Author: Konstantin Stathakopoulos

Title: Stetigkeit des Spektrums im Kleinen Einer Klasse Nichtlineare Operatoren I

Creator: HDML

BULLETIN OF THE GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
Vol. 21(1980)

STETIGKEIT DES SPECTRUMS IM KLEINEN EINER KLASSE NICHTLINEARE OPERATOREN I

By
Konstantin Stathakopoulos

In this note it is proved that the spectrum of a class of nonlinear continuous operators, which have a Fréchet derivative, is continuous.

Im Folgenden bezeichne E einen geordneten (B)-Raum mit positivem Kegel K, P einen linearen strikt positiven und kompakten Operator in E, dessen Spektralradius $r(P)=:r\neq o$ ein Pol erster Ordnung der Resolvente von P ist ([3] p. 270,3.2). Ferner sei G eine stetige Abbildung des Kegels K in sich, die nur an der Stelle x=0 den Wert o annimmt und derart, dass P die starke Fréchet-Ableitung von T:=P+PG in Bezug auf den Kegel K an der Stelle x=0 ist ([5]).

Mit diesen Vereinbarungen erhalten wir:

Der Raum $E_1 := \{h \in E: Ph=rh\} = (rI-P)^{-1}(0)$ ist endlich - dimensional und E ist die topologische direkte Summe von E_1 und $E^1 := (rI-P)(E)$, $E=E_1 \oplus E^1$ ([2], p. 148, Th. 1.). Daher sind die entspechenden Projektionen P_1 bzw. P^1 von E auf E_1 bzw. E^1 stetig. Ausserdem, da $r\neq o$ ein Pol erster Ordnung ist, ist P positiv ([3], p. 265).

Definition 1. Das Spektrum von T heisst an der Stel-

leer stetig, wenn es ein Intervall (t_1, t_2) $(0 \leq t_1 < t_2 \leq \infty)$ existiert so, dass für alle $\varepsilon \in (t_1, t_2)$ stets ein $0 \neq h \in E$ existiert mit $Th = (r+\varepsilon)h$.

Nun, die in der Definition erwähnte Gleichung $(r+\varepsilon)h = Th = PGh$, ist gleichbedeutend mit der Gleichung

$$(r+\varepsilon)(x+y) = P(x+y)+PG(x+y) \quad , \quad x \in E_1 \quad , \quad y \in E^1 \qquad (1)$$

Mit den Projektionen P_1 und P^1 erhalten wir aus (1):

$$\left.\begin{aligned} (r+\varepsilon)P_1(x+y) &= P_1P(x+y)+P_1PG(x+y) \\ (r+\varepsilon)P^1(x+y) &= P^1P(x+y)+P^1PG(x+y) \end{aligned}\right| \quad \text{oder}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon x &= rP_1G(x+y) \\ (r+\varepsilon)y &= Py+PP^1G(x+y) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

denn es gilt: $P(E_1) \subseteq E_1$, $P(E^1) \subseteq E^1$ und folglich $PP_1 = P_1P$ und $PP^1 = P^1P$.

Also ist notwendig und hinreichend für die Stetigkeit des Spektrums von T die Existenz eines Intervalls (t_1, t_2)so, dass für alle $\varepsilon \in (t_1, t_2)$ ein $x \in E_1$ und ein $y \in E^1$ existieren, die die Gleichungen (2) befriedigen.

Lemma 1. *Es existiere die starke Frëchet-Ableitung $G_y(x+y)$ in einer Umgebung V von 0 und ferner existiere ein $\rho_1 > 0$, so dass für alle $\rho \in \mathbb{R}$ mit $0 < \rho \leq \rho_1$ und für alle $x \in E_1$, $y \in E^1$ mit $\|x\|, \|y\| \leq \rho$ stets $G_y(x+y) \leq q(\rho)$ gilt, wobei die Funktion $q(.)$ noch $\lim_{\rho \to 0} q(\rho) = 0$ erfülle.*

Dann genügt G in der Umgebung V von 0 der Lipschitz-Bedingung, d.h. für alle $x \in E_1 \cap V$ und $h_1, h_2 \in E^1 \cap V$ gilt

$$\| G(x+h_1)-G(x+h_2) \| \leq q(\rho)\| h_1-h_2 \|.$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist $G_y(x+y)$ in einer Umgebung V von 0 ein linearer stetiger Operator in E. Daher

gilt:

$$G(x+(y+h))-G(x+y) = G_y(x+y)(h)+\omega(x,y,h)$$

$$\text{mit } \lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|\omega(x,y,h)\|}{\|h\|} = 0$$

Anwendung an der Stelle y=0 ergibt

$$G(x+h_1)-G(x+h_2) = G_y(x+0)(h_1-h_2)+\omega(x,h_1)-\omega(x,h_2),$$

folglich für $h_1 \neq h_2$ gilt:

$$\|G(x+h_1)-G(x+h_2)\| \leq \|h_1-h_2\| \left[\|G_y(x+0)\| + \frac{\|\omega(x,h_1)-\omega(x,h_2)\|}{\|h_1-h_2\|} \right]$$

und somit gilt: $\|G(x+h_1)-G(x+h_2)\| \leq q(\rho)\,\|h_1-h_2\|$, wie man aus der folgenden Abschätzung erhält:

$$\begin{aligned}\omega(x,h_1)-\omega(x,h_2) &= G(x+h_1)-G(x+h_2)+G_y(x+0)(h_2-h_1)\\ &= G(x+h_2+(h_1-h_2))-G(x+h_2)-G_y(x+0)(h_1-h_2)\\ &= G_y(x+h_2)(h_1-h_2)-G_y(x+0)(h_1-h_2)+\omega(x+h_2,h_1-h_2)\end{aligned}$$

$$\text{mit } \lim_{\|h_1-h_2\|\to 0} \frac{\|\omega(x+h_2,h_1-h_2)\|}{\|h_1-h_2\|} = 0$$

Satz 2. *Es mögen die Voraussetzungen von Lemma 1 gelten. Dann existieren Skalare* τ_1,τ_0 *mit* $0 < \tau_1 \leq \tau_0$, *so dass für alle* $x \in E_1$ *mit* $\|x\| \leq \tau_1$ *die zweite Gleichung von (2), d.i.*
$(r+\varepsilon)y = Py+PP^1G(x+y)$ *für jedes* $\varepsilon > 0$ *genau eine Lösung* $y = R(x,\varepsilon)$ *im Kleinen (d.h.* $\|y\| = \|R(x,\varepsilon)\| \leq \tau_0$*) hat.*

Beweis. Ist $U^1 := P|_{E^1}$ (die Einschränkung von P auf E^1), so ist $y = (r+\varepsilon)^{-1}U^1y+(r+\varepsilon)^{-1}PP^1G(x+y)$. Für den zweiten Summanden dieser Gleichung gilt:

$$\|(r+\varepsilon)^{-1}PP^1[G(x+y_1)-G(x+y_2)]\| \leq (r+\varepsilon)^{-1}\|P\|\|P^1\|\,\|G(x+y_1)-G(x+y_2)\|$$

oder nach Lemma 1 $$\leq (r+\varepsilon)^{-1}\|P\|\|P^1\|\; q(\rho)\,\|y_1-y_2\|$$

Weiter ist die Restriktion von $((r+\varepsilon)I-P)$ auf E^1 ein Automorphismus dieses Raumes, dessen Inverses wir mit $\Omega(\varepsilon)$ bezeichnen.

Da $r(U^1)<r$ gilt, ist $\sup\{\|\Omega(\varepsilon)\| : 0<\varepsilon<\infty\}=:\alpha^1<\infty$. Damit erhält man $y=\Omega(\varepsilon)PP^1G(x+y)$.

Es existieren nun Skalare τ_1, τ_0 mit $0<\tau_1\leq\tau_0$, so dass für jedes $\varepsilon>0$ und jedes $x\in S_1:=\{z\in E_1:\|z\|\leq\tau_1\}$ der Operator $\Omega(\varepsilon)PP^1G(x+\,.\,)$ $(y\to\Omega(\varepsilon)PP^1G(x+y))$ kontrahierend wirkt auf der Menge $S^1:=\{y\in E^1:\|y\|\leq\tau_0\}$.

Nach Lemma 1 existiert nämlich ein $\rho_1>0$ und zu jedem $0<\rho\leq\rho_1$ ein $\tau(\rho)=:\tau$ mit $0<\tau\leq\rho$, so dass für alle $x\in E_1$ mit $\|x\|\leq\tau$ und alle $y_1,y_2\in E^1$ mit $\|y_i\|\leq\tau\,(i=1,2)$ stets

$\|G(x+y_1)-G(x+y_2)\|\leq q(\rho)\|y_1-y_2\|$ gilt, wobei $\lim\limits_{\rho\to 0} q(\rho)=0$ gilt.

Somit erhält man

$$\|\Omega(\varepsilon)PP^1[G(x+y_1)-G(x+y_2)]\| \leq \|\Omega(\,)\|\,\|P\|\,\|P^1\|\; q(\rho)\,\|y_1-y_2\|$$
$$\leq \alpha^1\|P\|\,\|P^1\|\; q(\rho)\,\|y_1-y_2\|$$

für alle x, y_i wie oben.

Da aber $\lim\limits_{\rho\to 0} q(\rho)=0$ gilt, existiert ein ρ_0 so, dass für alle $\rho\leq\rho_0$ $\bar{q}:=\alpha^1\|P\|\,\|P^1\|\; q(\rho)<1$ ist. Wir legen ρ_0 für das Folgede fest und setzen $\tau_0:=\tau(\rho_0)$.

Also gilt: $$\|\Omega(\varepsilon)PP^1[G(x+y_1)-G(x+y_2)]\|\leq\bar{q}\|y_1-y_2\| \qquad (3)$$

für alle $x\in E_1$, $y_i\in E^1$ mit $\|x\|\leq\tau_0$, $\|y_i\|\leq\tau_0$.

Andererseits ist

$$\Omega(\varepsilon)PP^1G(x+y)=\Omega(\varepsilon)PP^1[G(x+y)-G(x+0)]+\Omega(\varepsilon)PP^1G(x+0)$$

d.h. $\|\Omega(\varepsilon)PP^1G(x+y)\| \leq \|\Omega(\varepsilon)PP^1[G(x+y)-G(x+0)]\| + \|\Omega(\varepsilon)PP^1G(x+0)\|$
oder $\|\Omega(\varepsilon)PP^1G(x+y)\| \leq \bar{q}\|y\| + \alpha^1\|P\|\|P^1\|\|G(x)\|$
für alle $x \in E_1, y \in E^1$ mit $\|x\| \leq \tau_o$, $\|y\| \leq \tau_o$

Weil aber $G = \vartheta(\|.\|)$ d.h. $\lim\limits_{\|h\|\to 0} \frac{G(h)}{\|h\|} = 0$ ist, gilt:

für alle $\eta>0$ gibt es ein $\delta(\eta)>0$ so, dass aus $\|x\| \leq \delta(\eta)$ folgt $\|G(x)\| \leq \eta\|x\|$.

Somit gilt für $0 < \eta \leq \frac{1-\bar{q}}{\alpha^1\|P\|\|P^1\|}$ und $\tau_1 = \min(\delta(\eta), \tau_o)$

$\|\Omega(\varepsilon)PP^1G(x+y)\| \leq \bar{q}\,\tau_o + \alpha^1\|P\|\|P^1\|\eta\tau_1$, also gilt:

$\|\Omega(\varepsilon)PP^1G(x+y)\| \leq \tau_o$ (4) für alle $x \in S_1$ und alle $y \in S^1$.

Die Relationen (3) und (4) gewährleisten, nach dem Kontraktionsprinzip, die Existenz genau einer Lösung $y=R(x,\varepsilon)$ für alle $x \in S_1$ und alle $\varepsilon>0$, für die Gleichung $y=\Omega(\varepsilon)PP^1G(x+y)$ in S^1, was die Behauptung des Satzes war.

Wir ersetzen nun y durch $R(x,\varepsilon)$ in der ersten Gleichung von (2). Dies ergibt die Verzweigungsgleichung ([1])

$$\varepsilon x = rP_1 G(x+R(x,\varepsilon)) \tag{5}$$

Das Problem der Stetigkeit sowie der Eindeutigkeit des Spektrums von T im Kleinen lautet jetzt folgendermassen:

Gesucht ist ein Intervall so, dass es für jedes ε aus diesem Intervall ein bzw. genau ein $x \in S_1$ gibt, das Lösung von (5) ist.

Bevor wir den fast trivialen Fall $y=R(x,\varepsilon)=0$ als mögliche Lösung der zweiten Gleichung von (2) ausschalten, möchten wir der Vollständigkeit halber auch in diesem Fall unsere Fragen untersuchen.

Lemma 3. *Die Losung $y=R(x,\varepsilon)$ hat folgende Eigenschaften:*

(i) $\lim\limits_{x\to 0} R(x,\varepsilon) = 0$

(ii) sie ist gleich 0 für alle $x \in S_1$ und alle $\varepsilon \in (o,\infty)$ genau dann, wenn $G(x) \in E_1$ für alle $x \in S_1$.

Beweis. (i) Es ist $\lim_{x \to 0} \Omega(\varepsilon)PP^1G(x+y) = \Omega(\varepsilon)PP^1G(0+y)$. Der Operator $\Omega(\varepsilon)PP^1G$ ist in S^1 kotrahierend für jedes $x \in S_1$ und es gilt $\Omega(\varepsilon)PP^1G(0+0)=0$, also ist $y=0$ der einzige Fixpunkt von $\Omega(\varepsilon)PP^1G(0+y)$, somit gilt $\lim_{x \to 0} R(x,\varepsilon)=0$.

(ii) Notwendigkeit: Die Gleichung $(r+\varepsilon)y=Py+PP^1G(x+y)$ ergibt für $y=0$ $PP^1G(x)=0$, und das gilt dann, wenn $P^1G(x)=0$ dies aber gilt wenn und nur wenn $G(x) \in E_1$.

Die Hinlänglichkeit ist offenbar, denn aus $G(x) \in E_1$ für alle $x \in S_1$ folgt: $y=0$ ist eine Lösung, diese ist aber eindeutig bestimmt.

Satz 4. *Sei $y=R(x,\varepsilon)$ gleich 0 für alle $x \in S_1$ und alle $\varepsilon > o$. Dann ist das (positive) Spektrum von T stetig in $S_1 \oplus S^1$ genau dann, wenn es ein Intervall (t_1,t_2) gibt mit der Eigenschaft: für jedes ε aus diesem Intervall existiert ein $0 \neq x \in S_1$ $(\in S_1 \cap K_1)$ mit $\varepsilon x = rG(x)$.*

Beweis. Sei das (positive) Spektrum von T in $S_1 \oplus S^1$ stetig d.h. es existiere ein Intervall (t_1,t_2) $(o \leq t_1 < t_2 < \infty)$, so dass für alle $\varepsilon \in (t_1,t_2)$ ein $0 \neq h \in E$ $(\in K)$ existiert mit $Th = (r+\varepsilon)h$, h ist nach Voraussetzung aus $S_1 \oplus S^1$ also $h = x+y$ mit $x \in S_1$, $y \in S^1$. Ein solches y muss der zweiten Gleichung von (2) genügen, das aber ist nach Voraussetzung stets gleich 0. Daraus folgt die Behauptung.

Umgekehrt seien $\varepsilon \in (t_1,t_2)$ und $0 \neq x \in S_1$ $(\in S_1 \cap K_1)$ mit $\varepsilon x = rG(x)$ dann gilt $Tx = (r+\varepsilon)x$, was zu zeigen war.

Bemerkung: Unter den Voraussetzungen von Satz 4 existiert zu jedem Eigenwert $r+\varepsilon$ von T genau dann ein eindeutig bestimmter Eigenvector aus $S_1 \oplus S^1$, wenn die Gleichung $\varepsilon x = rG(x)$ eindeutig lösbar in S_1 ist.

Für das Weitere ziehen wir folgende Hilfsmittel aus [1] (p. 243, Th. 1.1) heran:

Sei E ein geordneter reeller (B)-Raum mit positivem Kegel K, dann gilt:

Satz 5. *Sei $B \subseteq E$ eine offene beschrankte Menge mit $0 \in B$ und $0 \notin \Gamma := \partial B$ (der Rand von B). Ferner sei $A: \Gamma \cap K \to K$ eine stetige und kompakte Abbildung mit $\inf\{\|Ax\| : x \in \Gamma \cap K\} > o$.*

Dann hat A mindestens einen Eigenvektor $x_o \in \Gamma \cap K$ und dessen zugehoriger Eigenwert ist positiv ($\neq o$).

Definition 2. Die Menge N aller Eigenvektoren von A bilden eine stetige Garbe der Länge ρ wenn für jedes $o < \rho' \leq \rho$ und für jede offene Nullumgebung B, die ganz in $\{x: \|x\| \leq \rho'\}$ liegt, stets $\Gamma \cap N$ nicht leer ist.

Aus Satz 5 folgt der

Satz 6. *Sei A eine kompakte, stetige und positive Abbildug in E und fur alle offenen, in $\{x: \|x\| \leq \rho\}$ enthaltenen Nullumgebungen B gelte $\inf\{\|Ax\| : x \in \partial B \cap K\} > o$.*

Dann ist die Menge der positiven Eigenvektoren von A eine stetige Garbe der Lange ρ.

Wir kehren zu unserem Spezialfall $y = R(x, \varepsilon) = 0$ fur alle $\varepsilon > o$ und alle $x \in S_1$ zuruck.

Sei $G_1 : E_1 \to E_1$ definiert durch $G_1 x = x + Gx$ (s. Lemma 3). Dann ist G_1 positiv, stetig, kompakt und fur alle offenen in S_1 enthaltenen Nullumgebungen B von E_1 ist $\inf\{\|G_1 x\| : x \in \partial B \cap K_1\} > o$ ($K_1 = E_1 \cap K$). Somit folgt aus Satz 6 der

Satz 7. *Die positiven Eigenvektoren von G_1 bilden eine stetige Garbe N der Lange τ_1.*

Sei $N_1 := \{x \in K_1 : x$ ist Eigenvektor von G_1, $\|x\| = \tau_1\}$. Dann ist N_1 abgeschlossen (vergl. dazu den Beweis von Satz 3 in [5]), also kompakt. Infolgedessen existiert ein $x_o \in N_1$

mit

$$\gamma_o := \frac{\|G_1 x_o\|}{\|x_o\|} = inf\left\{ \frac{\|G_1 x\|}{\|x\|} : x \in N_1 \right\}$$

Daruberhinaus folgt aus $G_1 x = \lambda x$, $0 \neq x \in S_1 \cap K_1$ *stets* $\lambda > 1$, *denn es ist* $\lambda \neq 1$. *Mit dieser Bemerkung gilt fur* $N := \{0 \neq x \in S_1 \cap K_1 : G_1 x = \lambda x\}$ *der*

Satz 8. *Der Intervall* $(1, \gamma_o]$ *ist im positiven Spektrum von* G_1 *enthalten.*

Beweis. Sei $\lambda_o \in (1, \gamma_o)$ nicht Eigenwert von G_1. Es seien $J_1 := (\lambda_o, \infty)$, $J_2 := (1, \lambda_o)$, $F_1 := \{x \in N : \lambda \in J_1\}$, $F_2 := (N \setminus F_1) \cup \{0\}$. Es ist leicht zu sehen, dass F_1 und F_2 abgeschlossen sind und dass sie einen positiven Abstand haben, d.h.

$$d(F_1, F_2) = \inf\{\|x_1 - x_2\| : x_1 \in F_1 , x_2 \in F_2\} =: \alpha > 0$$

Da E_1 von endlicher Dimension ist, ist F_2 kompakt. Also gilt $\sup\{\|x\| : x \in F_2\} = \|x_o\| =: s_o < \tau_1$ $(x_o \in F_2)$.

Seien weiterhin $\varepsilon_o > 0$ mit $\varepsilon_o + s_o = \tau_1$, $\alpha_1 := \min(\varepsilon_o, \frac{\alpha}{2})$, $S(u, \frac{\alpha_1}{2}) := \left\{ x \in E_1 : \|u - x\| < \frac{\alpha_1}{2} \right\}$. Dann gilt für die offene Menge $B := \bigcup_{u \in F_2} S(u, \frac{\alpha_1}{2})$: $0 \in B$, $0 \notin \Gamma = \partial B$ und aus $x \in \bar{B}$ folgt $\|x\| \leq \tau_1$. Ferner ist $\Gamma \cap F_2 = \emptyset$ und $\Gamma \cap F_1 \neq \emptyset$, also $\Gamma \cap N = \emptyset$ und damit N ist keine stetige garbe der Länge τ_1. Widerspruch!

Wir wenden dies Ergebnis auf den Fall $y = R(x, \varepsilon) = 0$ für alle $x \in S_1$, $\varepsilon > 0$ an:

Satz 9. *Das positive Spektrum von* T *ist an der Stelle* r *stetig.*

Beweis. Die Verzweigungsgleichung (5) reduziert sich in unserem Fall auf $\varepsilon x = rG(x)$ (6), und (6) ist äquivalent mit der Gleichung $(1 + \frac{\varepsilon}{r})x = x+G(x)$ (7). Nun gilt nach Satz 8: für alle $\varepsilon \in (o, r(\gamma_o - 1)]$ existiert ein $0 \neq x \in S_1 \cap K_1$ mit $G_1 x = x+Gx = (1 + \frac{\varepsilon}{r})x$, was nach Satz 4 die Stetigkeit des positiven Spektrums von T an der Stelle r impliziert.

Wir kehren nun zum allgemeinen Fall mit $y = R(x,\varepsilon) \neq 0$ (für $0 \neq x \in S_1 \cap K_1$) als Lösung der Gleichung $y=\Omega(\varepsilon)PP^1 G(x+y)$ mit den Voraussetzungen über G wie im Satz 2 zurück.

Die Verzweigungsgleichung $\varepsilon x = rP_1 G(x+R(x,\varepsilon))$ (5) ist äquivalent mit der Gleichung

$$(1 + \frac{\varepsilon}{r})x = P_1(x+G(x+R(x,\varepsilon))) \qquad (8)$$

Die Stetigkeit an der Stelle r des Spektrums von T bedeutet jetzt das Folgende: es existiert ein $\varepsilon_o > o$, so dass für alle $\varepsilon \in (o, \varepsilon_o]$ ein $0 \neq x \in S_1 \cap K_1$ existiert derart, dass (8) gilt.

Zunächst betrachten wir den Operator $P_1 F: E_1 \to E_1$ mit $Fx = x+G(x+R(x,\varepsilon))$.

Sei $x \in S_1 \cap K_1$ so, dass $x+R(x,\varepsilon)$ in K liegt. Wir wissen ([4], Satz 1.1), dass für alle $c>o$ $(c \leq \tau_1)$ ein $x_c \in K_1$ mit $\|x_c\| = c$ und ein $\lambda_c \leq 1$ $(1 = r(P_1))$ existieren so, dass $P_1 F(x_c) = \lambda_c x_c$ gilt. Ferner da $G(x+R(x,\varepsilon)) = \sigma(\|x\|)$ ist (s. unten Lemma 10) bemerken wir, dass $r(P_1) = 1$ Verzweigungspunkt von $P_1 F$ ist ([5], Satz 3).

Mit dem nächsten Lemma geben wir weitere Eigenschaften von $R(x,\varepsilon)$ an, die später benötigt werden.

Lemma 10. *Für $x \in S_1 \cap K_1$ gilt:*

(i) $\|R(x,\varepsilon)\| \leq k\|x\|$ *(k>o konstant)*

(ii) $G(x+R(x,\varepsilon)) = \sigma(\|x\|)$

(iii) $R(x,\varepsilon) = \sigma(\|x\|)$

Beweis. Leichte Abschätzungen.

Die Bedingung $x+R(x,\varepsilon)\in K$ für $x\in S_1\cap K_1$ ist erfüllt für dim $E_1=1$ und $P_1x_o=x_o\in\overset{\circ}{K}$ (beispielsweise ist dies der Fall, wenn $E=\mathfrak{C}(X)$ und P irreduzibel) wie folgendes Lemma zeigt.

Lemma 11. *Sei dim $E_1=1$ mit $x_o\in K$, dann ist $x+R(x,\varepsilon)\in K$ furageeignet kleine $x\in S_1\cap K_1$.*

Beweis. Für jedes $0\neq x\in S_1\cap K_1$ existiert eine Umgebung U von x mit Radius $b\|x\|$ (b>o und unabhängig von x) mit $U(x, b\|x\|)\subseteq K$. Andererseits folgt aus Lemma 10: für alle $\eta>o$ existiert ein $\delta(\eta)>o$ mit $\|R(x,\varepsilon)\|<\eta\|x\|$ für $\|x\|<\delta(\eta)$. Nun gilt für $\eta=b$: $\|R(x,\varepsilon)\|<b\|x\|$ für $\|x\|<\min(\delta(b),\tau_1)$

Also ist $x+R(x,\varepsilon)\in K$ für $x\in S_1\cap K_1$ mit $\|x\|<\min(\delta(b),\tau_1)$.

Dieses Lemma legt nun nahe, allgemein die Bedingung zu stellen, dass $x+R(x,\varepsilon)\in K$ für alle $x\in S_1\cap K_1$ gilt; dies werden wir in Satz 14 tun.

Nun sei $\tilde{P}_1:E_1\to E_1$, definiert durch $\tilde{P}_1x=P_1(x+G(x+R(x,\varepsilon)))$. $\tilde{P}_1$ ist positiv, kompakt, stetig und ausserdem gilt: für alle, offenen Nullumgebungen B mit $\bar{B}\subseteq S_{\tau_1}$ (τ_1: s. Satz 2) ist $\inf\{\|\tilde{P}_1x\|: x\in\partial B\cap K_1\}>o$.

Somit gilt nach Satz 6 der

Satz 12. *Die positiven Eigenvektoren von $\tilde{P}_1$ bilden eine stetige Garbe $\tilde{N}$ der Lange τ_1.*

Es habe G die folgende Eigenschaft: für alle $0\neq x\in S_1\cap K_1$ und $0\neq x+y\in K$ ($y\in E^1$) gilt $P_1G(x+y)\neq 0$. Dann gilt: aus $\tilde{P}_1x=\lambda x$, $x\in K_1$ folgt $\lambda>1$.

Seien $\tilde{N}_1:=\{x\in K: x$ ist Eigenvektor von $\tilde{P}_1$, $\|x\|=\tau_1\}$

und

$$\tilde{\gamma}_o:=\frac{\|\tilde{P}_1x_o\|}{\|x_o\|}=\inf\left\{\frac{\|\tilde{P}_1x\|}{\|x\|}: x\in\tilde{N}_1\right\}$$

Dann gilt fur $\tilde{N}: = \{0 \neq x \in S_1 \cap K_1 :$ *es gibt* λ *mit* $\tilde{P}_1 x = \lambda x\}$ *der*

Satz 13. *Der Intervall* $(1, \tilde{\gamma}_o]$ *liegt im positiven Spektrum von* $\tilde{P}_1$.

Beweis. Man ersetzt im Beweis von Satz 8 G_1 durch $\tilde{P}_1$

Im Satz 9 gilt automatisch $P_1 Gx = Gx \neq 0$ für alle $0 \neq x \in S_1 \cap K_1$ und im Grunde genommen gewährleistet das eben die Stetigkeit des positiven Spektrums von T an der Stelle r. Denn damit gilt $\lambda > 1$ für jeden Eigenwert λ.

Mit dieser Bemerkung wird die Voraussetzung des folgenden Satzes klarer

---

Satz 14. *Habe G die Eigenschaft: fur alle* $0 \neq x \in S_1 \cap K_1$ *und* $0 \neq x+y \in K$ *gilt* $P_1 G(x+y) \neq 0$.

Dann ist das positve Spektrum von T an der Stelle r stetig.

Beweis. Sei $f: R_+ \to (o, \tau_1]$ eine stetige Abbildung mit $\lim_{z \to \infty} f(z) = o$. Dann existiert ([4], Satz 1.1) für alle $z \in R_+$ $x_z \in S_1 \cap K_1$ mit $\|x_z\| = f(z)$ und ein $\lambda_z \geq 1$ mit

$$P_1(x_z + G(x_z + R(x_z, \varepsilon))) = \lambda_z x_z.$$

Es ist leicht zu bestätigen, dass $\lim_{z \to \infty} \lambda_z = 1$ gilt (s.a. [5] Satz 3). Wegen der Voraussetzung $P_1 G(x+y) \neq 0$ gilt $\lambda_z \neq 1$, also ist $\lambda_z = 1 + \frac{\varepsilon_z}{r}$ mit $\varepsilon_z > o$ und ε_z konvergiert gegen o für $z \to \infty$.

Aus Satz 13 folgt: für alle $\varepsilon_z > o$ in einem gewissen (durch f bestimmten) Intervall existieren x_z und λ_z mit $\|x_z\| = f(z)$ und $P_1(x_z + G(x_z + R(x_z, \varepsilon_z))) = (1 + \frac{\varepsilon_z}{r})x_z$, oder $T(x_z + R(x_z, \varepsilon_z)) = (r+\varepsilon_z)(x_z + R(x_z, \varepsilon_z))$ d.h. das positive Spek-

trum von T ist an der Stelle r stetig.

Im Falle dim $E_1 = 1$ und $x_o \in \mathring{K}$ ist P_1 x_o-positiv ([4]) und somit gilt der

Satz 15. *Sei G konkav und monoton, dann ist das positive Spektrum von T an der Stelle r stetig und eindeutig bestimmt.*

Beweis. Siehe Satz 14 für die Stetigkeit und ([4], Satz 2.9) für die Eindeutigkeit.

Schliesslich haben wir zu bemerken, dass eine weite Klasse von Hammersteinschen Integraloperatoren im Kleinen positives und stetiges Spektrum hat.

Darüber seien: Ω eine abgeschlossene und beschränkte Menge von $\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{C}(\Omega)$ der Raum aller reelen stetigen Functionen auf Ω, $K: \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ eine beliebige stetige positive Funktion und $f: \Omega \times [-\alpha,\alpha] \to \mathbb{R}$ $(\alpha>0)$ eine stetige positive Funktion mit den Eigenschaften:

(i) $f(t,o) \equiv o$ und

(ii) es existiere die partielle Ableitung $f_u(t,u)$ in $\Omega \times (-\alpha,\alpha)$ und sie sei auf $\Omega \times [-\alpha,\alpha]$ stetig fortsetzbar mit $f_u(t,o)>o$.

Dann ist der Operator $P: \mathfrak{C}(\Omega) \to \mathfrak{C}(\Omega)$, definiert durch $(P\varphi)(s) = \int_\Omega K_1(s,t)\varphi(t)dt$ $(K_1(s,t) := K(s,t)f_u(t,o))$, die starke Fréchet-Ableitung an der Stell 0 des Hammersteinschen Operators $A: \mathfrak{C}(\Omega) \to \mathfrak{C}(\Omega)$, gegeben durch

$$(A\varphi)(s) = \int_\Omega K(s,t)f(t,\varphi(t))dt$$

Es ist leicht nachzuprüfen, dass die Abbildung $G: \mathfrak{C}(\Omega) \to \mathfrak{C}(\Omega)$ definiert durch

$$(G\varphi)(s) = \frac{f(s,\varphi(s))}{f_u(s,o)} - \varphi(s)$$

der Gleichung $A\varphi=P\varphi+PG\varphi$ genügt.

Damit und gemäss ([5], Satz 4) besitzt die Gleichung $(r+\varepsilon)y = Py+PP^1 G(x+y)$ nach Satz 2 im Kleinen genau eine Lösung $y=R(x,\varepsilon)$. Sie ist andererseits nicht Null, denn die Funktion $\dfrac{x(s)f_{uu}(s,\theta(s)x(s))}{f_u(s,o)}$ ist keine Konstante.

Daraus folgt $G(x) \notin E_1$ für $0 \neq x \in E_1$ und d.h. nach Lemma 3 $y = R(x,\varepsilon) \neq 0$ für alle $0 \neq x \in E_1$ und alle $\varepsilon>o$.

Weiterhin wollen wir zeigen dass für alle $\varepsilon>o$ ein $x \in S_1 \cap K_1$ existiert mit $\varepsilon x = rP_1 G(x+R(x,\varepsilon))$.

Wir machen die Annahmen: dim $E_1=1$ und der Pol $r(P)$ ist von erster Ordnung. (Ist beispielsweise der Kern $K(s,t)$ strikt positive, dann ist auch der Kern $K_1(s,t)$ strikt positiv und damit ist der Operator P irreduzibel, d.h. $r>o$ ([3], App.§3). Nach Krein-Rutmans Theorem ist r Pol der Resolvente und nach dem genannte Satz ([3], App. §3) ist r Pol erster Ordnung , folglich E_1 eindimensional.).

Dann gelten für $0 \neq \varphi_o \in \overset{\circ}{K}$ ($\varphi_o \in E_1$) die Voraussetzungen von Lemma 11 und Satz 14.

Denn sei $P\varphi_o = r\varphi_o$, $\varphi_o \in K_1$, dann existiert ein strikt positives Radon Mass $m \in \mathcal{M}(\Omega)$ mit $P'm = rm$ ($m(\varphi_o)=1$ und P' der adjugierte Operator von P).

Die Abbildung $P_1 : \mathcal{C}(\Omega) \to \mathcal{C}(\Omega)$ definiert durch $P_1\varphi = \varphi_o \int_\varphi dm$ ist die Projection von $E = E_1 \oplus E^1$ auf E_1.

Hieraus ergibt sich, dass das positive Spektrum des Hammersteinschen Operators A unter der angegebenen Voraussetzungen über den Kern $K(s,t)$ und über die Funktion $f(s,u)$ stetig ist.

Literatur

[1] Krasnosel'Skii, M.A. Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations, Oxford-London-New York-Paris, Pergamon Press 1964.

[2] Robertson, A.P.-Robertson, W.J. Topological Vector Spaces, Gambridge 1964.

[3] Schaefer, H.H. Topological Vector Spaces, New York,Macmillan 1966. 3rd Printing, New York-Heidelberg-Berlin, Springen 1971.

[4] Stathakopoulos, K. Uber nichtlineare kompakte Störun - gen von kompakten linearen Operatoren, Bull. Soc. Math. Grêce N.S. 13 (1972), 90-103.

[5] Stathakopoulos, K. Ein Beitrag zur Verzweigungstheorie, mannuscripta math. 15 (1975), 211-218.

Dr. K. Stathakopoulos
Math. Institut der Universität
Athen-143, Solonosstr. 57