Authors: Κουρκουρής Ν., Θ. Καραμάνου

Title: Ά Τάξη Γυμνασίου-------

Abstract: Άλγεβρα, Ακέραιοι Αριθμοί, δυνάμεις, Γεωμετρία, συμπληρωματικές και παραπληρωματικές γωνίες

Creator: HDML

ΓΙΑ ΤΗΝ Α' ΤΑΞΗ

1. Ἴσοι καὶ ἄνισοι ἀκέραιοι

Ἂν α εἶναι ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς συνόλου Α καὶ β ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς συνόλου Β θὰ ἔχουμε:

$$\boxed{A \sim B \Leftrightarrow \alpha = \beta} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{A \subset B \Leftrightarrow \alpha < \beta}.$$

2. Πρόσθεση ἀκεραίων

Ἂν Α, Β εἶναι δύο σύνολα ξένα μεταξύ τους μὲ πληθικοὺς ἀριθμοὺς α, β ἀντίστοιχα, ὀνομάζουμε «ἄθροισμα $\alpha+\beta$» τὸν πληθικὸ ἀριθμὸ γ τοῦ συνόλου $A \cup B$. Σημειώνουμε $\alpha+\beta=\gamma$.

Ἀπὸ τὶς γνωστὲς ἰδιότητες τῆς προσθέσεως ἂς ἐπαληθεύσουμε τὴν προσεταιριστικὴ μὲ παράδειγμα $18+12+15$. Εἶναι:

$$(\alpha+\beta)+\gamma = (18+12)+15 = 30+15 = 45 \quad \text{καὶ}$$

$$\alpha+(\beta+\gamma) = 18+(12+15) = 18+27 = 45 \quad \text{δηλ.}$$

ἐπαληθεύσαμε ὅτι:

$$(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma).$$

3. Ἀφαίρεση ἀκεραίων

Ἂν α, β εἶναι οἱ πληθικοὶ ἀριθμοὶ τῶν συνόλων Α, Β ἀντίστοιχα καὶ $B \subseteq A$, ὀνομάζουμε «διαφορὰ $\alpha-\beta$» τὸν πληθικὸ ἀριθμὸ x τοῦ συμπληρώματος Β' τοῦ συνόλου Β ὡς πρὸς α εἶναι:

$$\boxed{\alpha-\beta = x \Leftrightarrow \beta+x = \alpha}.$$

Ἂς ἐφαρμόσουμε τώρα μερικὲς ἀπὸ τῆς ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως.

1ο παράδειγμα. Νὰ ἐπαληθεύσετε τὴν ἰδιότητα $\alpha+(\beta-\gamma) = (\alpha+\beta)-\gamma$ **μὲ παράδειγμα:**

$$\alpha = 8, \quad \beta = 5, \quad \gamma = 1.$$

Λύση.

1ο μέλος $= \alpha+(\beta-\gamma) = 8+(5-1) = 8+4 = 12$

2ο μέλος $= (\alpha+\beta)-\gamma = (8+5)-1 = 13-1 = 12.$

2ο παράδειγμα. Νὰ βρεθῆ μὲ δύο τρόπους:

$$50-(15+5).$$

Λύση. 1ος τρόπος χωρὶς ἰδιότητα.

$$50-(15+5) = 50-20 = 30$$

2ος τρόπος μὲ τὴν ἰδιότητα:

$$\alpha-(\beta+\gamma) = (\alpha-\beta)-\gamma,$$

$$50-(15+5) = (50-15)-5 = 35-5 = 30.$$

4. Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίων

Ὀνομάζουμε «γινόμενο α β» τὸ ἄθροισμα:

$$\underbrace{\beta+\beta+\cdots+\beta}_{\alpha \text{ φορές}}$$

Ἂς δοῦμε τώρα μερικὰ παραδείγματα ὅπου ἐφαρμόζονται ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

1ο παράδειγμα. Νὰ βρεθῆ μὲ δύο τρόπους:

$$5 \cdot (18-3).$$

Λύση. 1ος τρόπος χωρὶς ἰδιότητα:

$$5\,(18-3) = 5 \cdot 15 = 75.$$

2ος τρόπος μὲ τὴν ἰδιότητα:

$$\alpha\,(\beta-\gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma,$$

$$5 \cdot (18-3) = 5 \cdot 18 - 5 \cdot 3 = 90-15 = 75.$$

2ο παράδειγμα. Νὰ ἐπαληθεύσετε τὴν ἰδιότητα: $(\alpha+\beta)\cdot(\gamma+\delta) = \alpha\cdot\gamma+\alpha\cdot\delta+\beta\cdot\gamma+\beta\cdot\delta$ **μὲ παράδειγμα:**

$$\alpha = 3, \quad \beta = 5, \quad \gamma = 7, \quad \delta = 1.$$

Λύση

1ο μέλος $= (\alpha+\beta)\cdot(\gamma+\delta) = (3+5)\cdot(7+1) = 8\cdot 8 = 64$

2ο μέλος $= \alpha\cdot\gamma+\alpha\cdot\delta+\beta\cdot\gamma+\beta\cdot\delta = 3\cdot 7+3\cdot 1+5\cdot 7+5\cdot 1 =$

$= 21+3+35+5 = 64.$

5. Διαίρεση ἀκεραίων

Ὀνομάζουμε «ἀκριβὲς πηλίκο $\beta:\alpha$» τὸν ἀκέραιο x, ἂν ὑπάρχει, τέτοιον ὥστε $\alpha\cdot x = \beta$ εἶναι:

$$\boxed{\beta : \alpha = x \Leftrightarrow \alpha \cdot x = \beta}$$

$$\text{ἂν} \quad \beta \in N_0, \quad \alpha \in N.$$

Ἂς ἐφαρμόσουμε τώρα μερικὲς ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.

1ο παράδειγμα. Νὰ βρεθῆ μὲ δύο τρόπους:

$$(35+25+15):5.$$

Λύση. 1ος τρόπος χωρὶς ἰδιότητα:

$$(35+25+15):5 = 75:5 = 15.$$

2°ς τρόπος μὲ τὴν ἰδιότητα:

$$(\alpha+\beta+\gamma):\delta = \alpha:\delta+\beta:\delta+\gamma:\delta,$$

$$(35+25+15):5 = 35:5+25:5+15:5 = 7+5+3 = 15.$$

2° παράδειγμα. Νὰ ἐπαληθεύσετε τὴν ἰδιότητα: $\alpha:(\beta\cdot\gamma) = (\alpha:\beta):\gamma$ **μὲ παράδειγμα:**

$$\alpha = 60, \quad \beta = 3, \quad \gamma = 2.$$

Λύση.

1° μέλος $= \alpha:(\beta\cdot\gamma) = 60:(3\cdot 2) = 60:6 = 10.$

2° μέλος $= (\alpha:\beta):\gamma = (60:3):2 = 20:2 = 10.$

6. Ἐξισώσεις

(1) $x-\alpha=\beta \Leftrightarrow x=\beta+\alpha$

π.χ. $x-13=20 \Leftrightarrow x=20+13 \Leftrightarrow x=33$

(2) $x+\alpha=\beta \Leftrightarrow x=\beta-\alpha$

π.χ. $x+9=11 \Leftrightarrow x=11-9 \Leftrightarrow x=2$

(3) $\alpha-x=\beta \Leftrightarrow x=\alpha-\beta$

π.χ. $13-x=4 \Leftrightarrow x=13-4 \Leftrightarrow x=9$

(4) $\alpha\cdot x=\beta \Leftrightarrow x=\beta:\alpha$ ὅπου $\alpha\neq 0$

π.χ. $3\cdot x=42 \Leftrightarrow x=42:3 \Leftrightarrow x=14$

(5) $x:\alpha=\beta \Leftrightarrow x=\beta\cdot\alpha$ ὅπου $\alpha\neq 0$

π.χ. $x:15=3 \Leftrightarrow x=3\cdot 15 \Leftrightarrow x=45$

(6) $\beta:x=\alpha \Leftrightarrow x=\beta:\alpha$ ὅπου $\alpha\neq 0$

π.χ. $160:x=8 \Rightarrow x=160:8 \Leftrightarrow x=20.$

Παρατηρήσεις: 1) Ἡ ἐξίσωση:

$9\cdot x=\alpha$ ὅπου $\alpha\neq 0$, π.χ. $0\,x=13$

εἶναι ἀδύνατη, δηλ. δὲν ὑπάρχει τιμὴ τοῦ x ποὺ νὰ τὴν ἐπαληθεύει. 2) Ἡ ἐξίσωση $0\cdot x=0$ εἶναι ἀόριστη δηλ. ἀληθεύει γιὰ κάθε τιμὴ τοῦ x.

Ἂς δοῦμε τώρα πῶς ἐφαρμόζονται οἱ ἰδιότητες τῶν πράξεων στὶς ἐξισώσεις.

1° παράδειγμα. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωση:

$$3\cdot(x+1)+5\cdot(4+4) = 103 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x+3\cdot 1+5x+5\cdot 4 = 103 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x+5\cdot x+3+20 = 103 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8\cdot x+23 = 103 \Leftrightarrow 8\cdot x = 103-23 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8\cdot x = 80 \Leftrightarrow 8 = 80:8 \Leftrightarrow x = 10.$$

2° παράδειγμα. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωση:

$$5\,(x+4)-5\cdot x = 41.$$

Λύση.

$$5\,(x+4)-5\cdot x = 41 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5\cdot x+5\cdot 4-5\cdot x = 41 \Leftrightarrow$$
$$\Leftarrow 5\,x-5\,x+20 = 41 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0\cdot x+20 = 41 \Leftrightarrow 0\cdot x = 41-20 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0\cdot x = 41$$

ἐξίσωση ἀδύνατη.

7. Προβλήματα

Ὅταν σχηματίζουμε ἐξίσωση γιὰ νὰ λύσουμε ἕνα πρόβλημα, πρέπει νὰ προσέχουμε ὥστε ἡ ἐξίσωση αὐτὴ νὰ ἐκφράζει μὲ σύμβολα, ὅ,τι τὸ πρόβλημα μὲ λέξεις. Π.χ. Τὸ τριπλάσιο ἀριθμοῦ ὅταν αὐξηθῇ κατὰ 2 εἶναι 62, ἐκφράζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωση $3\cdot x+2 = 62$.

Ἂς δοῦμε τώρα πότε ἔχουμε «διαίρεση μετρήσεως» καὶ πότε «διαίρεση μερισμοῦ».

1° πρόβλημα. Νὰ μοιρασθοῦν 45 παιγνίδια σὲ 15 παιδιά.

Λύση 45 παιχνίδια : 15 παιδιὰ = 3 παιχνίδια. Ἐδῶ ἔχουμε διαίρεση μερισμοῦ διότι ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης δὲν εἶναι ὁμοειδεῖς ἀριθμοί.

2° πρόβλημα. Πόσες αἴθουσες χρειαζόμαστε γιὰ νὰ τοποθετήσουμε 140 μαθητὲς σὲ αἴθουσες ποὺ χωρᾶνε 35 μαθητές;

Λύση. 140 μαθητές : 35 μαθητὲς = 4 αἴθουσες.

Ἐδῶ ἔχουμε διαίρεση μετρήσεως διότι ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι ὁμοειδεῖς ἀριθμοί.

3° πρόβλημα. Ἕνας μαθητὴς ἀγοράζει μία σοκολάτα τῶν 10 δρχ. καὶ δίνει ἕνα πενηντάδραχμο. Μπορεῖς νὰ σκεφθεῖς μὲ πόσους τρόπους μποροῦν νὰ τοῦ δώσουν τὰ ὑπόλοιπα (ρέστα) μὲ δεκάδραχμα, πεντάδραχμα καὶ δίδραχμα; Ἐμεῖς δὲν θὰ σοῦ ποῦμε γιὰ νὰ ἔχεις τὴν εὐχαρίστηση νὰ συναγωνιστεῖς σὲ ἀνακάλυψη τρόπων μὲ τοὺς συμμαθητές σου.

8. Δυνάμεις ἀκεραίων

Θυμίζουμε τὸν ὁρισμό:

$$\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdots\alpha}_{\nu \text{ φορές}}$$

καὶ τὶς ἰδιότητες:

$$\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}, \quad \alpha^{\mu}:\alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu},$$

$$(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\cdot\nu}, \quad \alpha^1 = \alpha, \quad \alpha^0 = 1.$$

Παράδειγμα. Νὰ ἁπλοποιηθῇ πρῶτα ἡ παράσταση: $[\alpha^5\cdot(\alpha^2)^3]^2:(\alpha^2)^8$ **καὶ κατόπιν νὰ βρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμή της ὅταν** $\alpha = 3$.

Λύση. Είναι :

$$[\alpha^3\cdot(\alpha^2)^3]^2 : (\alpha^2)^8 = [\alpha^3\cdot\alpha^{2\cdot 3}]^2 : \alpha^{2\cdot 8} =$$

$$= (\alpha^3\cdot\alpha^6)^2 : \alpha^{16} = (\alpha^{3+6})^2 : \alpha^{16} = (\alpha^9)^2 : \alpha^{16} =$$

$$= \alpha^{18} : \alpha^{16} = \alpha^{18-16} = \alpha^2 = 3^2 = 3\cdot 3 = 9.$$

Ἀσκήσεις πού προτείνονται γιά λύση

Α.21 Νά βρεθοῦν μέ δύο τρόπους :

α) $150-(42+8)$
β) $60-(23-3)$
γ) $(34+6)\cdot(24+5)$
δ) $(80\cdot 3) : 20$
ε) $180 : (2\cdot 3\cdot 5)$.

Α.22 Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις :

α) $x : 4 = 8$
β) $5\,(x-1)+2\cdot(x+3) = 71$
γ) $20-(3-x) = 120$
δ) $2\cdot x-(2\cdot x\cdot 6) = 6$.

Α.23 Πέντε ἐργάτες καί τρεῖς ἐργάτριες πῆραν σέ τρεῖς μέρες 7560 δρχ. Ἄν τό ἡμερομίσθιο κάθε ἐργάτη εἶναι κατά 120 δρχ. μεγαλύτερο ἀπό τό ἡμερομίσθιο κάθε ἐργάτριας νά βρεθεῖ τό ἡμερομίσθιο ἐργοδηγοῦ πού παίρνει ὅσο ἕνας ἐργάτης καί μιά ἐργάτρια μαζί.

Α.24 Ἄν $(\alpha+\beta+\gamma)\,4 = 12$ καί $\alpha, \beta, \gamma \in N^0$ ποιές εἶναι οἱ δυνατές τιμές τῶν α, β, γ ;

Α.25 Νά γράψετε τά σύνολα :

$A = \{x \mid x \text{ πολ}\}$,
$B = \{x \mid x \text{ πολ } 3 < 15\}$,
$\Gamma = \{x \mid x \text{ πολ } 3 \leqslant 12\}$,
$\Delta = \{x \mid x : 6 \leqslant x \text{ πολ } 3 < 15\}$

μέ ἀναγραφή τῶν στοιχείων τους καί νά βρῆτε τίς σχέσεις ἰσότητας καί τίς σχέσεις ἐγκλεισμοῦ.

Α.26 Νά ἀπλοποιήσετε τίς παραστάσεις :

$$A = (\alpha^2\beta)^2\cdot\alpha\beta^3, \quad B = (\alpha\beta^4)^3 : (\alpha\beta^2)^2$$

καί κατόπιν νά βρῆτε :

$$A\cdot B \quad \text{καί} \quad (A^2\cdot B)^3 : (A^5\cdot B).$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ἀσκήσεις λυμένες

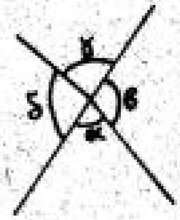
1. Ἀπό σημεῖο Ο φέρνουμε 4 ἡμιευθεῖες, πού σχηματίζουν 4 γωνίες :

$$\widehat{\alpha},\ \widehat{\beta},\ \widehat{\gamma},\ \widehat{\delta}.$$

Ἄν ἡ :

$$\widehat{\alpha} = \frac{2}{3} \text{ ὀρθή},$$

ἡ $\widehat{\beta}$ εἶναι διπλάσια τῆς $\widehat{\gamma}$ καί ἡ $\widehat{\delta}$ κατά 24^0 μεγαλύτερη τῆς $\widehat{\gamma}$, νά ὑπολογίσετε τά μέτρα τῶν τεσσάρων γωνιῶν σέ μοίρες.



Λύση. Ὀνομάζω τή γωνία $\widehat{\gamma} = x$. Τότε :

$$\widehat{\beta} = 2x \quad \text{καί} \quad \widehat{\delta} = x + 24^0.$$

Ξέρουμε ὅτι :

$$\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}+\widehat{\gamma}+\widehat{\delta} = 360^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \text{ ὀρθ.} + 2x + x + x + 24^0 = 360^0,$$

ἀλλά :

$$\widehat{\alpha} = \frac{2}{3} \text{ ὀρθ.} = \frac{2}{3}\cdot 90^0 = \frac{180^0}{3} = 60^0,$$

ὁπότε
$$60^0 + 2x + x + x + 24^0 = 360^0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 84^0 + 4x = 360^0 \Leftrightarrow 4x = 360^0 - 84^0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x = 276^0 \Leftrightarrow x = 276^0 : 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 69^0.$$

Δηλαδή :

$$\widehat{\alpha} = 60^0,\ \widehat{\beta} = 2\cdot 69^0,\ \widehat{\gamma} = 69^0,\ \widehat{\delta} = 69^0 + 24^0.$$

Ἀπάντηση :

$$\widehat{\alpha} = 60^0,\ \widehat{\beta} = 138^0,\ \widehat{\gamma} = 69^0,\ \widehat{\delta} = 91^0.$$

2. Δίνεται γωνία ἴση μέ $\frac{1}{6}$ ὀρθή. Νά βρεθεῖ ἡ διαφορά τῆς γωνίας ἀπό τή συμπληρωματική καί τήν παραπληρωματική της.

Λύση. Ξέρουμε ὅτι :

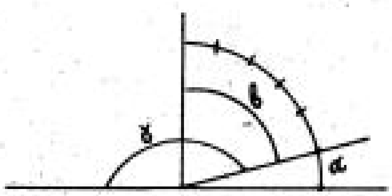
$$\widehat{\alpha} = \frac{1}{6} \text{ ὀρθ.} = \frac{1}{6}\cdot 90^0 = \frac{90^0}{6} = 15^0$$

1) Ἡ συμπληρωματικὴ τῆς α θὰ εἶναι :

$$\widehat{\beta} = 1 \text{ ὀρθ.} - \widehat{\alpha} = 90^0 - \widehat{\alpha} = 90^0 - 15^0 = 75^0$$

καὶ ἡ διαφορὰ τῆς $\widehat{\alpha}$ ἀπὸ τὴ $\widehat{\beta}$ εἶναι :

$$\widehat{\beta} - \widehat{\alpha} = 75^0 - 15^0 = 60^0.$$



2) Ἡ παραπληρωματικὴ τῆς $\widehat{\alpha}$ θὰ εἶναι :

$$\widehat{\gamma} = 2 \text{ ὀρθ.} - \widehat{\alpha} = 180^0 - \widehat{\alpha} = 180^0 - 15^0 = 165^0$$

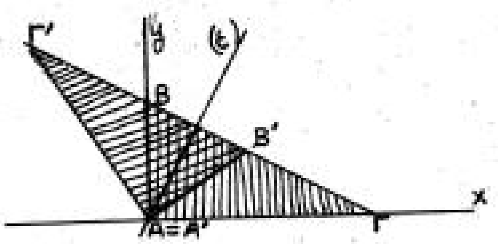
καὶ ἡ διαφορὰ τῆς $\widehat{\alpha}$ ἀπὸ τὴ $\widehat{\gamma}$ εἶναι :

$$\widehat{\gamma} - \widehat{\alpha} = 165^0 - 15^0 = 150^0.$$

3. Νὰ σχεδιάσετε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ μὲ κάθετες πλευρὲς

ΑΒ = 4 cm καὶ ΑΒ = 5 cm.

Νὰ βρῆτε τὸ συμμετρικὸ τοῦ ΑΒΓ α) ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖα τὴν κάτετη ἀπὸ τὸ Α στὴ ΒΓ β) ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖα τὴν κάθετη στὴ ΒΓ στὸ σημεῖο Β.



Λύση. α) Μὲ τὸ γνωστὸ τρόπο κατασκευάζω μιὰ ὀρθὴ γωνία xAy.

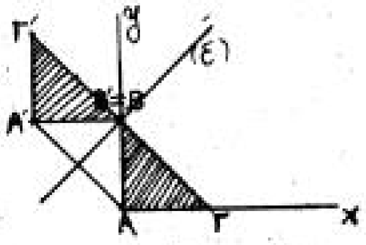
Πάνω στὶς πλευρές της παίρνω τμήματα :

ΑΒ = 4 cm καὶ ΑΓ = 5 cm

καὶ σχεδιάζω τὸ τρίγωνο ΑΒΓ.

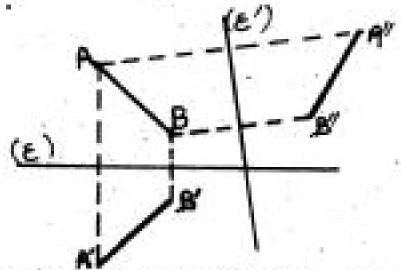
Ἀπὸ τὸ σημεῖο Α φέρνω τὴν εὐθεῖα (ε) κάθετη στὴ ΒΓ. Στὴ συνέχεια βρίσκω τὰ συμμετρικὰ τῶν Β καὶ Γ ὡς πρὸς τὴν (ε), τὸ Β′ καὶ τὸ Γ′. Τὸ συμμετρικὸ τοῦ Α εἶναι ὁ ἑαυτός του γιατὶ τὸ Α εἶναι σημεῖο τῆς (ε).

Τὸ τρίγωνο Α′Β′Γ′ εἶναι τὸ συμμετρικὸ τοῦ ΑΒΓ ὡς πρὸς τὴν (ε).



β) Ἡ κατασκευὴ γίνεται ὅπως καὶ προηγούμενα.

4. Δίνεται εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ καὶ τὰ συμμετρικά του, Α′Β′ ὡς πρὸς μία εὐθεῖα (ε) καὶ Α″Β″ ὡς πρὸς μία εὐθεῖα (ε′). Νὰ συγκριθοῦν τὰ Α′Β′ καὶ Α″Β″.



Λύση. Ἐπειδὴ τὰ συμμετρικὰ ὡς πρὸς μία εὐθεῖα εὐθ. τμήματα εἶναι ἴσα. Ἄρα ἀπό :

$\Sigma(\varepsilon) \Rightarrow AB = A'B'$

ἀλλὰ καί : $\Sigma(\varepsilon') \Rightarrow AB = A''B''$.

Ἄρα : $A'B' = A''B''$.

Ἀσκήσεις ποὺ προτείνονται γιὰ λύση

Α.27 Ἀπὸ ἕνα σημεῖο Ο μιᾶς εὐθείας (ε) σχεδιάζουμε πρὸς τὸ ἴδιο μέρος τοῦ ἐπιπέδου δυὸ ἡμιευθεῖες ΟΑ καὶ ΟΒ. Ἀπὸ τὶς τρεῖς διαδοχικὲς γωνίες ποὺ σχηματίζονται εἶναι ἡ $\widehat{\alpha} = \frac{3}{5}$ ὀρθ. καὶ ἡ $\widehat{\beta}$ κατὰ 30^0 μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ $\widehat{\gamma}$. Νὰ βρεθοῦν τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν.

Α.28 Δίνεται γωνία $x\widehat{O}y = 56^0$. Νὰ προεκτείνετε τὴ διχοτόμο ΟΑ τῆς γωνίας μέσα στὴ μὴ κυρτὴ καὶ νὰ βρῆτε τὶς γωνίες Α′Οx καὶ Α′Οy ποὺ σχηματίζονται ἀπὸ τὴν προέκταση ΟΑ′ τῆς ΟΑ.

Α.29 Νὰ σχεδιάσετε ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ μὲ κάθετες πλευρὲς ΑΒ = 4 cm καὶ ΒΓ = 6 cm. Ἂν Μ εἶναι τὸ μέσο τῆς ΑΓ νὰ βρῆτε τὸ συμμετρικὸ τοῦ ΑΒΓ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖα ΒΜ.

Α.30 Δίνεται γωνία $x\widehat{O}y$ καὶ ἕνα σημεῖο Α ἔξω ἀπὸ τὴν εὐθεῖα. Ἂν Α′ τὸ συμμετρικὸ τοῦ Α ὡς πρὸς τὴ διχοτόμο τῆς $x\widehat{O}y$ δεῖξτε ὅτι : ΟΑ = ΟΑ′.