrac{y}{(2y+5)(1+y)}\right)$

$B=\dfrac{y-1}{4y^2-25}\cdot\dfrac{4y^2-20y+25}{y^2-1}\cdot(y+1)$

$\left(\textbf{Απ. } \dfrac{2y-5}{2y+5}\right)$

(ii) Αν $\Gamma=\dfrac{1}{-2y(y-2)+5}$

να υπολογίσετε την παράσταση: $(A-B)\cdot\Gamma$

$\left(\textbf{ΑΠ. } \dfrac{1}{(2y+5)(y+1)}\right)$

*** Γ24** (i) Απλοποιείστε τα παρακάτω κλάσματα:

$A=\dfrac{(3x+1)^2-(2x+5)^2}{x^2-8x+16}$,

$B=\dfrac{x^3-8}{\left(25x^2+36+60x\right)\left(x^2+2x+4\right)}$

$\Gamma=\dfrac{x^2+1+2x}{\left(25x^2-36\right)(x+1)}$

$\left(\begin{array}{l}\textbf{ΑΠ. } A=\dfrac{5x+6}{x-4},\ B=\dfrac{x-2}{(5x+6)^2},\\ \Gamma=\dfrac{x+1}{(5x+6)(5x-6)}\end{array}\right)$

(ii) Υπολογείστε το $(A\cdot B):\Gamma=\dfrac{(5x-6)(x-2)}{(x+1)(x-4)}$

(iii) Βρείτε για ποιές τιμές του x ισχύει $(A\cdot B):\Gamma=0$

(Απ. x =6/5 ή x = 2)