Author: Σ. Τσικοπούλου

Title: Το Πυθαγόρειο θεώρημα

Creator: HDML

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα

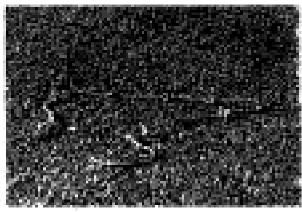
Τσικοπούλου Σ.

Είναι εύκολο να σχεδιάσουμε πάνω σ' ένα φύλλο χαρτί ένα ορθογώνιο τρίγωνο με τη βοήθεια του χάρακα και του διαβήτη ή ακόμα και με το γνωστό μας "τρίγωνο".

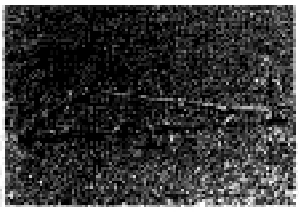
Αλλά το να χαράξουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο πάνω στο έδαφος δεν είναι και τόσο εύκολο αφού κανένα από τα γνωστά μας γεωμετρικά όργανα δεν μπορεί να μας βοηθήσει να χαράξουμε την ορθή του γωνία.

Το πρόβλημα της χάραξης της ορθής γωνίας παρουσιάστηκε πολύ νωρίς στην ιστορία της ανθρωπότητας. Το αντιμετώπιζαν, για παράδειγμα, στην αρχαία Αίγυπτο όταν προσπαθούσαν να κατασκευάσουν τη βάση της τετραγωνικής πυραμίδας περίπου το 2.900 π.Χ.

Για την χάραξη στο έδαφος μιας ορθής γωνίας χρησιμοποιούσαν ένα σκοινί μήκους 12 μονάδων (στην αρχαιότητα δεν χρησιμοποιούσαν το μέτρο σαν μονάδα μέτρησης του μήκους) υποδιαιρεμένο με κόμπους σε κομμάτια των 3,4 και 5 μονάδων. Με δυο πασσάλους στερέωναν τεντωμένο το μεσαίο τμήμα του σκοινιού εκείνο που είχε μήκος 4 μονάδων. Τέντωναν στη συνέχεια τα δυο άλλα τμήματα των 3 και 5 μονάδων και τα στερέωναν μ' έναν ακόμα πάσσαλο. Το τρίγωνο που σχηματιζόνταν ήταν ορθογώνιο (σχ. 1α, 1β).



(σχ. 1α)



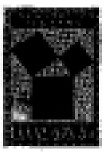
(σχ. 1β)

Είχαν διαπιστώσει ακόμα ότι οι αριθμοί 3, 4, 5 επαλήθευαν την ισότητα $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Εάν το σκοινί χωριζόταν σε τρία τμήματα μήκους 6, 8, 10 μονάδων αντίστοιχα και πάλι σχηματιζόταν ένα ορθογώνιο τρίγωνο και ίσχυε επιπλέον.

$$6^2 + 8^2 = 10^2$$

Το ίδιο συνέβαινε και αν το σκοινί χωριζόταν σε τρία τμήματα των 9, 12 και 15 μονάδων. Σχηματιζόταν και πάλι ένα ορθογώνιο τρίγωνο ενώ ίσχυε:



$$9^2 + 12^2 = 15^2$$

Τι παράξενη σχέση που συνδέει αυτές τις τριάδες των αριθμών θα αναρωτηθείτε. Το ίδιο πίστευαν και οι Αιγύπτιοι που τους απέδιδαν μάλιστα και κάποια θεϊκή σημασία.

Στα ίδια συμπεράσματα είχαν καταλήξει και οι Κινέζοι και οι Ινδοί, που επίσης χρησιμοποιούσαν τη μέθοδο του σκοινιού με τους κόμπους για να χαράξουν ορθές γωνίες. Μόνο που το σκοινί χωριζόταν σε τμήματα των 5, 12, 13 μονάδων αλλά και των 8, 15, 17

(Το σκοινί με τους κόμπους το ονόμαζαν οι αρχαίοι Αιγύπτιοι **αρπεδόνη** και αυτοί που το χρησιμοποιούσαν ονομάζονταν **αρπεδονάπτες**. Οι αρπεδονάπτες χρησιμοποιούσαν την αρπεδόνη για να οριοθετούν τα χωράφια μετά από τις πλημμύρες του Νείλου σχηματίζοντας ορθογώνια παραλληλόγραμμα και τετράγωνα.)

Η απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

Το Πυθαγόριο θεώρημα είναι μια ιδιότητα που ισχύει σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο. Η ιδιότητα αυτή συνδέει τα μήκη των πλευρών α, β, γ ενός ορθογώνιου τριγώνου με την ισότητα:

$$α^2 = β^2 + γ^2$$

Σ' αυτήν την ισότητα η μεγαλύτερη πλευρά α, είναι η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου που βρίσκεται απέναντι στην ορθή γωνία ενώ οι β, γ είναι οι δυο κάθετες πλευρές του.

Η σχέση αυτή που συνδέει τις τρεις πλευρές κάθε ορθογωνίου τριγώνου φαίνεται ότι ήταν γνωστές από πολύ παλιά. Τον 6ο αιώνα π.Χ. χρησιμοποιείτο ακόμα στην Αρχαία Αίγυπτο σαν πρακτικός κανόνας. Ο Πυθαγόρας που μαθήτευσε την εποχή εκείνη στην

Αίγυπτο και την Βαβυλώνα πιθανόν εκεί να την πληροφορήθηκε. Σ' αυτόν όμως ανήκει η τιμή της απόδειξής της. Έτσι από πρακτικός κανόνας, που εφαρμοζόταν σε περιορισμένες περιπτώσεις, αποτέλεσε ένα από τα βασικά θεωρήματα της γεωμετρίας.

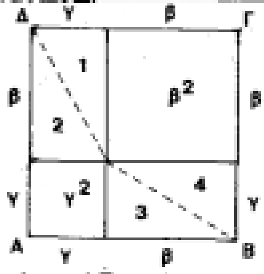
Δεν ξέρουμε όμως ποια μέθοδο χρησιμοποίησε ο πυθαγόρας για να αποδείξει το θεώρημα που φέρει το όνομά του. Έτσι θα δώσουμε στη συνέχεια δύο από τις πιο γνωστές αποδείξεις του θεωρήματος που στηρίζονται στον υπολογισμό των εμβαδών γνωστών μας σχημάτων.

Α΄ Τρόπος

Σχεδιάζουμε δυο ίσα τετράγωνα ΑΒΓΔ με πλευρά (β + γ). Στο πρώτο απ' αυτά σχεδιάζουμε σε κάθε μια από τις ορθές του γωνίες από ένα ορθογώνιο τρίγωνο που έχει κάθετες πλευρές β και γ. Παρατηρούμε ότι εκτός από τα 4 ίσα ορθογώνια τρίγωνα δημιουργείται και ένα τετράγωνο που έχει πλευρά την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου.

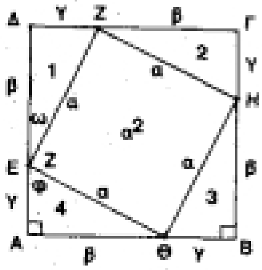
Στο δεύτερο τετράγωνο ΑΒΓΔ σχηματίζουμε δυο τετράγωνα που έχουν πλευρές το ένα την β και το άλλο τη γ καθώς και 4 ίσα ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές β και γ.

Ας υπολογίζουμε το εμβαδόν καθ' ενός από τα δυο τετράγωνα ΑΒΓΔ.



$Ε_{ΑΒΓΔ}$ = Ετετράγ. + 4 Ετριγώνου

$$Ε_{ΑΒΓΔ} = α^2 + 4\frac{βγ}{2} \quad (1)$$



$Ε_{ΑΒΓΔ} = Ε_1$ τετραγ. + $Ε_2$ τετραγ. + 4 Ετριγώνου

$$Ε_{ΑΒΓΔ} = β^2 + γ^2 + 4\frac{βγ}{2} \quad (2)$$

Αλλά τα εμβαδά των δυο τετραγώνων ΑΒΓΔ είναι ίσα.

Από τις σχέσεις 1 και 2 έχουμε λοιπόν:

$$α^2 + 4\frac{β \cdot γ}{2} = β^2 + γ^2 + 4\frac{β \cdot γ}{2}$$

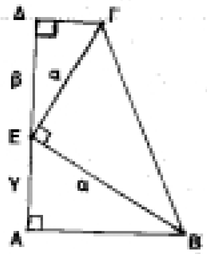
$$α^2 = β^2 + γ^2$$

Σημείωση: Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το ημιγινόμενο και των δυο καθέτων πλευρών του γιατί η μια είναι η βάση και η άλλη το ύψος του.

Β΄ Τρόπος

Σχεδιάζουμε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ με τις γωνίες Α και Δ ορθές που έχει βάσεις β και γ και το ύψος (β + γ).

Το εμβαδόν του τραπεζίου ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων που επί το ύψος του



$$Ε_{τραπεζίου} = Ε_{τριγ.ΑΒΕ} + Ε_{τριγ.ΕΓΔ} + Ε_{τριγ.ΔΕΓ}$$

$$\frac{β + γ}{2}(β + γ) = \frac{β \cdot γ}{2} + \frac{β \cdot γ}{2} + \frac{α^2}{2}$$

Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα στο πρώτο μέλος της ισότητας αυτής.

$$\frac{β^2 + βγ + βγ + γ^2}{2} = \frac{βγ + βγ + α^2}{2}$$

$$β^2 + βγ + βγ + β^2 = βγ + βγ + α^2$$

$$β^2 + γ^2 = α^2$$

δηλ. $α^2 = β^2 + γ^2$

Οι Πυθαγόρειες τριάδες.

Από την εποχή ακόμα του Πυθαγόρα αναζητήθηκαν τριάδες ακεραίων αριθμών που να αντίστοιχούν στα μέτρα των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου, δηλαδή, να επαληθεύουν τον τύπο του Πυθαγορείου θεωρήματος. Ορισμένες τέτοιες τριάδες ήταν ήδη γνωστές όπως προαναφέρθηκε π.χ. (3, 4, 5) (6, 8, 10) (9, 12, 15) (5, 12, 13) ...

Υπήρχε μάλιστα και ένας τρόπος για την εύρεση τέτοιων τριάδων που ονομάζονται Πυθαγόρειες τριάδες:

- Κάθε περιττός αριθμός, – το τετράγωνό του ελαττωμένο κατά 1 και διαιρούμενο το αποτέλεσμα δια 2 – τέλος ο επόμενος ακέραιος αποτελούν μια πυθαγόρεια τριάδα.

Παραδείγματα

το 5, το $\dfrac{25-1}{2} = 12$ και το 13 (5, 12, 13)

το 7, το $\dfrac{49-1}{2} = 24$ και το 25 (7, 24, 25)

Από μια πυθαγόρεια τριάδα μπορούμε να βρούμε άπειρες άλλες, αν πολλαπλασιάσουμε και τους τρεις αριθμούς της με το ίδιο ακέραιο αριθμό, πχ.

	x2	(6, 8, 10)
(3, 4, 5)	x3	(9, 12, 15)
	x4	(12, 16, 20)

Μπορούμε ακόμα να βρούμε πυθαγόρειες τριάδες αν γνωρίζουμε δυο τυχαίους αριθμούς. Οι τύποι που μας δίνουν την υποτείνουσα και τις κάθετες πλευρές είναι οι εξής τρεις:

$(\kappa^2 + \lambda^2)$, $(\kappa^2 - \lambda^2)$ και $(2\kappa\lambda)$ με $\kappa, \lambda \in N$

π.χ. αν $\kappa = 4$ και $\lambda = 3$ έχουμε:

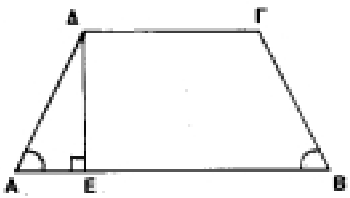
$(4^2 + 3^2)$, $(4^2 - 3^2)$ $(2 \cdot 4 \cdot 3)$

25 7 24

Πράγματι από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $25^2 = 7^2 + 24^2$ ή $625 = 49 + 576$ που αληθεύει. Υπάρχουν τέλος και πυθαγόρειες τριάδες και με άλλους αριθμούς εκτός από ακέραιους.

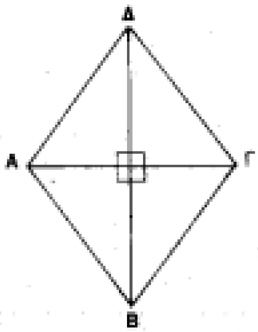
Ασκήσεις

B_{15}) Να υπολογίσετε την περίμετρο του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ αν, ΑΒ = 12 cm, ΔΕ = 4 cm και η ΓΔ είναι διπλάσια της ΑΒ.



B_{16}) Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός ισοσκελούς τριγώνου αν η βάση του είναι 16 m και το ύψος του είναι τα 3/8 της βάσης του.

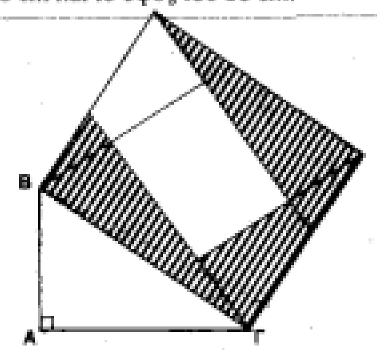
B_{17}) Να υπολογίσετε την περίμετρο του ρόμβου ΑΒΓΔ αν οι διαγώνιοί του έχουν μήκος 10 cm και 12 cm. (Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούνται κάθετα).



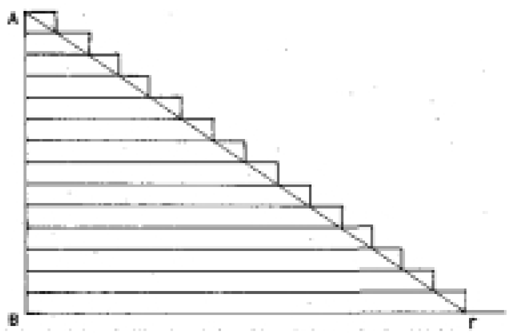
B_{18}) Μια σκάλα μήκους 4,5 m είναι ακουμπισμένη σ' ένα τοίχο η μία άκρη της σκάλας απέχει από τον τοίχο 1,2 m. Σε ποιο ύψος φτάνει η σκάλα;

B_{19}) Μπορείτε να αποδείξετε, με τη βοήθεια του σχήματος, ότι ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ.

B_{20}) Να υπολογίσετε την απόσταση ΑΓ της τσιμεντένιας σκάλας αν το πλάτος κάθε σκαλοπατιού είναι 30 cm και το ύψος του 16 cm.



B_{21}) Να υπολογιστεί το ύψος σε cm. Οι δοθείσες διαστάσεις σε cm.



B_{22}) Όταν λέμε ότι "μια τηλεόραση είναι 22 ιντσών" εννοούμε ότι η διαγώνιος της οθόνης έχει μήκος 22 ίντσες. Αν η οθόνη της τηλεόρασης είναι τετράγωνη πόσες ίντσες είναι η κάθε πλευρά της;