Author: Β. Πολυδούρης

Title: Ακολουθίες με φυσικούς αριθμούς

Creator: HDML

Ακολουθίες με φυσικούς αριθμούς

Β. Πολυδούρης

Ύστερα απ' όσα είπαμε για την ιδιαίτερη σημασία της πρόσθεσης στην Αριθμητική, τώρα θα αναφερθούμε στην ιδιαίτερα μεγάλη σημασία, που έχει για τον σκεπτόμενο άνθρωπο, η λεγόμενη «ακολουθία των φυσικών αριθμών», δηλαδή:

1, 2, 3, 4, 5, ... 10, 11, 12, ... (κ.λπ.)

Το μικρό παιδί από την πείρα της ζωής του και πριν ακόμα πάει Σχολειό, χωρίς να γνωρίζει την άλφα - βήτα, γνωρίζει όμως τη διαδοχική σειρά των φυσικών αριθμών, ως το -10- ή ως το -20- ή και παραπάνω. Αυτή η γνώση θα βοηθήσει το παιδί να μετρήσει τα **συγκεκριμένα αντικείμενα**. Γιατί έτσι μετριώνται τα αντικείμενα, αρχίζοντας από το 1 και προχωρώντας μια - μια - μονάδα, ως που να φθάσουμε στο τελευταίο αντικείμενο. Οι αριθμοί λοιπόν που χρησιμοποιούμε **δεν είναι ακατάστατοι**, αλλά ο καθένας τους είναι **το τέλος μιας ακολουθίας** που αρχίζει με 1 και προχωρεί ως τον ορισμένο αριθμό, που εκφράζει το πλήθος κάποιων αντικειμένων.

Το νόημα της ακολουθίας των φυσικών αριθμών.

Όταν έχουμε να μετρήσουμε κάποια μολύβια (ας πούμε 5), τα μολύβια αυτά είναι:

1 + 1 + 1 + 1 +1 = 5

Αυτός όμως που μετράει δεν λέει:

ένα, ένα, ένα, ένα, ένα, ίσον πέντε,

αλλά λέει:

ένα, δυο, τρία, τέσσερα, πέντε, και σταματάει.

Νάτη λοιπόν η ακολουθία των φυσικών αριθμών. Ο αριθ. -5- δεν είναι α π ο μ ο ν ω μ έ ν ο ς. Είναι **το τέλος μιας ακολουθίας** φυσικών αριθμών, που αρχίζει με το 1 και φθάνει στο 5. (Αφού 5 είναι τα μολύβια)

Για τη σύγχρονη λοιπόν εποχή, η πρώτη επαφή του νέου ανθρώπου με τους αριθμούς, η πρώτη αυτή γνωριμία του, **αρχίζει με τη γνώση μιας ακολουθίας αριθμών**, γιατί η σειρά των φυσικών αριθμών δεν είναι άλλο, παρά μια ακολουθία αριθμών, αφού ο κάθε αριθμός ακολουθεί κάποιον άλλο. Μέσα απ' αυτή την ακολουθία των φυσικών αριθμών θα ξεπηδήσουν οι καταλληλοι εκείνοι αριθμοί, που θα εκφράζουν κάποια φυσικά πόσα, όπως

5 κιλά πατάτες

14 χιλιόμετρα

8 θρανία κ.λπ.

Η ακολουθία των φυσικών αριθμών, η ατελείωτη (άπειρη) αυτή ακολουθία, που προχωρεί και δεν σταματάει πουθενά

1, 2, 3, 4, 5, ... 10, 11, 12, ... ν, (ν + 1), ...

είναι για τον άνθρωπο **πρωταρχική** και θεμελιώδης γνώση, γιατί μέσα απ' αυτή μαθαίνει να αναγνωρίζει και να εκτιμά το νόημα των αριθμών. Άν έλειπε η γνώση αυτή, δεν θα πετυχαίναμε το νόημα του αριθ. 172 ή του 405. Τώρα διευκολυνόμαστε στη σύλληψη του νοήματος, γιατί αμέσως τους τοποθετούμε μέσα στη **διάταξη** της ακολουθίας των φυσικών αριθμών, κι έτσι αντιλαμβανόμαστε το πλήθος των μονάδων τους.

Η ακολουθία των φυσ. αριθμών στην Ελληνική αρχαιότητα.

Η Ελληνική αρχαιότητα έδειξε ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την Αριθμητική και την Γεωμετρία. Οι εργασίες και οι επινοήσεις της εποχής εκείνης εξακολουθούν να μελετώνται και να θαυμάζονται μέχρι σήμερα. Η ακολουθία των φυσικών αριθμών απετέλεσε πηγή έμπνευσης και πολύ ενοχλεύσε τους **Πυθαγόρειους** (όσους ακολουθούσαν τη Σχολή Πυθαγόρα) και σ' αυτούς οφείλονται πολλές ανακαλύψεις για τις ιδιότητες της ακολουθίας.

Και πρώτα - πρώτα την εχώρισαν σε δυο άλλες, πάλι άπειρες ακολουθίες, δηλαδή **την ακολουθία των αρτίων αριθμών** και **την ακολουθία των**

περιττών αριθμών:

2, 4, 6, 8, 10, 12, ... 2ν ... (άρτιοι αριθμοί) (1)
1, 3, 5, 7, 9, 11, ... (2ν - 1)... (περιττοί αριθμοί) (2)

Μέσα απ' αυτές τις δυο ακολουθίες παρουσιάζεται ένας **γενικός αριθμός**, ο αριθ. **ν**. Ο γενικός αυτός αριθμός **συμβολίζει** την ακολουθία των φυσικών αριθμών, δηλαδή:

ν = 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...10, 11, 12, ...

Με άλλα λόγια, ο αριθμός **ν** φανερώνει το **πώς** η ακολουθία των φυσικών αριθμών περνάει μέσα στην ακολουθία των αρτίων αριθμών (περνάει με το 2ν) και **πώς** η ακολουθία των φυσικών αριθμών περνάει μέσα στην ακολουθία των περιττών αριθμών (περνάει με το (2ν - 1)). Ο αριθμός -2ν- λέγεται γενικά όρος της ακολουθίας των αρτίων και ο αριθμός -(2ν - 1)- λέγεται γενικός όρος της ακολουθίας των περιττών.

Πιο συγκεκριμένα. Ο γενικός όρος **2ν** της ακολουθίας (1) μπορεί να αναπαράγει, όλους τους όρους της ακολουθίας (1), όταν ο αριθ. **ν** διατρέχει τις τιμές [1, 2, 3, 4, ... κλπ. ως το άπειρον] δηλαδή:

$2 \cdot \nu =$	(ο γενικός όρος)
$2 \cdot 1 = 2$	(ο πρώτος όρος)
$2 \cdot 2 = 4$	(ο δεύτερος όρος)
$2 \cdot 3 = 6$	(ο τρίτος όρος)
$2 \cdot 4 = 8$	(ο τέταρτος όρος)
κλπ.	κλπ.

Εδώ παρατηρούμε ότι, όταν **ν** = 1, βρίσκουμε τον πρώτον όρο. Όταν **ν** = 2, βρίσκουμε τον δεύτερο όρο. Όταν **ν** = 3, βρίσκουμε τον τρίτο όρο της ακολουθίας των αρτίων, κλπ., κλπ. Με αυτό τον τρόπο **η ακολουθία των φυσικών** περνάει μέσα **στην ακολουθία των αρτίων**.

Τα ίδια πράγματα παρατηρούνται και στην ακολουθία (2) των περιττών αριθμών. Ο γενικός όρος (2ν – 1) μπορεί να α ν α π α ρ ά γ ε ι όλους τους όρους της ακολουθίας — (2), όταν ο αριθ. ν διατρέχει τις τιμές της ακολουθίας των φυσικών αριθμών, δηλαδή:

$2 \cdot \nu - 1 =$	(ο γενικός όρος)
$2 \cdot 1 - 1 = 1$	(ο πρώτος όρος)
$2 \cdot 2 - 1 = 3$	(ο δεύτερος όρος)
$2 \cdot 3 - 1 = 5$	(ο τρίτος όρος)
$2 \cdot 4 - 1 = 7$	(ο τέταρτος όρος)
κλπ.	κλπ.

Και εδώ παρατηρούμε ότι, δια **ν** = 1 βρίσκουμε τον πρώτον όρο, δια **ν** = 2 βρίσκουμε τον δεύτερον όρο, δια **ν** = 3 βρίσκουμε τον τρίτον όρο και προχωρούμε όσο θέλουμε βρίσκοντας όρους της ακολουθίας των περιττών.

Με τέτοιο τρόπο **η ακολουθία των φυσικών** περνάει μέσα **στην ακολουθία των περιττών**. Η διαδικασία αυτή λέγεται και **απεικόνιση** μιας ορισμένης ακολουθίας, στην ακολουθία των φυσικών αριθμών.

Αξιοπαρατήρητο είναι ότι, **η τάξη** ορισμένου όρου ακολουθίας **συμπίπτει με την τιμή που παίρνει ο "ν"**, για να φτιάξει τον όρον αυτό. Με άλλα λόγια: Ο πρώτος όρος μιας ακολουθίας παράγεται από τον γενικό της όρο, για ν = 1. Ο δεύτερος όρος για ν = 2. Ο τρίτος όρος για ν = 3, κλπ.... ο 12ος όρος για ν = 12, κ.ο.κ.

Τα προβλήματα

Η προηγούμενη περιγραφή των δύο αυτών ακολουθιών (αρτίων και περιττών αριθμών) μας φανερώνει τον τρόπο, για να λύσουμε **δυό ειδών προβλήματα**.

α) Όταν ξέρουμε την τάξη ενός όρου ορισμένης ακολουθίας, να μπορούμε να βρίσκουμε τον όρο αυτό.

β) Όταν ξέρουμε κάποιον όρο ορισμένης ακολουθίας, να μπορούμε να βρίσκουμε την τάξη του.

Φυσικά, για τα προβλήματα η προϋπόθεση είναι, η ακολουθία να είναι ορισμένη, δηλ. να γνωρίζουμε τον γενικό της όρο, όπως γνωρίσαμε προηγούμενα τους γενικούς όρους αρτιών και περιττών.

Παρατήρηση. Αν έχουμε να εργαστούμε με την ακολουθία των φυσικών αριθμών, τα παραπάνω προβλήματα είναι λυμένα και γιαυτό δεν έχουν ενδιαφέρον. Στην ακολουθία των φυσικών αριθμών, **η τάξη του όρου είναι ο ίδιος ο όρος**. Όταν ξέρουμε την τάξη, ξέρουμε τον όρο και όταν ξέρουμε τον όρο, ξέρουμε και την τάξη. Εδώ λοιπόν δεν υπάρχει πρόβλημα. Όμως για άλλες ακολουθίες, όπως είναι η ακολουθία αρτίων και η ακολουθία περιττών, σίγουρα υπάρχουν προβλήματα των δυο προηγουμένων κατηγοριών. Ας δόσουμε λοιπόν κάποια παραδείγματα.

Πρόβλημα (1) "Ο αριθμός 1683 **ποιά τάξη** κατέχει στην ακολουθία των περιττών αριθμών;"

Εδώ πρώτα θα εξακριβώσουμε αν ο αριθ. 1683 είναι περιττός αριθμός. Γιατί, αν ήταν άρτιος θα απαντούσαμε ότι, δεν ανήκει στους περιττούς, άρα δεν κατέχει θέση στην ακολουθία. Επειδή πράγματι είναι περιττός (τελειώνει σε 3), προχωρούμε στη λύση.

Ο γενικός όρος της ακολουθίας είναι (2ν – 1). Εξισώνουμε λοιπόν τον γενικό όρο με τον αριθμό, που δίνει το πρόβλημα, και μετά μένει η επίλυση μιας εξίσωσης πρώτου βαθμού. Δηλαδή:

$$2\nu - 1 = 1683$$
$$2\nu = 1683 + 1$$

$$\nu = \frac{1683 + 1}{2} = 842$$

Ώστε, ο όρος 1683 είναι ο 842ος όρος της ακολουθίας των περιττών αριθμών (Στο πρόβλημα μας έδωσαν τον όρο και βρήκαμε την τάξη του)

Πρόβλημα (2). "Στην ακολουθία των περιττών, **ποιός είναι ο όρος**, που κατέχει τάξη 555;"

Από τις πριν περιγραφές ξέρουμε ότι, η τάξη ενός όρου **συμπίπτει** με την τιμή που έχει ο "ν" στον όρο αυτό. Τον ζητούμενο λοιπόν όρο θα μας τον δώσει ο γενικός όρος της ακολουθίας, αν αντικατασήσουμε τον "ν" με την τάξη του όρου, δηλαδή με την τιμή 555.

Ας ονοματίσουμε τον ζητούμενο αριθμό με Α, και προχωρούμε:

$$A = 2\nu - 1 \text{ [όπου } \nu = 555]$$
$$A = 2 \cdot 555 - 1$$
$$A = 1110 - 1$$

Ώστε: $A = 1109$

Ώστε, ο περιττός αριθμός που είναι 555ος στην ακολουθία των περιττών, είναι ο αριθ. 1.109.

Μια **τρίτη περίπτωση προβλήματων** σχετικών με τις ακολουθίες, είναι να βρίσκουμε **το άθροισμα όρων** μιας ορισμένης ακολουθίας. Σ' αυτή την περίπτωση μπορούμε να περιλάβουμε και την ακολουθία των φυσικών αριθμών, γιατί εδώ η λύση του προβλήματος δεν είναι φανερή, όπως γίνεται για τα προβλήματα των δυο πρώτων ειδών. Ας προχωρήσουμε λοιπόν σ' ένα πρόβλημα.

Πρόβλημα (3). "**Πώς** μπορούμε να βρούμε τ**ο άθροισμα** των πρώτων 85 όρων της ακολουθίας των φυσικών αριθμών;

Εδώ σκεφτόμαστε ότι, οι 85 αυτοί όροι είναι πολλοί αριθμοί και **δεν χωρούν** σε μια γραμμή του κειμένου. Ένας τρόπος παρουσίασης του μεγάλου αυτού αθροίσματος είναι, να παραλείψουμε τους περισσότερους **εσωτερικούς όρους** και να τους αντικαταστήσουμε με αποσιωπητικά (τρεις τελείες...), δηλ.:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + 83 + 84 + 85 \qquad (\alpha)$$

Η εύρεση αυτού του αθροίσματος δεν είναι ακατόρθωτη, πάντως είναι επίπονη. Και αν οι όροι δεν ήταν 85 αλλά 185;

Για τον υπολογισμό λοιπόν του μεγάλου αθροίσματος είναι ανάγκη να καταφύγουμε σε κάποια συντομία, σε κάποια επινόηση. Ας αρχίσουμε λοιπόν να παρατηρούμε προσεκτικά το άθροισμα (α).

- Η πρόσθεση πρέπει νά γίνει με τη σειρά του 1, 2, 3, ... ή μπορούμε και να την αλλάξουμε;
- Και βέβαια μπορούμε να την αλλάξουμε. Τί θα λέγατε λοιπόν, αν παίρναμε έναν όρο απ' την αρχή, κι έναν από το τέλος; Δηλαδή:

$1 + 85 = 86$ και μετά $2 + 84 = 86$
και μετά $3 + 83 = 86$... κλπ.

Αλλά εδώ έγινε μια αποκάλυψη. Βρήκαμε ένα σταθερό αριθμό, τον 86, και αυτός επαναλαμβάνεται **τόσες φορές, όσα είναι τα ζεύγη των αριθμών** του αθροίσματος. Τα ζευγάρια αριθμών είναι $\left[\frac{85}{2}\right]$, δηλαδή 42 και μισό. Αν λοιπόν το ζητούμενο άθροισμα το πούμε Σ τότε:

$$\Sigma = 86 \times \frac{85}{2} = \frac{86 \times 85}{2}$$

ή $\Sigma = 43 \times 85 = 3.655$

Το άθροισμα λοιπόν των 85 πρώτων όρων της ακολουθίας των φυσικών αριθμών είναι ο αριθ. 3655.

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να πάρει γενίκευση και να περιλάβει **οσουςδήποτε προσθετέους**, δηλ. να αρχίζει με 1 και να τελειώνει στον γενικό όρο **– ν**, όπως φαίνεται αμέσως:

$$\Sigma = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (\nu - 1) + \nu \qquad (\beta)$$

Για να υπολογίσουμε αυτό το άθροισμα, **θα κάνουμε ακριβώς τις ίδιες σκέψεις** που κάναμε, όταν υπολογίζαμε το άθροισμα (α). Επαναλαμβάνοντας λοιπόν το προηγούμενο σκεπτικό, θα βρούμε:

$$\Sigma = \frac{(\nu + 1) \cdot \nu}{2} \qquad (\gamma)$$

Το κλάσμα του δευτέρου μέλους **οπωσδήποτε** θα δώσει ακέραιο αποτέλεσμα. Αυτό φαίνεται από τον αριθμητή, όπου παρουσιάζονται δυο παράγοντες, που είναι διαδοχικοί αριθμοί. Έτσι, ο ένας απ' τους δυό θα είναι άρτιος, άρα θα διαιρείται με 2.

Όπως λύσαμε το πρόβλημα υπολογισμού αθροίσματος όρων της ακολουθίας φυσικών αριθμών, μπορούμε να επεκταθούμε και σε προβλήματα αθροίσματος όρων για τις ακολουθίες των αρτίων αριθμών καθώς και των περιττών αριθμών.

Το άπειρον [σύμβολο: ∞]

Η λέξη "**άπειρον**" είναι σύνθετη. Παράγεται από το στερητικόν **α** και τη λέξη **πέρας** (=τέλος). Άπειρον τελικά είναι καθετί, που δεν έχει τέλος, που δεν τελειώνει. Η ακολοθία των φυσικών αριθμών μπορεί να συνεχιστεί χωρίς τελειωμό, άρα είναι μια **άπειρη ακολουθία**.

Η ακολουθία αυτή σε κάθε της βήμα προσθέτει και μια μονάδα [1] στον νέον όρο (π.χ. στο βήμα από 17 στο 18 προσθέτει 1, το ίδιο γίνεται στο βήμα από 18 στο 19 κ.ο.κ).

Επειδή τα βήματα που προχωρεί η ακολουθία είναι ατελείωτα, είναι **άπειρα**, άρα και οι μονάδες που συσσωρεύονται είναι **άπειρες**!

Γιαυτό λέμε ότι, η ακολουθία των φυσικών αριθμών **τείνει προς το άπειρον**, ή ότι, η ακολουθία των φυσικών αριθμών **έχει όριον το άπειρον**. Η έκφραση αυτή σημαίνει ότι, η συσσώρευση μονάδων στους προχωρημένους όρους είναι τέτοια, ώστε **να υπερβαίνει κάθε αριθμό**, οσονδήποτε μεγάλο.

Το ίδιο φαινόμενο παρατηρείται και στις δυο άλλες ακολουθίες που αναφέραμε (των αρτίων και των περιττών) και τούτο γιατί σε κάθε βήμα τους, προσθέτουν στον επόμενο όρο 2 μονάδες, όπως:

2, 4, 6, 8, 10,... 2ν (ακολ. αρτίων).
και 1, 3, 5, 7, 9, ... (2ν–1) (ακολ. περιττών).

Ώστε και γι' αυτές τις ακολουθίες ισχύει ότι, έχουν **όριον άπειρον** ή ότι, **τείνουν προς το άπειρον**.

Εκτός από τις προηγούμενες ακολουθίες οι Πυθαγόρειοι μελέτησαν και άλλες, όπως την ακολουθία των τριγώνων και την ακολουθία των τετραγώνων αριθμών. Και αυτές οι ακολουθίες παράγονται από την ακολουθία των φυσικών. Όλες οι ακολουθίες απεικονίζονται μέσα από στην ακολουθία των φυσικών αριθμών. Μπορούμε λοιπόν να επαναλάβουμε χωρίς επιφύλαξη, μαζί με τον διάσημο **Λεοπόλδο Κρόνεκερ** ότι, «την ακολουθία των φυσικών αριθμών **την έφτιαξε ο Θεός**, όλα τα άλλα τα έφτιαξαν οι άνθρωποι!»

Ιστορικό σημείωμα

Ο Πυθαγόρας υπήρξε μια μεγάλη φυσιογνωμία του αρχαίου ελληνικού κόσμου (580 – 500 π.Χ.), μαθηματικός και φιλόσοφος. Οι πληροφορίες μας γιαυτόν προέρχονται από συγγραφείς που έγραψαν 200 και πλέον χρόνια μετά τον θάνατό του, δεν είναι εξακριβωμένες και προκαλούν ερωτηματικά. Γεννήθηκε στη Σάμο. Από μικρός έδειχνε ιδιαίτερη πνευματικότητα. Εμαθήτευσε σε διάσημους δασκάλους και φιλοσόφους της εποχής, Φερεκύδη, Θαλή, Αναξίμανδρο. Ταξίδεψε στην Αίγυπτο, μεγάλο πνευματικό κέντρο της εποχής, όπου παρέμεινε 22 χρόνια. Εκεί εμυήθη στα θρησκευτικά μυστήρια και έφθασε να γίνει αρχιερέας. Όταν οι Πέρσες κατέλαβαν την Αίγυπτο, ο Πυθαγόρας μεταφέρεται αιχμάλωτος στη Βαβυλώνα. Επειδή κατείχε μεγάλο θρησκευτικό αξίωμα, ήταν ακόμα και μεγάλος γεωμέτρης, το τότε Ιερατείο τον απελευθέρωσε απ' την αιχμαλωσία, κι έτσι ξαναγυρίζει στη Σάμο σε ηλικία 56 ετών. Στη συνέχεια έρχεται στην Ελλάδα και μετά στη Ν. Ιταλία, όπου ιδρύει δική του Σχολή του Κρότωνα. Ο ίδιος ο Πυθαγόρας δεν άφησε γραπτά κείμενα, η διδασκαλία του όμως περνάει στους μαθητές του, τους Πυθαγόρειους, οι οποίοι ήταν πολλοί και αξιόλογοι. Σε παρα πολλές πόλεις της Ελλάδας και της Ν. Ιταλίας λειτούργησαν "Πυθαγόρειες κοινότητες" και μετά τον θάνατο του Πυθαγόρα, επί 100 και πλέον χρόνια.

Στις Σχολές Πυθαγόρα και Πυθαγορείων επικρατούσε πειθαρχία και μεγάλη μυστικότητα, κατά τα πρότυπα των Αιγυπτιακών Ιερατικών Σχολών (τα άδυτα των Ναών). Οι ιδέες που εκαλλιεργούντο ήσαν θρησκευτικές, φιλοσοφικές, αλλά και επιστημονικές, όπως Κοσμολογία, Αστρονομία, Γεωμετρία, Αριθμητική. Αρκεί να θυμηθούμε την Πυθαγόρεια ρήση "Τὸ πᾶν ἀριθμός. Ακόμα, μια μεγάλη προσφορά είναι η απόδειξη του θεωρήματος του ορθογωνίου τριγώνου, που αποδίδεται στον ίδιο τον Πυθαγόρα, όπως αναφέρει ο **Πρόκλος**, συγγραφέας του 5ου αιώνος μ.Χ.

Από τη μυστικότητα που επικρατούσε στις Οργανώσεις των Πυθαγορείων, δεν έγινε μπορετό να μάθουμε, σε ποιούς προσωπικά ανήκουν οι εργασίες. Όσο για τις ακολουθίες με φυσικούς αριθμούς και για τις ιδιότητές τους (όπως άρτιοι, περιττοί, τρίγωνοι, τετράγωνοι, πολύγωνοι και πρώτοι αριθμοί), η μελέτη και οι ιδιότητες σαφώς αποδίδονται στους Πυθαγορείους και από παλαιούς συγγραφείς, αλλά και σύγχρονους ιστορικούς.

Θέματα που προτείνουμε για εξάσκηση

1. Πώς θα δείξουμε ότι, το άθροισμα των φυσικών αριθμών από 1 μέχρι ν είναι:

$$\Sigma = \frac{(\nu + 1) \cdot \nu}{2}$$

2. Πώς θα υπολογίσουμε το άθροισμα από την ακολουθία των φυσικών αριθμών που αρχίζει από τον 11ο όρο και τελειώνει στον 101ο όρο: (δηλ. 11 + 12 + 13 + ... + 100 + 101 = ;)

3. Μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα **των αρτίων** από τον πρώτο ως τον νιοστό όρο της ακολουθίας;

4. Πώς θα υπολογίσουμε το άθροισμα των αρτίων αριθμών της ακολουθίας, που αρχίζει από τον 21ο και τελειώνει στον 99ο όρος της ακολουθίας;

5. Μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα των **περιττών** από τον πρώτο ως το νιοστό όρος της ακολουθίας;

6. Πώς θα υπολογίσουμε το άθροισμα των περιττών αριθμών της ακολουθίας, που αρχίζει από τον 31ο όρο και τελειώνει στον 95ο όρο της ακολουθίας;