Authors: Χ. Δάτσικας, Π. Κυράνας, Γ. Μασιάκος

Title: Εξισώσεις 2ου βαθμού

Creator: HDML

Εξισώσεις 2ου βαθμού

Εξισώσεις 2ου βαθμού με ελλιπή μορφή:

$$\alpha x^2 + \beta x = 0 \quad (1)$$

$$\alpha x^2 = \gamma \quad (2)$$

Π. Κυράνας

Πρόβλημα 1:

Να βρεθεί αριθμός που το τετραγωνό του να είναι ίσο με το εφταπλασιό του.

Λύση:

Έστω x ο ζητούμενος αριθμός. Τότε σύμφωνα με το πρόβλημα θα έχουμε την εξίσωση:

$$x^2 = 7x \quad (1)$$

Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος και έχουμε:

$$x^2 - 7x = 0 \quad (2)$$

Επειδή το 2ο μέλος είναι μηδέν και αναγωγή ομοίων όρων δεν γίνεται ο μόνος τρόπος για να προχωρήσουμε είναι η παραγοντοποίηση. Έτσι έχουμε

$$x(x-7) = 0 \quad (3)$$

Παρατήρηση:

Με την παραγοντοποίηση πετύχαμε να δημιουργήσουμε ένα γινόμενο ίσο με το μηδέν που οι παράγοντές του x και x − 7 είναι 1ου βαθμού. Γνωρίζουμε όμως αν, $\alpha \cdot \beta = 0$ τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$. Συνεπώς η εξίσωση $x(x-7) = 0$.

$$\text{ισοδυναμεί με } \begin{cases} x = 0 & \Leftrightarrow \boxed{x = 0} \\ \text{ή } x - 7 = 0 & \Leftrightarrow \boxed{x = 7} \end{cases}$$

Οι λύσεις x = 0 και x = 7 είναι λύσεις και της εξίσωσης (1) και συνεπώς οι αριθμοί 0 και 7 είναι οι ζητούμενοι αριθμοί του προβλήματος.

Στη γενική της μορφή μια τέτοια εξίσωση γράφεται:

$$\alpha x^2 + \beta x = 0$$

Λύση:

(1) $\alpha x^2 + \beta x = 0$

(2) $x(\alpha x + \beta) = 0$ παραγοντοποίηση

(3) $x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ή $\alpha x + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha x = -\beta \Leftrightarrow x = -\dfrac{\beta}{\alpha}$

άρα οι λύσεις είναι $x = 0$ και $x = -\dfrac{\beta}{\alpha}$

Πρόβλημα 2:

Να βρεθεί ένας αριθμός του οποίου το τετράγωνο πολλαπλασιαζόμενο με το 5 μας δίνει γινόμενο 45.

Λύση:

Έστω x ο αριθμός αυτός. Σύμφωνα με το πρόβλημα θα έχουμε την εξίσωση:

$$5 \cdot x^2 = 45$$

Λύση:

1ο βήμα

$$\frac{5x^2}{5} = \frac{45}{5}$$ διαιρούμε και τα δυο μέλη με το συντελεστή του x^2.

$$x^2 = 9$$

2ο βήμα

Όπως κάναμε και με την εξίσωση του 1ου προβλήματος μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος και παραγοντοποιούμε. Έτσι έχουμε:

$$x^2 - 9 = 0$$

$$(x+3)(x-3) = 0$$

$$x + 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = -3}$$

ή $x - 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 3}$ οι λύσεις

Άρα ο ζητούμενος αριθμός του προβλήματος είναι το 3 ή το −3.

Παρατήρηση:

Παρατηρούμε ότι με την παραγοντοποίηση επιλύονται και οι δυο μορφές εξισώσεων αρκεί να φέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος ώστε το 2ο μέλος να γίνει ίσο με το μηδέν και κατόπιν να παραγοντοποιήσουμε.

Ασκήσεις

Γ$_{21}$ Να επιλύσετε τις εξισώσεις:
1) $3x^2 - 2x = 0$ 2) $4x^2 = x$
3) $2x^2 + 48x = 0$ 4) $45x^2 - 24x = 0$

Γ$_{22}$ Να επιλύσετε με δυο τρόπους τις εξισώσεις:
1) $-2x^2 + 18 = 0$ 2) $7x^2 = -28$
3) $5x^2 = 0$

Γ$_{23}$ Να επιλύσετε την εξίσωση $(x - 2)(4x + 3) = 0$

Γ$_{24}$ Δίνεται το τριώνυμο $3x^2 + x - 2$.
α) Παραγοντοποιήστε το.
β) Προσπαθήστε να λύσετε την εξίσωση $3x^2 + x - 2 = 0$.

Η Δευτεροβάθμια Εξίσωση

Χρ. Δάτσικας

Δευτεροβάθμια εξίσωση είναι μια ισότητα με έναν άγνωστο που όμως εμφανίζεται υψωμένος στην δεύτερη δύναμη και αυτή είναι η μεγαλύτερη δύναμη που παρουσιάζεται. π.χ. $2x^2 - 5x + 7 = 0$

Για να λύσουμε αυτή την εξίσωση πρέπει να την παραγοντοποιήσουμε σε γινόμενο όρων πρώτου βαθμού. Η γενική μορφή είναι: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ $\alpha \neq 0$.

Η κεντρική ιδέα είναι να δημιουργήσουμε διαφορά τετραγώνων που γίνεται γινόμενο με την γνωστή ταυτότητα $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$.

Έτσι απαιτούνται δυο όροι υψωμένοι σε τετράγωνο. Ο πρώτος θα γίνει τέλειο τετράγωνο με βάση την ταυτότητα: $(\alpha + \beta^2) = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$.

Ξεκινούμε λοιπόν μετασχηματίζοντας το τριώνυμο. Έτσι ώστε να εμφανιστεί ένας – ένας και οι τρείς όροι του αναπτύγματος του $(\alpha + \beta)^2$ δηλαδή το τετράγωνο του πρώτου όρου, το διπλάσιο γινόμενο και το τετράγωνο του δευτέρου όρου.

Ο όρος αx^2 προσφέρεται για τον ρόλο του α^2 δηλαδή "το τετράγωνο του πρώτου όρου", αλλά θα τον προτιμούσαμε μόνο, χωρίς τον συντελεστή του τον α. Έτσι διαιρούμε και τα δυο μέλη της ισότητας, όλους τους όρους της δια α. Έτσι:

$$\frac{\alpha x^2}{\alpha} + \frac{\beta x}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{0}{\alpha}$$

$$x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$$

Τώρα θα διαμορφώσουμε τον όρο $2\alpha\beta$ δηλαδή "το διπλάσιο γινόμενο" της ταυτότητας.

Ο όρος $\frac{\beta}{\alpha} \cdot x$ περιέχει τον πρώτο όρο x αλλά λείπει ο συντελεστής 2. Αν πολλαπλασιάσουμε επί 2 και ταυτόχρονα διαιρέσουμε δια 2 τον όρο αυτό δεν θα αλλάξει τίποτε αφού $\frac{2}{2} = 1$, και η μονάδα είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού.

$$x^2 + 2 \cdot \frac{\beta}{2\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$$

Τώρα μας χρειάζεται ο όρος β^2 δηλαδή "το τετράγωνο του δευτέρου όρου" της ταυτότητας, που όμως έχει εμφανιστεί μεταξύ του 2 και του x και είναι ο $\frac{\beta}{2\alpha}$. Έτσι επειδή θέλουμε τον $\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ τον προσθέτουμε αλλά ταυτόχρονα τον αφαιρούμε αφού το άθροισμα των αντιθέτων είναι μηδέν.

$$\underbrace{x^2 + 2 \cdot \frac{\beta}{2\alpha}x + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2} - \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$$

Έχουμε λοιπόν μια εξίσωση ισοδύναμη με την αρχική και με τους τρεις πρώτους όρους της να είναι ανάπτυγμα τελείου τετραγώνου.

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$$

Εδώ θυμόμαστε ότι σκοπός μας είναι να καταλήξουμε σε διαφορά τετραγώνων. Έτσι συνεχίζουμε τις πράξεις στο υπόλοιπο μέρος, ώστε και αυτό να γίνει ένας όρος υψωμένος στο τετράγωνο.

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$$

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\overset{1}{\beta^2}}{4\alpha^2} + \frac{\overset{4\alpha}{\gamma}}{\alpha} = 0$$

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}+\frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=0$$

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right)=0$$

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right)=0$$

Τώρα έχουμε σαν δεύτερο όρο ένα κλάσμα του οποίου ο παρονομαστής είναι το τετράγωνο του 2α αφού $(2\alpha)^2 = 4\alpha^2$, αλλά ο αριθμητής δεν ξέρουμε αν μπορεί να γραφτεί σαν το τετράγωνο κάποιου αριθμού. Αν είναι τετράγωνος τότε απλά έχουμε $4 = 2^2$ ή $36 = 6^2$. Ακόμη όμως και αν δεν συμβαίνει αυτό μπορούμε να γράφουμε $8=\left(\sqrt{8}\right)^2$ ή $5=\left(\sqrt{5}\right)^2$.

Απαραίτητη προϋπόθεση όμως είναι ο αριθμός που εμφανίζεται στον αριθμητή να είναι θετικός γιατί δεν υπάρχει τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού. Αν λοιπόν $\beta^2-4\alpha\gamma \geq 0$ τότε

$$\beta^2-4\alpha\gamma=\left(\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}\right)^2$$

και έχουμε

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\left(\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}\right)^2}{(2\alpha)^2}=0$$

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)^2=0$$

Καταλήξαμε λοιπόν στην διαφορά τετραγώνων που παραγοντοποιείται:

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)\cdot\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)=0$$

αφού το γινόμενο είναι μηδέν τότε κάποιος από τους όρους θα είναι μηδέν:

$$x+\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=0 \quad ή$$

$$x+\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=0$$

$$x=-\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad ή$$

$$x=-\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

$$x=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad ή$$

$$x=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Έτσι καταλήγουμε σε ένα τύπο:

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \qquad (1)$$

που δίνει τις λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Για να μπορούμε να τον εφαρμόσουμε πρέπει ο όρος $\beta^2-4\alpha\gamma$ να μην είναι αρνητικός. Αν είναι μηδέν τότε δεν έχει νόημα το συν / πλην του τύπου έτσι έχουμε μια μόνη λύση την $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ και αν είναι θετικός θα έχουμε δυο λύσεις. Ο όρος αυτός λέγεται διακρίνουσα μια και από αυτόν μπορούμε να διακρίνουμε το πόσες λύσεις έχει η εξίσωση.

Κλασματικές Εξισώσεις

Χρ. Δάτσικας

Όπως ξέρουμε μια εξίσωση είναι μια ισότητα που γίνεται αληθής όταν ο άγνωστος που περιέχει αντικατασταθεί από τις κατάλληλες αριθμητικές τιμές.

Η κλασματική εξίσωση είναι και αυτή μια ισότητα που αποτελείται από κλασματικούς όρους που περιέχουν όμως, τον άγνωστο στη θέση του παρονομαστή.

π.χ. $\frac{3x^2}{x^2-4}-\frac{x-1}{x^2+2x}=\frac{x+2}{x-2}+2$

Έτσι αφού στους παρονομαστές δεν βρίσκονται φυσικοί αριθμοί, αλλά αλγεβρικές παραστάσεις, απαραίτητη προϋπόθεση είναι να αποκλείσουμε από τις λύσεις της εξίσωσης εκείνες τις τιμές του x που μηδενίζουν κάθε παρονομαστή της.

Ξεκινούμε λοιπόν την επίλυσή της με τους περιορισμούς

$x^2-4\neq 0$	$x^2+2x\neq 0$	$x-2\neq 0$
$(x-2)(x+2)\neq 0$	$x(x+2)\neq 0$	$x\neq 2$
$x-2\neq 0$ και $x+2\neq 0$	$x\neq 0$ και $x+2\neq 0$	
$x\neq 2$ και $x\neq -2$	$x\neq 0$ και $x\neq -2$	

Έτσι έχουμε $x\neq -2$ και $x\neq 0$ και $x\neq 2$

Αν λοιπόν στο τέλος της διαδικασίας επίλυσης προκύψουν ως λύσεις οι τιμές $-2, 0, 2$, τότε αυτές θα πρέπει να απορριφθούν, αφού αν αντικατασταθούν στην αρχική μορφή για επαλήθευση τότε θα παρουσιαστεί η πράξη "διαίρεση δια του μηδενός" που είναι αδύνατη.

Όπως κάθε εξίσωση, έτσι και η κλασματική για να λυθεί θα πρέπει να μετασχηματιστεί σταδιακά σε άλλες εξισώσεις που να είναι όμως ισοδύναμες μεταξύ τους για να καταλήξουμε στην τελική σχέση με μορφή π.χ. $x = 8$ ή $x = -5$.

Στην περίπτωση που μελετούμε ο πρώτος μετασχηματισμός είναι αυτός που θα μας απαλλάξει από τους παρονομαστές. Γι' αυτό πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη της εξίσωσης επί την ίδια αλγεβρική παράσταση που θα απλοποιήσει τους παρονομαστές. Αυτό είναι δυνατό γιατί μια ισότητα παραμένει ισότητα, μετά από μια τέτοια διαδικασία, αρκεί όμως η παράσταση αυτή να είναι διάφορη του μηδενός. Αυτή η παράσταση που θα απλοποιήσει τους παρονομαστές είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο τους (ΕΚΠ). Να θυμηθούμε εδώ ότι αφού αναλύσουμε τους παρονομαστές σε γινόμενο παραγόντων το Ε.Κ.Π. είναι το γινόμενο όλων των διαφορετικών παραγόντων αλλά στην μεγαλύτερη δύναμη του παρουσιάζονται. Η παραγοντοποίηση των παρονομαστών γίνεται με κάποιον από τους γνωστούς τρόπους.

Στο παράδειγμά μας ο όρος x^2-4 είναι διαφορά τετραγώνων έτσι:

$$x^2-4=(x-2)(x+2)$$

Ο δεύτερος παρονομαστής x^2+2x εμφανίζει κοινό παράγοντα (επιμεριστική ιδιότητα) έτσι:

$$x^2+2x=x(x+2).$$

Ο τελευταίος παρονομαστής δεν παραγοντοποιείται έτσι το ΕΚΠ είναι το $x(x-2)(x+2)$.

Πολλαπλασιάζοντας επί το ΕΚΠ και τα δυο μέλη της εξίσωσης θυμόμαστε την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση, έτσι ο πολλαπλασιασμός των δυο μελών καταλήγει στον πολλαπλασιασμό κάθε όρου του κάθε μέλους επί το ΕΚΠ. Έχουμε:

$$x(x-2)(x+2)\frac{3x^2}{(x-2)(x+2)}-$$
$$-x(x-2)(x+2)\frac{x-1}{x(x+2)}=$$
$$=x(x-2)(x+2)\frac{x+2}{(x-2)}+x(x-2)(x+2)2$$

και μετά τις απλοποιήσεις:

$$x\cdot 3x^2-(x-2)(x-1)=$$
$$=x(x+2)(x+2)+2x(x-2)(x+2).$$

Σ' αυτή την φάση προσέχουμε να βάλουμε τους όρους που ήταν στους αριθμητές σε παρένθεση γιατί πρέπει να πολλαπλασιάσουμε επιμεριστικά όλους τους όρους τους.

$$3x^3-(x^2-2x-x+2)=x(x+2)^2+2x(x^2-4)$$
$$3x^3-x^2+2x+x-2=x(x^2+4x+4)+2x^3-8x$$
$$3x^3-x^2+2x+x-2=x^3+4x^2+4x+2x^3-8x$$

Τώρα πρέπει να μεταφέρουμε στο πρώτο μέλος όλους τους όρους και να κάνουμε την αναγωγή των ομοίων όρων.

$$3x^3-x^2+2x+x-2-x^3-4x^2-4x-2x^3+8x=0$$
$$-5x^2+7x-2=0$$
$$5x^2-7x+2=0$$

Κατόπι διαπιστώνουμε τον βαθμό της εξίσωσης που καταλήξαμε και επιλέγουμε την κατάλληλη μέθοδο επίλυσης. Στην περίπτωση του παραδείγματος έχουμε εξίσωση δευτέρου βαθμού.

Βρίσκουμε την διακρίνουσα:

$\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma=(-7)^2-4\cdot 5\cdot 2=49-40=9>0$

είναι θετική έτσι θα έχουμε δυο λύσεις τις:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 5}=\frac{7\pm 3}{10}\begin{cases}\frac{10}{10}=1\\ \frac{4}{10}=\frac{2}{5}\end{cases}$$

Δεν ξεχνούμε να εξετάσουμε αν οι λύσεις αυτές είναι δεκτές σύμφωνα τους περιορισμούς που βρήκαμε στην αρχή.

Ασκήσεις

Γ25) $\frac{2x}{x+1}+\frac{x}{1-x}+1=\frac{3x^2-5}{x^2-1}$

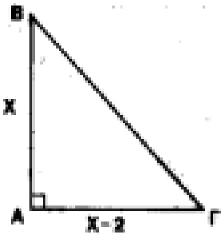
Γ26) $\frac{2x+1}{x^2+3x}+\frac{4x}{x^2-9}=\frac{4}{3+x}-\frac{2}{3-x}$

Προβλήματα και ασκήσεις

Γ. Μασιακός

Πολλές φορές η επίλυση ενός προβλήματος δεν οδηγεί σε εξίσωση 1ου βαθμού. Ας προσπαθήσουμε να λύσουμε το πρόβλημα: Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($Α = 1^{L}$) έχει υποτείνουσα 10 cm και η μία κάθετη πλευρά του είναι κατά 2 cm μεγαλύτερη από την άλλη. Να βρεθούν οι πλευρές του.

Στη Β΄ τάξη μάθαμε το Πυθαγόρειο θεώρημα. Έστω ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($Α = 1^{L}$) και ΑΒ = Χ τότε η άλλη κάθετη πλευρά ΑΓ θα είναι Χ − 2 και η υποτείνουσα ΒΓ = 10.



Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$x^2 + (x-2)^2 = 10^2$
$x^2 + x^2 - 2\cdot x\cdot 2 + 2^2 = 10^2$
$x^2 + x^2 - 4x + 4 = 100$
$2x^2 - 4x + 4 - 100 = 0$
$2x^2 - 4x - 96 = 0$

Παρατηρούμε ότι καταλήξαμε σε μια ισότητα που περιέχει έναν άγνωστο και μάλιστα η μεγαλύτερη δύναμη του αγνώστου που εμφανίζεται είναι στο τετράγωνο.

Γι' αυτό κάθε εξίσωση της μορφής αυτής που γενικά συμβολίζουμε με $αx^2 + βx + γ = 0$ με α, β, γ πραγματικούς αριθμούς και $α \neq 0$ (γιατί;) λέγεται εξίσωση 2ου βαθμού ή δευτεροβάθμια εξίσωση.

Ας προσπαθήσουμε να λύσουμε τώρα την εξίσωση του προβλήματός μας:

$$2x^2 - 4x - 96 = 0$$

Παρατηρούμε ότι: $α = 2$, $β = -4$, $γ = -96$ επομένως:

$$\sqrt{β^2 - 4αγ} = \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 2\cdot(-96)} =$$
$$= \sqrt{16 + 768} = \sqrt{784} = 28$$

γιατί $28^2 = 784$

Κάνουμε αντικατάσταση στο τύπο (1)

$$x = \frac{+4 \pm 28}{2\cdot 2}$$

Άρα η μία ρίζα είναι $x_1 = \frac{+4+28}{4} = 8$ και η $x_2 = \frac{+4-28}{4} = -6$ άλλη η οποία δεν θα γίνει δεκτή γιατί τα γεωμετρικά μεγέθη, όπως είναι στην περίπτωσή μας η πλευρά του τριγώνου, δεν εκφράζονται με αρνητικούς αριθμούς. Επομένως η μια πλευρά του τριγώνου θα είναι 8 και η άλλη 6 cm.

Θα λύσουμε ορισμένες εξισώσεις 2ου βαθμού:

Εφαρμογή 1η:

Να λυθεί η εξίσωση $3x^2 + 5x = 0$

Λύση

$3x^2 + 5x = 0$
$x(3x + 5) = 0$
$x = 0$ ή $3x + 5 = 0$
$3x = -5$
$x = -\frac{5}{3}$

Β΄ τρόπος

Έχουμε μάθει προηγουμένως ότι μια εξίσωση 2ου βαθμού λύνεται χρησιμοποιώντας τον τύπο (1) γι' αυτό έχουμε: $α = 3$, $β = 5$, $γ = 0$.

$$\sqrt{β^2 - 4αγ} = \sqrt{5^2 - 4\cdot 3\cdot 0} = \sqrt{25} = 5$$

Άρα $x = \frac{-β \pm \sqrt{β^2 - 4αγ}}{2α} = \frac{-5 \pm 5}{2\cdot 3}$ και

$x_1 = \frac{-5+5}{6} = 0$ ή $x_2 = \frac{-5-5}{6} = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3}$

Εφαρμογή 2:

Να λυθεί η εξίσωση $9x^2 - 4 = -8$

Λύση

Η εξίσωση γράφεται: $9x^2 = -8 + 4$
$9x^2 = -4$

Παρατηρούμε ότι το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι θετικό (γιατί υψώνεται στο τετράγωνο) ενώ το δεύτερο μέλος είναι αρνητικό, επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη γιατί δεν μπορεί ένας αριθμός να υψώνεται στο τετράγωνο και να είναι ίσος με ένα αρνητικό. Ας προσπαθήσουμε να λύσουμε την εξίσωση:

$$9x^2 - 4 = -8$$

και με τον τύπο (1).

Η εξίσωση γράφεται $9x^2 - 4 + 8 = 0$

$9x^2 + 4 = 0$

και είναι $α = 9$, $β = 0$, $γ = 4$.

Υπολογίζουμε την $\sqrt{β^2 - 4αγ} = \sqrt{0 - 4 \cdot 9 \cdot 4} = \sqrt{-144}$. Εμείς όμως μάθαμε ότι οι αρνητικοί αριθμοί δεν έχουν τετραγωνική ρίζα. Έτσι η εξίσωση δεν έχει λύση.

Εφαρμογή 3η:

Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{7 - x^2}{x^2 - 1} + \frac{3}{x + 1} = \frac{2}{x - 1}$$

Λύση

Η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{7 - x^2}{(x + 1)(x - 1)} + \frac{3}{x + 1} = \frac{2}{x - 1}$$

Επειδή η εξίσωση περιέχει άγνωστο στον παρονομαστή πρέπει να εξαιρέσω τις τιμές του x που μηδενίζουν τους παρονομαστές για να έχει νόημα κάθε κλάσμα, γι' αυτό πρέπει $x \neq +1$ και $x \neq -1$.

Επίσης ΕΚΠ είναι $(x + 1)(x - 1)$.

Πολλαπλασιάζουμε όλους του όρους της εξίσωσης με το ΕΚΠ για να διαγραφούν οι παρονομαστές:

$$(x + 1)(x - 1)\frac{7 - x^2}{(x + 1)(x - 1)} +$$

$$+ (x + 1)(x - 1)\frac{3}{(x + 1)} =$$

$$(x + 1)(x - 1)\frac{2}{x - 1}$$

$7 - x^2 + 3(x - 1) = 2(x + 1)$

$7 - x^2 + 3x - 3 - 2x - 2 = 0$

$-x^2 + x + 2 = 0$

$α = -1$, $β = +1$, $γ = 2$

$$x = \frac{-β \pm \sqrt{β^2 - 4αγ}}{2α} = \frac{-1 \pm 3}{2(-1)} = \frac{-1 \pm 3}{-2} \text{ άρα}$$

$x_1 = \dfrac{-1 + 3}{-2} = -1$ απορρίπτεται για $x \neq \pm 1$

$x_2 = \dfrac{-1 - 3}{-2} = \dfrac{-4}{-2} = 2$

Άσκηση 1η:

Αν $A = (x + 1)^3 - 3(x - 1)^2 - 2(x - 1)(x + 1) - (x - 1)^3 - 8$

α) Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης Α όταν το $x = -2$.

β) Στην παράσταση Α να αναπτύξετε τις δυνάμεις και να γίνει η αναγωγή των ομοίων όρων, του αποτελέσματος να βρείτε την αριθμητική τιμή όταν $x = -2$.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση Α γίνεται ίση με το μηδέν.

Λύση

α) Στην παράσταση Α βάζουμε στη θέση του x το -2 οπότε

$A = (-2 + 1)^3 - 3(-2 - 1)^2 - 2(-2 - 1)(-2 + 1) - (-2 - 1)^3 - 8$

ή $A = (-1)^3 - 3(-3)^2 - 2(-3)(-1) - (-3)^3 - 8$

ή $A = -1 - 3(+9) - 2(+3) - (-27) - 8$

ή $A = -1 - 27 - 6 + 27 - 8$

ή $A = -15$

β) Εφαρμόζουμε τις γνωστές ταυτότητες και έχουμε

$A = (x + 1)^3 - 3(x - 1)^2 - 2(x - 1)(x + 1) - (x - 1)^3 - 8$

ή $A = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 3(x^2 - 2x + 1) - 2(x^2 - 1) - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - 8$

(Προσοχή στις παρενθέσεις).

ή $A = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 3x^2 + 6x - 3 - 2x^2 + 2 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 - 8$

ή $A = x^2 + 6x - 7$

οπότε έχουμε:

$A = (-2)^2 + 6(-2) - 7 = 4 - 12 - 7 = -15$.

γ) Ζητάμε να βρούμε την τιμή του x ώστε η παράσταση Α να γίνει ίση με το μηδέν, δηλαδή $A = 0$

ή $x^2 + 6x - 7 = 0$

ή $x^2 + 7x - x - 7 = 0$

ή $x(x + 7) - (x + 7) = 0$

ή $(x + 7)(x - 1) = 0$

ή $x + 7 = 0$ ή $x - 1 = 0$

ή $x = -7$ ή $x = 1$.

Άρα οι τιμές του x που κάνουν των παράσταση $A = 0$ είναι δύο $x = -7$ ή $x = 1$. π.χ.

$(-7)^2 + 6(-7) - 7 = 49 - 42 - 7 = 0$
$1^2 + 6 \cdot 1 - 7 = 1 + 6 - 7 = 0$

Άσκηση 2η:

Να γίνουν γινόμενα τα πολυώνυμα

α) $A = 1 - 4x^2$ και $B = 2x + 4x^2$

β) Ν' απλοποιηθούν τα κλάσματα

$$K = \frac{A}{B} \quad \text{και} \quad \Lambda = \frac{4x^3 + 8x^2 + 4x}{(x+1)^2}$$

γ) Να λυθεί η εξίσωση $K = \Lambda$

Λύση

α) $A = 1 - 4x^2 = 1^2 (2x)^2 = (1 + 2x)(1 - 2x)$
$B = 2x + 4x^2 = 2x(1 + 2x)$

β) $$K = \frac{A}{B} = \frac{1 - 4x^2}{2x + 4x^2} = \frac{(1 + 2x)(1 - 2x)}{2x(1 + 2x)} =$$

$$= \frac{1 - 2x}{2x}$$

φυσικά $x(1 + 2x) \neq 0$ δηλ. $x \neq 0$ και $x \pm -1/2$

$$\Lambda = \frac{4x^3 + 8x^2 + 4x}{(x+1)^2} = \frac{4x\left(x^2 + 2x + 1\right)}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{4x(x+1)^2}{(x+1)^2} = 4x$$

φυσικά $x + 1 \neq 0$ δηλ. $x \neq -1$.

γ. Έχουμε $K = \Lambda$

ή $\dfrac{1 - 2x}{2x} = 4x$ με $x \neq 0$

ή $1 - 2x = 8x^2$

ή $8x^2 + 2x - 1 = 0$

ή $8\left(x^2 + \dfrac{2}{8}x - \dfrac{1}{8}\right) = 0$

ή $8\left(x^2 + \dfrac{4}{8}x - \dfrac{2}{8}x - \dfrac{1}{8}\right) = 0$

ή $8\left[x\left(x + \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{4}\left(x + \dfrac{1}{2}\right)\right] = 0$

ή $x + \dfrac{1}{2} = 0$ ή $x - \dfrac{1}{4} = 0$

ή $x = -\dfrac{1}{2}$ ή $x = \dfrac{1}{4}$

Άσκηση 3η:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x + 1}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού αυτής

β) Να βρείτε το $f(0)$, $f(-2)$ και $f(1)$

γ) Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης.
$A = 3f(0) + 3f(-2) + 16f(1)$

Λύση

α) Για να έχει νόημα η παράσταση $\dfrac{2x^2 + 1}{x + 1}$ πρέπει $x + 1 \neq 0$ ή $x \neq -1$.

Άρα το Π.Ο της $f(x)$ είναι το σύνολο $R - \{-1\}$.

β) $f(0) = \dfrac{2 \cdot 0^2 + 1}{0 + 1} = \dfrac{1}{1} = 1$

$f(-2) = \dfrac{2(-2)^2 + 1}{-2 + 1} = \dfrac{8 + 1}{-1} = -9$

$f(1) = \dfrac{2 \cdot 1^2 + 1}{1 + 1} = \dfrac{3}{2}$

γ) $A = 3f(0) + 3f(-2) + 16f(1)$

ή $A = 3 \cdot 1 + 3(-9) + 16\,\dfrac{3}{2}$

ή $A = 3 - 27 + 24$

ή $A = 27 - 27$

ή $A = 0$

Ασκήσεις για Λύση

Να Λυθούν οι εξισώσεις

Γ27) $\dfrac{7}{4} - (3x - 1)^2 = \dfrac{3(4x - 1)}{2}$

Γ28) $\dfrac{x}{x + 2} + \dfrac{x}{x + 1} = 1$

Γ29) $(x + 2)(7x - 1) = (4x + 5)(5x - 3)$

Γ30) $\left(3x - \dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{2}{9} - 2x$

Γ31) $\dfrac{4}{x + 1} - \dfrac{4x - 3}{x^2 - 1} = 2$