Author: Γ. Π. Τσάμη

Title: Μέτρηση στα κλάσματα

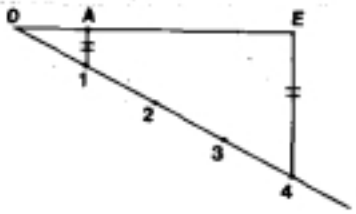
Creator: HDML

Μέτρηση στα κλάσματα

Γ. Π. Τσάμη

Ι) Τα κλάσματα $\frac{1}{4}$ και $\frac{1}{3}$ ορίζουν και τα δύο, με την ίδια σαφήνεια τους αριθμούς που αντίστοιχα συμβολίζουν (: εκφράζουν)

α) Για **τον αριθμό** $\frac{1}{4}$ (Σχ. 1)



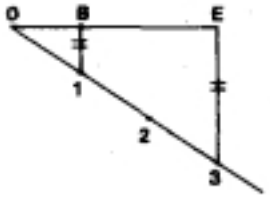
(Σχ. 1)

Σύμφωνα με τον **Θαλή** παίρνουμε ένα τμήμα 0Ε, (για μονάδα μήκους) και από το 0 φέρουμε μια ευθεία 0 (δ) πάνω στην οποία παίρνουμε διαδοχικά **τέσσερα** ίσα τμήματα 01 = 12 = 23 = 34 (τυχόντος μήκους). Ενώνουμε τα σημεία 4, Ε και από το 1 φέρουμε **την παράλληλο** 1Α προς την 4Ε.

Από τον Θαλή έχουμε: $\frac{OA}{OE} = \frac{01}{04} = \frac{1}{4}$.

Ο αριθμός $\boxed{\frac{1}{4} = \frac{OA}{OE}}$ δίνει με μονάδα το ΟΕ το μέγεθος $OA = \frac{1}{4}$ OE.

β) Για τον **αριθμό** $\frac{1}{3}$ (Σχ. 2)



(Σχ. 2)

Με την **ίδια μονάδα μήκους ΟΕ** και με την ίδια εργασία: παίρνουμε πάνω στην ευθεία Ο (ε) τα 01 = 12 = 23 και με την 1Β//3Ε ορίζει ο **Θαλής** τον αριθμό $\boxed{\frac{1}{3} = \frac{OB}{OE}}$ και το μέγεθος $OB = \frac{1}{3}$ OE

ΙΙ) Αν κάνουμε την μέτρηση των αριθμών $\frac{1}{4}$ και $\frac{1}{3}$ στο γνωστό μας δεκαδικό σύστημα μέτρησης τότε:

$\frac{1}{4} = 0{,}25$ (Κλειστός δεκαδικός)

$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ (απέραντος περιοδικός δεκαδικός)

Η μέτρηση αυτή με το 10 κάνει τον **ακριβή αριθμό** $\frac{1}{3}$ να μη τελειώνει (όπως λέγεται) και να φαίνεται ότι μειονεκτεί ως προς τον επίσης **ακριβή αριθμό** $\frac{1}{4}$ ο οποίος τελειώνει.

Ας δούμε όμως τι συμβαίνει αν κάνουμε τη μέτρηση και των δυο αριθμών όχι "στο δεκαδικό σύστημα" αλλά στο "**τριαδικό σύστημα**" όπως λέγεται.

Η εργασία όπως θα δούμε **δεν γίνεται μηχανιστικά** αλλά με τα **σωστά βήματα που ισχύουν** και για το "δεκαδικό σύστημα" και **είναι γνωστά μας**.

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε **αναλυτικά**:

α) **Για τον αριθμό** $\frac{1}{4}$

Είναι: $\frac{1}{4} \underset{(\text{Βήμα})}{=} \frac{\frac{1}{4}\cdot 3}{3} = \frac{\frac{3}{4}}{3} = \frac{0+\frac{3}{4}}{3} = \frac{0}{3} + \frac{\frac{3}{4}}{3} \underset{(\text{Βήμα})}{=}$

$\frac{0}{3} + \frac{\frac{3}{4}\cdot 3}{3^2} = \frac{0}{3} + \frac{\frac{9}{4}}{3^2} = \frac{0}{3} + \frac{2+\frac{1}{4}}{3^2} = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{\frac{1}{4}}{3^2}$

$\underset{(\text{Βήμα})}{=} \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{\frac{1}{4}\cdot 3}{3^3} = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{\frac{3}{4}}{3^3} =$

$= \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{0+\frac{3}{4}}{3^3} = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{\frac{3}{4}}{3^3} =$

$$\overset{(\delta\varepsilon)}{=}_{(\theta\acute{\iota}\mu\alpha)} \frac{0}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{0}{3^3}+\frac{\frac{3}{4}\cdot 3}{3^4}=\frac{0}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{0}{3^3}+\frac{\frac{9}{4}}{3^4}=$$

$$=\frac{0}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{0}{3^3}+\frac{2+\frac{1}{4}}{3^4}=\frac{0}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{0}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\frac{\frac{1}{4}}{3^4}=$$

$$=\text{(και έτσι συνέχεια)}=\frac{0}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{0}{3^2}+\frac{2}{3^4}+\ldots=$$

όπως γράφεται = «$0.020202\ldots$»$_{(3)}$
που είναι **απεράντως περιοδικός** του συστήματος 3

β) **Για τον αριθμό** $\frac{1}{3}$

Εδώ τα πράγματα γίνονται απλά και είναι απ' ευθείας: $\frac{1}{3}$ «$0.1_{(3)}$» που είναι κλειστός αριθμός του **τριαδικού** (όπως λέγεται) συστήματος

ΙΙ) Το **συμπέρασμα είναι** ότι: Τα κλάσματα $\frac{1}{4}$ και $\frac{1}{3}$ όταν μετρούνται σε ένα οιοδήποτε σύστημα αρίθμησης αναπτύσσονται (εκφράζονται) πάντοτε ή σε **κλειστή** μορφή ή **απέραντη περιοδική του συστήματος** και **είναι** (χωρίς να λείπει τίποτε) **ακριβώς** οι ίδιοι (**καλά ορισμένοι**) αριθμοί $\frac{1}{4}$ και $\frac{1}{3}$

Έτσι: $\frac{1}{4}$ = «$0.25_{(10)}$» = «$0.020202\ldots_{(3)}$»

και αντίστροφα:

«$0.25_{(10)}$» = «$0.020202\ldots_{(3)}$» = $\frac{1}{4}$

Επίσης: Ο $\frac{1}{3}$ = «$0.333\ldots_{(10)}$» = «$0.1_{(3)}$»

και αντίστροφα:

«$0.333\ldots_{(10)}$» = «$0.1_{(3)}$» = $\frac{1}{3}$

Εφαρμογή

Να βρεθεί πόσα τρίτα έχει ο αριθμός $\frac{5}{7}$ και να προσεγγίσει σε τρίτα:

Λύση

Είναι διαδοχικά:

$$\frac{5}{7}=\frac{\frac{5}{7}\cdot 3}{3}=\frac{\frac{15}{7}}{3}=\frac{2+\frac{1}{7}}{3}=\frac{2}{3}+\frac{\frac{1}{7}}{3}$$

ώστε $\frac{5}{7}=\frac{2}{3}+\frac{\frac{1}{7}(<1)}{3}$

(Το υπόλοιπο είναι $\frac{1}{7}$ του 3)

Έτσι η διάταξη είναι:

$$\frac{2}{3}<\frac{5}{7}<\frac{3}{3}=1$$

Γιάννη Ηλιόπουλου ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΝΕΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΠΑΥΞΗΜΕΝΕΣ, ΕΚΣΥΓΧΡΟΝΙΣΜΕΝΕΣ ΒΕΛΤΙΩΜΕΝΕΣ

- Προσαρμογή στις απαιτήσεις του Γυμνασίου, πρωτοτυπία και αφθονία παραδειγμάτων, απλότητα γλώσσας, πληθώρα ασκήσεων, επαναλήψεις σε κάθε κεφάλαιο.
- Τα βιβλία που φανερώνουν πόσο προσιτό και χρήσιμο μάθημα είναι τα Μαθηματικά.

Γιάννης Ηλιόπουλος, Μπάλογλου 5
(546 29) Θεσσαλονίκη, Τηλ. 524.987 - 524.320

Για καθηγητές έκπτωση **35%**