

Author: Θεοπίστη Καραμάνου-Πάντου

Title: Τα συστήματα Αρίθμησης και πώς γεννήθηκαν.

Abstract: Τα συστήματα αρίθμησης της αρχαιότητας.

Creator: HDML

# ΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ ΚΑΙ ΠΩΣ ΓΕΝΝΗΘΗΚΑΝ

ΘΕΟΠΙΣΤΗΣ ΚΑΡΑΜΑΝΟΥ-ΠΑΝΤΟΥ

## α) Πώς γεννήθηκαν τα Μαθηματικά

Από τα πολύ παλιά χρόνια, με την ανάπτυξη της ανθρώπινης κοινωνίας, ο άνθρωπος συκέντρωνε όλο και περισσότερες γνώσεις για τις διαστάσεις και το σχήμα των διαφόρων αντικειμένων και για τους αριθμούς, που οι ίδιες οι ανάγκες της ζωής του δημιούργησαν. Οι γνώσεις αυτές έπρεπε να συστηματοποιηθούν για να περνούν από γενιά σε γενιά, εύκολότερα. Έτσι γεννήθηκαν τα Μαθηματικά.

Πριν από 10.000 χρόνια, όταν αποτραβήχτηκαν οι παγετώνες κι άλλαξε το κλίμα της ύδρευσης, οι νομάδες της Λιθικής εποχής, που ζούσαν μέχρι τότε με το κυνήγι, συγκεντρώθηκαν σιγά-σιγά στις κοιλάδες των ποταμών Νείλου, Τίγρη και Εύφρατη κι άρχισαν πια να ασχολούνται συστηματικά με τη γεωργία.



Οι ανάγκες της νέας αυτής αγροτικής ζωής δημιούργησαν στον άνθρωπο προβλήματα ύπολογισμού των ημερών και των εποχών. Έπρεπε να ξέρει πότε να φυτέψει, πόσο σπόρο να σπείρει και πόσο να αποθηκεύσει. Έπρεπε ακόμη, μετά την εμφάνιση της ιδιοκτησίας, να ξέρει πόσα ζώα είχε το κοπάδι του και πώς να μοιράσει τη γη του στους κληρονόμους του και πώς να την προφυλάξει από τους άλλους βάζοντας της όροσημα, και κύρια πώς θα μπορούσε να κατοχυρώσει την ιδιοκτησία του όταν καταστρέφονταν τα όροσημα αυτά από πλημμύρες.

Αυτές ήταν μερικές απ' τις καθημερινές ανάγκες της πρακτικής ζωής του πρωτόγονου ανθρώπου που απαιτούσαν ονόματα για τους αριθμούς και την ανάπτυξη συστημάτων καταμέτρησης πιο πέρα απ' τις πρωτόγονες έννοιες «ένα» και «πολλά». Η δη-

μιουργία και η ανάπτυξη των συστημάτων καταμέτρησης ήταν η απαραίτητη προϋπόθεση για να λύσει ο άνθρωπος τα προβλήματα, που συναντούσε στη πάλη του για την επιβίωση.

## β) Πώς μετρούσαν οι άρχαιοι πρόγονοί μας

Πριν λίγα ακόμη χρόνια στην Αυστραλία, τη Νέα Γουινέα και τη Βραζιλία ζούσαν άνθρωποι πρωτόγονοι, που το επίπεδο ανάπτυξης τους αντιστοιχούσε στη Λιθική εποχή. Η μελέτη της ζωής τους έδωσε μια ζωντανή εικόνα του τρόπου με τον οποίο μετρούσαν οι παλιοί πρόγονοί μας. Αλλά και πολλές δικές μας συνήθειες κι ακόμη ο τρόπος με τον οποίο απαγγέλλονται οι αριθμοί στις διάφορες γλώσσες, είναι μια τρανή απόδειξη για το ότι το σύστημα με το οποίο μετράμε σήμερα δεν είναι προαιώνιο. Είναι αποτέλεσμα μιας μακραίωνης διαδικασίας που την έβαλαν σε κίνηση οι αξιότιμοι πρόγονοί μας.

Σήμερα όλοι ξέρουμε πώς στις απαριθμήσεις μας χρησιμοποιούμε το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης που σημαίνει πώς σ' αυτό το σύστημα κάθε δέκα μονάδες μιας τάξης μας δίνουν μία μονάδα ανώτερης τάξης δηλαδή οι δέκα μονάδες μας δίνουν τη δεκάδα, οι δέκα δεκάδες την εκατοντάδα κ.ο.κ.

# IIIRRSΞ

Ο αριθμός 444 γραφόμενος με  
τα ιερογλυφικά των αρχαίων  
Αιγυπτίων

Κατά καιρούς όμως στο παρελθόν χρησιμοποιήθηκαν κι άλλα συστήματα. Τα δάχτυλα των χεριών του ανθρώπου κι αργότερα των ποδιών κι ακόμη κι άλλα μέλη του σώματος (χέρια, πόδια κ.τ.λ.) ήταν η πρώτη βάση για τη δημιουργία συστημάτων μέτρησης. Όταν άρχισε ν' αναπτύσσεται η γεωργία και η οικοδομική, οι πιο εξελιγμένοι άνθρωποι της φυλής τελειοποίησαν κάπως το βα-

σικό τρόπο μέτρησης και από τον αριθμό των δαχτύλων διαμόρφωσαν συστήματα με βάση το 5, το 10, ή το 20.

Ας δοθμε όμως μερικά παραδείγματα που μας πείθουν για όλα τα παραπάνω. Στη γαλλική γλώσσα υπάρχει ακόμη η ανάμνηση μιας παλιάς εικοσιμετρικής συνήθειας. Ο αριθμός 80 διαβάζεται «quarante-vingts» που σημαίνει: «τέσσερα εικοσάρια» κι ο αριθμός 90 «quatre-vingt-dix» δηλαδή: «τέσσερα εικοσάρια και δέκα».

Η διαφορά ενός παλιότερου διαδεδομένου εικοσαδικού συστήματος φαίνεται φανερά στο αγγλικό νομισματικό σύστημα όπου η μία λίρα έχει 20 σελλήνια.

Τη μεγάλη εξάπλωση του δωδεκαδικού συστήματος φανερώνουν μια σειρά γεγονότα όπως το ότι ο χρόνος διαιρείται σε 12 μήνες, το ημερονύχτιο σε 24 ώρες, κι ακόμη στην καθημερινή μας ζωή μετράμε τις ώρες ως το 12 κι αρχίζουμε πάλι απ' την αρχή («μία μ.μ.», «δύο μ.μ.» κ.τ.λ.). Τα σερβίτσια αποτελούνται συνήθως από 12 φλυτζάνια, 12 πιατάκια, δώδεκα πιάτα, δώδεκα μαχαιροπήρουνα κ.τ.λ. Τα σερβιλληρωμένα επιπλα αποτελούνται από 12 καρέκλες, πολυθρόνες. Αλλά και στα παραμύθια ο αριθμός 12 συναντιέται συχνά (το δωδεκακέφαλο φίδι). Οι 12 θεοί του Ολύμπου μαρτυρούν κι αυτοί την αρχαία καταγωγή του δωδεκαδικού συστήματος αρίθμησης.

Σε πολλά απ' τα παραμύθια, που όλοι μας διαβάζαμε, όταν ήμασταν μικροί, γίνεται λόγος για «40 δράκους», για «το δράκο με τα 40 κεφάλια» για «40 εκκλησίες» κι ακόμη υπάρχει το πασίγνωστο παραμύθι του «Αλή Μπαμπά με τους 40 κλέφτες» που η καταγωγή του είναι Αραβική. Όλα αυτά φανερώνουν πως και το 40 χρησίμεψε κάποτε σά βάση για το σύστημα αρίθμησης. Στα ρωσικά διατηρήθηκαν ίχνη αρίθμησης με βάση το 40. Πραγματικά στους ρώσους είναι γνωστές εκφράσεις όπως: «σαράντα σαρανταριές εκκλησίες» «σαράντα σαρανταριές σαμούρια». Για το ότι ο αριθμός 40 έπαιξε κάποτε βασικό ρόλο στο σύστημα αρίθμησης φανερώνουν κι ορισμένες πρόληψεις που συνδέονται με τον αριθμό αυτό. Έτσι η τεσσαρακοστή πρώτη άρκουδα νομιζόταν μοιραία για τον κυνηγό. Ανάλογη είναι η πλατιά διαδεδομένη στους ευρωπαϊκούς λαούς, πρόληψη πως ο αριθμός δεκατρία είναι γρουσουζικός (συνδέεται με το ότι, όπως είπαμε πριν, κάποτε είχε διαδοθεί το δωδεκαδικό σύστημα).

### γ) Το εξηκονταδικό σύστημα

Σ' όλο το πρώτο μισό του πολιτισμού μας οι επιστήμονες της Δύσης χρησιμοποιούσαν, για να εκφράσουν τα κλάσματα, ένα σύστημα με βάση το εξήντα. Το σύστημα αυτό αρίθμησης, που είναι υπερβολικά πολύπλοκο και γι' αυτό τελικά με την πρώτη ευκαιρία αντικαταστάθηκε, το επεξεργάστηκαν οι αρχαίοι κάτοικοι της Μεσοποταμίας, οι Σουμέριοι κι οι Βαβυλώνιοι.

Το εξηκονταδικό σύστημα εξακολουθούμε να το χρησιμοποιούμε καθημερινά όταν υποδιαιρούμε την ώρα σε 60 λεπτά και το ένα λεπτό σε 60 δευτέρα λεπτά, ή όταν διαιρούμε τον κύκλο σε 6 ίσα τόξα από 60° το καθένα, τη μοίρα σε 60' και κάθε λεπτό σε 60 δευτέρα λεπτά. Εμφανίστηκε περίπου το 2500—2000 π. Χ. στη Μεσοποταμία, όπου την εποχή εκείνη κατοικούσαν οι Σουμέριοι κι οι Βαβυλώνιοι. Επειδή όπως είπαμε το σύστημα αυτό είχε βάση του το 60 οι Μεσοποτάμιοι υποχρεώθηκαν να επινοήσουν 59 διαφορετικά ψηφία για να παραστήσουν τους ενδιάμεσους αριθμούς μεταξύ του 0 και του 60.

Πώς ήταν λοιπόν δυνατόν να χρησιμοποιούν τα 59 αυτά ξεχωριστά ψηφία και να τα απομνημονεύουν κι όλας. Και οι Σουμέριοι και οι Βαβυλώνιοι που αγαπούσαν με πάθος τα μαθηματικά τδβρισκαν ανυπόφορο κάτι τέτοιο. Παρ' όλα αυτά όμως χρησιμοποιούσαν το σύστημα αυτό γιατί, αν κι είχε ένα τόσο σοβαρό μειονέκτημα, παρουσιάζει ωρισμένες σημαντικές άρστες. Το 60, ή βάση, διαιρείται άκριβως από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60, ενώ το 10 (βάση του δικού μας συστήματος) διαιρείται άκριβως, μόνο από τους αριθμούς 1, 2, 5, 10. Έτσι τα αριθμητικά προβλήματα που λυνόντουσαν με το εξηκονταδικό σύστημα κατέληγαν πιο συχνά σε άκέραια αποτελέσματα. Το σπουδαιότερο όμως ήταν ότι συνταίριαζαν το σύστημα αυτό με τη διαίρεση του ενός χρόνου, που είχε γι' αυτούς 360 μέρες.

Οι Βαβυλώνιοι και οι Σουμέριοι όμως δε γνώριζαν το μηδέν, που έκανε την εμφάνιση του γύρω στα 300 π. Χ. και με τη σημερινή του μορφή (σύμβολο 0 από το πρώτο γράμμα της λέξης «ουδέν») το 2ο αιώνα π. Χ. στην Ελλάδα.

Το εξηκονταδικό σύστημα έζησε και μετά την παρακμή των Μεσοποταμιών λαών, που το επινόησαν γιατί ήταν μέχρι τότε το μόνο σύστημα με θεσιολογική σημασία, δηλαδή το μόνο σύστημα στο οποίο η θέση κάθε ψηφίου μιας σειράς ψηφίων

είναι αυτή που προσδιορίζει την τιμή του. Για παράδειγμα στο δεκαδικό σύστημα\*, τα ίδια ψηφία του αριθμού 444 συμβολίζουν στην τελευταία θέση τον αριθμό των μονάδων, στην προτελευταία θέση τον αριθμό των δεκάδων και στην αρχική θέση εκατοντάδες.

#### δ) Ο θρίαμβος του δεκαδικού συστήματος

Στην περίοδο ανάμεσα στον II και στον IV αιώνα οι Έβδομοι γνώρισαν το εξηκονταδικό σύστημα και το ελληνικό στρογγυλό μηδέν και τα συνδύασαν με το δικό τους δεκαδικό πολλαπλασιαστικό σύστημα. Το βήμα αυτό ήταν και το τελειωτικό στη δημιουργία της σύγχρονης αρίθμησης.

Τη νέα Ινδική αρίθμηση την έφεραν στην Ευρώπη οι Άραβες το 10ο ως το 12ο αιώνα (από δω και το όνομα «Άραβικά ψηφία»). Τα πλεονεκτήματα του νέου συστήματος, που βοήθησε τους εμπόρους να κάνουν τους υπολογισμούς τους συντομότερα, το επέβαλαν, και στις αρχές του 17ου αιώνα το δεκαδικό σύστημα «αριθμητικής θέσεως» κατέκτησε όχι μόνο τους εμπόρους αλλά και όλο τον επιστημονικό κόσμο.

Και τώρα ως δομή πως μπορούμε να γράψουμε ένα αριθμό σ' ένα σύστημα «αριθμητικής θέσεως» αρχίζοντας από το γνωστό μας δεκαδικό σύστημα.

Ας πάρουμε τον αριθμό 523. Για να τον γράψουμε στο σύστημα μας, βρίσκουμε στην αρχή το υπόλοιπο από τη διαίρεσή του με το δέκα:

$$523 : 10 = 52 + 3$$

Το υπόλοιπο αυτό θα είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μας. Στη συνέχεια διαιρούμε το ηλίκον της διαίρεσης, το 52, και πάλι με το δέκα:

$$52 = 10 \cdot 5 + 2$$

Το νέο υπόλοιπο θα είναι το δεύτερο από το τέλος ψηφίο του αριθμού. Διαιρούμε και πάλι το νέο ηλίκον 5 με το δέκα και έχουμε:

$$5 = 10 \cdot 0 + 5$$

Το υπόλοιπο είναι το τρίτο από το τέλος ψηφίο του αριθμού, ο οποίος είναι τελικά τριψήφιος γιατί το τελευταίο ηλίκο 5 είναι μικρότερο από το διαιρέτη 10.

Η διαδικασία αυτή μπορεί να εμφανισθεί συντομογραφικά ως εξής:

$$523 = 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3$$

Δηλαδή το 5 σημαίνει «πέντε φορές το 100(10<sup>2</sup>)»

\* Είναι και αυτό σύστημα «αριθμητικής θέσεως».

το 2, «δύο φορές το 10» και το 3, «τρεις φορές τη μονάδα (10<sup>0</sup>)».

Όπως βλέπουμε το σύστημα αυτό μας επιτρέπει με δέκα σύμβολα - ψηφία (δέκα μαζί με το μηδέν) να γράψουμε οποιονδήποτε αριθμό θέλουμε, όσο μεγάλος κι αν είναι. Και το ίδιο γιατί διαιρώντας με το 10 θα παίρνουμε πάντοτε υπόλοιπα μικρότερα του.

Νά γιατί το εξηκονταδικό σύστημα αρίθμησης που είναι κι αυτό θεσιολογικό χρειαζόταν εξήντα, διαφορετικά ψηφία. Διότι η διαίρεση σ' αυτό γινόταν αντί με διαιρέτη δέκα με διαιρέτη εξήντα πράγμα που σημαίνει ότι τα υπόλοιπα (δρα και τα ψηφία του οποιουδήποτε αριθμού) μπορούσαν να είναι από 1 έως και 59.

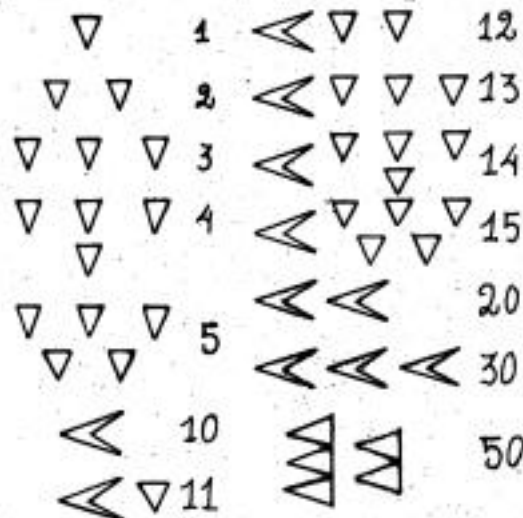
Στο σύστημα αυτό οι Βαβυλώνιοι θα έγραφαν τον αριθμό πέντε εκατομμύρια ένδεκα χιλιάδες εκατόν εξήντα επτά ως εξής: 23, 11, 59, 27 φυσικά με τα αντίστοιχα σύμβολα για τους αριθμούς, 23, 11, 59, 27. Για το 23 π. χ. θα χρησιμοποιούσαν το σύμ-

βολο για το 11

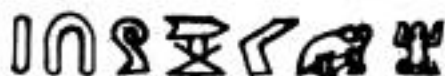
Η γραφή αυτή 23, 11, 59, 27 σημαίνει:

$$23 \cdot 60^3 + 11 \cdot 60^2 + 59 \cdot 60 + 27(4.980.000 + 39.600 + 3.540 + 27 = 5.011.167)$$

Θα ήταν απερίσκεπτο και αντιεπιστημονικό να πιστέψουμε ότι το σύστημα που χρησιμοποιούμε σήμερα έχει πια αποκτήσει την οριστική του μορφή. Βέβαια η καταπληκτική απλότητά του το επέβαλε στη ζωή μας, αλλά οι νέες ανάγκες της που καθιέρωσαν τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές, επιβάλλουν τη χρήση κι ενός άλλου συστήματος, του δυαδικού, που με δυο ψηφία, (αντιστοιχούν το ένα στο ξεκίνημα και το άλλο στη στάση της μηχανής) εκφράζει όλους τους αριθμούς.



Ἡ σφηνοειδῆς γραφὴ ἀριθμῶν στὴν ἀρχαία Βαβυλώνα.



Γιὰ τὴ γραφὴ ἀριθμῶν οἱ Ἀρχαῖοι Αἰγύπτιοι χρησιμοποιοῦσαν ἱερογλυφικά ποὺ σήμαιναν (μὲ τὴ σειρά) τὴ μονάδα, τὸ δέκα, τὸ ἑκατό, τὸ χίλια, τὸ δέκα χιλιάδες, τὸ ἑκατό χιλιάδες (βάτραχος) τὸ ἑκατομμύριο (ἓνας ἄνθρωπος μὲ σηκωμένα χέρια), τὰ δέκα ἑκατομμύρια.

Ὑποθέτουν ὅτι τὸ ἱερογλυφικὸ γιὰ τὴν ἑκατοντάδα παριστάνει τὸ μετρικὸ σχοινὶ γιὰ τὴ χιλιάδα-ἄνθος λωτοῦ, γιὰ τὴς δέκα χιλιάδες-ἓνα ἀνασηκωμένο δάχτυλο καὶ γιὰ τὰ δέκα ἑκατομμύρια-ὀλόκληρο τὸ Σύμπαν.



Ὁ ἀριθμὸς 15 γραμμένος μὲ τὰ ἱερογλυφικά τῶν ἀρχαίων Αἰγυπτίων.

•	1	𐀀	20	𐀀𐀀	200
••	2	𐀀𐀁	30	𐀀𐀀𐀀	400
•••	3	𐀀𐀀𐀀	40	𐀀𐀀𐀀𐀀	500
••••	4	𐀀𐀀𐀀𐀀	50	𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀	1000
•••••	5	𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀	60	𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀	8000
••••••	6	𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀	70	𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀	
•••••••	7	𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀	80	𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀	
••••••••	8	𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀	90	𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀	
•••••••••	9	𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀	100	𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀	
••••••••••	10	𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀		𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀	
•••••••••••	15	𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀		𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀	

Οἱ ἀριθμοὶ ὅπως τοὺς ἔγραφαν οἱ Ἰνδιάνικες φυλὲς τῶν Ἀζτέκων τὸν ἑνδέκατο ἕως τὸν δέκατο ἕκτο αἰῶνα.

I	1	VI	6
II	2	VII	7
III	3	VIII	8
IV	4	IX	9

V	5	X	10
L	50	D	500
C	100	M	1000

CD×LIIV → ὁ ἀριθμὸς 444

Ψηφία στὴν Ἀρχαία Ρώμη.

○	1	○○	7
○○	2	○○○	8
○○○	3	○○○○	9
○○○○	4	=====	10
=====	5	=====	15
=====○	6	=====○	20

Ψηφία τῶν Ἰνδιάνων τῆς φυλῆς τῶν Μάγια.

Πολλοὶ λαοί, ὅπως οἱ Ἴωνες οἱ ἀρχαῖοι Ἑβραῖοι οἱ Φοῖνικες, οἱ Ἀρμένιοι οἱ Γεωργιανοί, οἱ Ἕλληνες καὶ οἱ Σλαβοὶ εἶχαν ἀλφαβητικὸ σύστημα γιὰ τὴ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν.

Οἱ ἀλφαβητικὲς ἀριθμήσεις ἐπειδὴ εἶχαν ἀρκετὰ ξεχωριστὰ ψηφία (24·27) παρουσιάζουν σοβαρὰ κλεονεκτήματα ἀπέναντι π.χ. στὴν αἰγυπτιακὴ ἢ τὴ βαβυλωνιακὴ ἀρίθμηση ποὺ διέθεταν πολὺ λίγα ψηφία (ἡ αἰγυπτιακὴ διέθετε μόνο 3 ψηφία γιὰ νὰ παραστήσει ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς ὡς τὸ 1000). Εἶχαν ὅμως οἱ ἀλφαβητικὲς ἀριθμήσεις μιὰ μεγάλη ἀδυναμία· δὲν μποροῦσε κανένας νὰ παραστήσει πῶς μεγάλους ἀριθμοὺς ἀπὸ τὸ χίλια.

ā	1	ī	10	ρ	100	α,	1000
β	2	κ	20	σ	200	β,	2000
γ	3	λ	30	τ	300		
δ	4	μ	40	υ	400		
ε	5	ν	50	φ	500		
ς	6	ξ	60	χ	600		
ζ	7	ο	70	ψ	700		
η	8	π	80	ω	800		
θ	9	ι	90	ϖ	900		

\*Ανάλογη εἶναι καὶ ἡ παράσταση τῶν ἀριθμῶν στοὺς σλαβικοὺς λαοὺς ποὺ χρησιμοποιοῦσαν μὲ ἀντίστοιχο τρόπο τὸ δικό τους ἀλφάβητο.