Author: Β. Πολυδούρης

Title: Το τριαδικό σύστημα αρίθμησης

Creator: HDML

Το τριαδικό σύστημα αρίθμησης

Β. Πολυδούρης

Παίρνοντας αφορμή απ' το άρθρο του συνάδελφου Γ. Τσάμη, όπου αναφέρει το "τριαδικό σύστημα αρίθμησης", σκεφτήκαμε να δώσουμε στους αναγνώστες–μαθητές τούτο το συμπληρωματικό άρθρο, με σκοπό να βοηθήσουμε να καταλάβουν το νόημα του τριαδικού αυτού συστήματος (όπως λέγεται).

Ο τρόπος που κάνουμε την αρίθμηση, δηλ. το «αριθμητικό σύστημα» δεν είναι πάντοτε ο δεκαδικός τρόπος, αλλά υπάρχουν και άλλα συστήμα αρίθμησης, **μή δεκαδικά**, όπως μας μαθαίνει η Ιστορία και τα αρχαιολογικά ευρήματα.

Όπως ξέρουμε, δεκαδικό σύστημα αρίθμησης είναι εκείνο όπου, **δέκα απλές μονάδες** μας κάνουν **μια δεκάδα** (μονάδα δεύτερης τάξης). **Δέκα δεκάδες** μας κάνουν **μια εκατοντάδα** (μονάδα τρίτης τάξης) και προχωρούμε κατ' αυτόν τον τρόπο για να σχηματίσουμε τη **χιλιάδα** και μετά τις **δέκα χιλιάδες** κλπ., κλπ.

Με άλλα λόγια το δεκαδικό σύστημα στηρίζεται στον αριθμό "10". Κάθε 10 μονάδες σχηματίζουν μια μονάδα της αμέσως ανώτερης τάξης. Ο αριθ. 10 λέγεται και «βάση του συστήματος.»

Όσα είπαμε για το δεκαδικό σύστημα, τα ίδια θα επαναλάβουμε για το **"τριαδικό σύσταμα"** με μόνη διαφορά ότι τώρα, θα στηριχθούμε στον αριθμό "3".

Δηλαδή, **τρεις απλές μονάδες** μας κάνουν **μια τριάδα** (μονάδα δεύτερης τάξης), **τρεις τριάδες** μας κάνουν μιαν **εννιάδα** (μονάδα τρίτης τάξης) και προχωρούμε κατ' αυτόν τον τρόπο. Με άλλα λόγια, όπως έχουμε μονάδες διαφόρων τάξεων στο δεκαδικό σύστημα

$$1, 10, 100, 1000, 10^4, 10^5, \ldots \text{ κλπ.},$$

έτσι έχουμε στο "τριαδικό σύστημα" διαφόρων τάξεων, αλλά, με το **3πλάσιο μιας μονάδας** σχηματίζουμε μιαν **άλλη μονάδα αμέσως ανώτερης τάξης**:

$$1, 3, 9, 27, 3^4, 3^5, 3^6, \ldots \text{ κλπ.}$$

Και τώρα περνάμε στο βαρύ πυροβολικό, δηλαδή στον συμβολισμό του τριαδικούσ συστήματος.

- Με ποιά ψηφία θα γράψουμε τους αριθμούς και τις μονάδες του τριαδικού συστήματος;
- Εδώ θα ακολουθήσουμε τον κανόνα συμβολισμού του γνωστού μας δεκαδικού συστήματος. Στο **δεκαδικό σύστημα** χρησιμοποιούμε δ έ κ α ψηφία, τα γνωστά·

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$$

και αυτά αρκούν για να παρουσιάσουμε όλες τις μονάδες και όλους τους αριθμούς στο σύστημα αυτό.

Στο **τριαδικό** θα χρησιμοποιήσουμε τ ρ ί α μόνο ψηφία, δηλαδή·

$$0, 1, 2$$

και αυτά αρκούν για να εκφράσουμε όλες τις μονάδες και όλους τους αριθμούς στο τριαδικό αυτό σύστημα. Και πρώτα–πρώτα τις μονάδες των διαφόρων τάξεων:

- Το 1 και 2 του δεκαδ., στο τριαδικό με 1 (3) και 2 (3)*
- το 3 του δεκαδ., στο τριαδικό με 10 (3)
- το 9 του δεκαδ, (3^2) στο τριαδικό με 100 (3)
- το 27 του δεκαδ. (3^3), στο τριαδικό με 1000 (3)
- το 81 του δεκαδ. (3^4) στο τριαδικό με 10000 (3) κλπ.

Και τώρα περνάμε στους αριθμούς τους μεταξύ των μονάδων:

Στο δεκαδικό σύστημα		Στο τριαδικό σύστημα
$4 = 3 + 1$	=	$10 + 1 = 11$ (3)
$5 = 3 + 2$	=	$10 + 2 = 12$ (3)
$6 = 3 + 3$	=	$10 + 10 = 20$ (3)
$7 = 6 + 1$	=	$20 + 1 = 21$ (3)
$8 = 6 + 2$	=	$20 + 2 = 22$ (3)
$9 = 8 + 1$	=	$22 + 1 = 100$ (3)
$10 = 9 + 1$	=	$100 + 1 = 101$ (3)
... κλπ.		... κλπ.

* Ο δείκτης (3) σημαίνει στο τριαδικό σύστημα. Αφού 3 μονάδες μας κάνουν μια μονάδα αμέσως ανώτερης τάξης δηλ. 10 (3)στο τριαδικό.

Η πρόσθεση στο τριαδικό:

$$\begin{array}{r} 2\,2\ _{(3)} \\ +\ 1\ _{(3)} \\ \hline 1\,0\,0\ _{(3)} \end{array}$$

Εξήγηση: 2 και 1 ίσον 10, γράφουμε 0 και **ένα** κρατούμενο 1 και 2 πάλι 10, γράφουμε ολόκληρο το 10 κι έτσι έγινε το 100 (3), αλλά στο τ ρ ι α δ ι κ ό σ ύ σ τ η μ α.

Με όσα είπαμε ως τώρα, μπορούμε να κάνουμε μετατροπές ακεραίων αριθμών από δεκαδικό σε τριαδικό και αντίστροφα, από τριαδικό σε δεκαδικό σύστημα. Φυσικά η μετατροπή να δίνει ισοδύναμο αριθμό. **Παραδείγματα**:

1) **Ο αριθμός 56 να μεταφερθεί στο τριαδικό σύστημα.** Για τη μεταφορά αυτή συμβουλεύομαστε τις θεμελιώδεις μονάδες του συστήματος. Ο αριμός 56 περιλαμβάνεται μεταξύ 27 και 81. Τον διαιρούμε λοιπόν με τον μικρότερο του 27 και μετά σχηματίζουμε την ταυτότητα της διαίρεσης:

56	27
−54	2
2	

Και η ταυτότητα: $56 = 27 \times 2 + 2$

Αλλ' όμως γνωρίζουμε τη μεταφορά στο τριαδικό τόσο του 27, όσο και του 2:

$$27 \times 2 + 2 = 1000 \times 2 + 2 = 2002\ _{(3)}$$

2) Η ίδια εργασία να γίνει με τον αριθμό 87:

Διαιρούμε τον 87 με τον 81 και σχηματίζουμε την ταυτότητα της διαίρεσης:

$$87 = 81 \times 1 + 6 = 10.000\ _{(3)} + 20\ _{(3)} = 10.020\ _{(3)}$$

Η μεταφορά αυτή μπορεί να γίνει και με άλλο τρόπο, με μια συνεχή διαίρεση του 87 με 3, ώσπου να προκύψει **πηλίκο μηδέν** [0].

87	3				
27	29	3			
0	2	9	3		
		0	3	3	
			0	1	3
				1	0

Ο αριθμός που ζητούμε σχηματίζεται από τα υπόλοιπα των διαιρέσεων, αρχίζοντας από το τελευταίο [1] και προχωρώντας στο πρώτο υπόλοιπο [0], δηλαδή:

$$10020\ _{(3)}$$

Ξαναβρήκαμε λοιπόν τον αριθμό που είχαμε βρει με την πρώτη μέθοδο,την μέθοδο της π α ρ ε μ β ο λ ή ς ανάμεσα σε δυο θεμελιώδεις μονάδες του συστήματος.

Αλλά και το αντίστροφο πρόβλημα μπορεί να μας απασχολήσει, δηλ. από ένα τριαδικό αριθμό να βρούμε τον ισοδύναμο δεκαδικό.

Αυτά ως εδώ αφορούν τους ακεραίους. Αν όμως έχουμε ένα κλάσμα, π.χ. $\frac{1}{4}$, μπορούμε να το μεταφέρουμε στο τριαδικό σύστημα;

Εδώ πολύ θα βοηθήσει **η διαίρεση του αριθμητή με τον παρονομαστή**, που ως γνωστό μας δίνει ένα ισοδύναμο δεκαδικό αριθμό (φυσικά κλασματικό δεκαδικό αριθμό).

Ας αρχίσουμε λοιπόν με τη διαίρεση [1 : 4].

1,00	4
10	0,25
−8	
20	
−20	
0	

Εξήγηση: Το 4 στο 1 δεν χωράει γιαυτό γράψαμε μηδέν στο πηλίκον. Για να συνεχίσουμε τη διαίρεση κατεβάσαμε το πρώτο 0 κι έτσι σχηματίστηκε διαιρετέος ο αριθ. 10.

Αλλά, το κατέβασμα του 0 στην ουσία είναι **πολ/μός με το 10**, δηλ. **με τη βάση του δεκαδικού συστήματος**.

Στη συνέχεια βρήκαμε υπόλοιπο 2, κατεβάσαμε το δεύτερο μηδέν, κι έτσι σχηματίστηκε το 20. Αλλά στην ουσία εκτελέστηκε ένας πολ/μός: $2 \times 10 = 20$ δηλ. πολ/σαμε πάλι με τη βάση του συστήματος.

Προέκυψε λοιπόν ο αριθμός 0,25 που φυσικά είναι ισοδύναμος με το κλάσμα $\frac{1}{4}$.

Αν όμως θέλαμε να βρούμε πηλίκο, **όχι στο δεκαδικό αλλά στο τριαδικό σύστημα**, αντί με το κατέβασμα του μηδέν, να πολ/ζουμε με 10, θα πρέπει να πολ/ζουμε τα αντίστοιχα υπόλοιπα με 3, δηλ. τη **βάση του τριαδικού**.

Και για να μη το ξεχνάμε, τοποθετούμε μέσα στο 0 ένα μικρό 3. Προχωρούμε λοιπόν:

1, (3) (3) (3) (3) (3)	4
1 x 3	0,0202...
3 x 3	
9	
− 8	
1 x 3	(α)
3 x 3	
9	
− 8	
1	

Η διαίρεση αυτή **δεν τελειώνει ποτέ** και μας δίνει ένα πηλίκο που είναι ισοδύναμο με το δεκαδικό κλάσμα $\frac{1}{4}$, αλλά το πηλίκο ανήκει στο τριαδικό σύστημα:

$$\frac{1}{4} = 0{,}0202\ldots_{(3)}$$

Η παραπάνω εργασία μας θυμίζει τους **δεκαδικούς περιοδικούς αριθμούς**. Εδώ όμως προέκυψε **τριαδικός περιοδικός αριθμός**. Το ίδιο αυτό αποτέλεσμα βρίσκει και ο συνάδελφος Γ. Τσάμης, αλλά με άλλο τρόπο.

Αν θέλουμε να βεβαιωθούμε ότι ο αριθ. "0,0202..." ανήκει στο τριαδικό σύστημα, μπορούμε να σχηματίσουμε την ταυτότητα της διαίρεσης (α) και ολόκληρη να την μεταφέρουμε στο τριαδικό σύστημα:

$$1 = 4 \times (0{,}0202) + 0{,}0001 \qquad (\beta)$$

Οι αριθμοί 1 και 2 μεταφερόμενοι στο 3δικό σύστημα μένουν αμετάβλητοι. Ο αριθ. 4 στο 3δικό γίνεται 11. Και τη ταυτότητα (β) θα γίνει:

$$1 = 11 \times (0{,}0202) + 0{,}0001 \qquad (\gamma)$$

Εκτελούμε τον πολ/μο στο δεύτερο μέλος:

$$1 = 0{,}2222 + 0{,}0001 \qquad (\delta)$$

Εκτελούμε και την πρόσθεση στο δεύτερο μέλος:

$$\begin{array}{r} 0{,}2222 \\ +\ \ 1 \\ \hline 1{,}0000 \end{array}$$

Δηλαδή: 2 και 1 ίσον 10, γράφουμε 0 και 1 κρατούμενο. 1 και 2 ίσον, πάλι γράφουμε 0 και 1 κρατούμενο. Συνεχίζουμε ως το τέλος την πρόσθεση και προκύπτει άθροισμα αριθ. 1, που είναι ίσος με το πρώτο μέλος. Άρα ο αριθμός "0,0202..." ανήκει στο τριαδικο σύστημα.

Όλα όσα είπαμε προηγούμενα περιγράφοντας, το 3δικό σύστημα αρίθμησης, μπορούν να προεκταθούν και σε άλλες βάσεις εκτός του 3 και να έχουμε συστήματα όπως 4δικό, 5δικό, 6δικό κ.ά. Οι αριθμοί θα αλλάζουν αλλά οι διαδικασίες θα είναι οι ίδιες.

Εννοείται ότι, όλα αυτά τα συστήματα ακολουθούν το τρέχον 10δικό σύστημα και απ' αυτό παίρνουν και τα ψηφία και την χρήση του μηδέν [0] για τον σχηματισμό των θεμελιωδών μονάδων τους κάθε συστήματος. Το παραπάνω 3δικό σύστημα που περιγράψαμε, καθώς και άλλα όμοια προς αυτό, είναι σύγχρονες κατασκευές απλοποιημένες που στηρίζονται στο 10δικό σύστημα. Τα ιστορικά αριθμητικά συστήματα είναι διαφορετικά. Έχουν δικό τους συμβολισμό και δεν έχουν σύμβολο για το μηδέν, όπως το Ιερογλυφικό Αιγυπτιακό και το σφηνοειδές Βαβυλωνιακό σύστημα. Με αυτά θα ασχοληθούμε κάποιαν άλλη φορά.

Θέματα εξάσκησης

1. Ας πούμε πως βρισκόμαστε στο 4δικό αριθμητικό σύστημα. Ποιές θα είναι οι 5 πρώτες θεμελιώδεις μονάδες και ποιός ο συμβολισμός τους;

2. Πώς θα εκφράσουμε στο 4δικό σύστημα τους αριθμούς του 10δικού από 1 ως τον 12;

3. Ποιά ψηφία χρησιμοποιεί το 4δικό σύστημα για να εκφράσει τους αριθμούς;

4. Πώς θα μεταφέρουμε στο 4δικό σύστημα τους ακέραιους δεκαδικούς αριθμούς 15, 25, 35;

5. Πώς θα μεταφέρουμε στο 4δικό σύστημα τους κλασματικούς δεκαδικούς $\frac{2}{5}$ και $\frac{4}{5}$;

$$\left[\frac{2}{5} = 0{,}1212\ldots_{(4)} \text{ και } \frac{4}{5} = 0{,}3030\ldots_{(4)}\right]$$

♦