Author: Θ. Σκούρας

Title: Η σύνθεση των αναπαραστάσεων στην πορεία διαμόρφωσης αφηρημένων εννοιών. Η περίπτωση της συνάρτησης f(x)=ax2 + βx2 +γ

Abstract: Η χρήση αναπαραστάσεων στη διαδικασία των μαθηματικών υπαγορεύεται από την ίδια την φύση του μαθήματος, αφού συνήθως ελλείπουν οι αντίστοιχες φυσικές αναφορές των μαθηματικών εννοιών ή αντικειμένων

Creator: HDML

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Γ΄, Τόμος 16, Τεύχος 51, 1999

Η σύνδεση των αναπαραστάσεων στην πορεία διαμόρφωσης αφηρημένων εννοιών. Η περίπτωση της συνάρτησης $f(\chi)= \alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$

Θανάσης Σ. Σκούρας

Περίληψη:

Η χρήση αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των μαθηματικών υπαγορεύεται από την ίδια την φύση του μαθήματος, αφού συνήθως ελλείπουν οι αντίστοιχες φυσικές αναφορές των μαθηματικών εννοιών ή αντικειμένων. Ο περιορισμός όμως της διδασκαλίας σε ένα συγκεκριμένο είδος αναπαράστασης π.χ γραφικό, ενδέχεται να προκαλέσει σύγχυση του αντικειμένου και της αναπαραστασής του. Η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων για το ίδιο αντικείμενο αλλά και κυρίως η σύνδεση αυτών αποτρέπει αυτόν τον κίνδυνο και ταυτόχρονα αναδεικνύει το περιεχόμενο του αντικειμένου. Στην παρούσα εργασία περιγράφουμε, μέσα από μια μελέτη περίπτωσης, πώς οι μεταβολές ωρισμένων στοιχείων μιας αναπαράστασης σε ένα δοσμένο επίπεδο και οι αντίστοιχες σε ένα άλλο επίπεδο αναπαράστασης, συμβάλλουν στη θεωρητική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και αντικειμένων.

Abstract:

The usage of representations in teaching mathematics is required due to the subject of mathematics itself,as there is usually a luck of corresponding « natural» references of the mathematics meanings and subjects. The restriction, though. of the teaching in a specific kind of representation, for example graphic, will possibly cause confusion of the subject and its represantation. The usage of multiple represantations for the same subject but mainly the link of these, keeps this danger away and shows the content of the subject at the same time in this project we describe, through a study

case, how the changes of some elements of a representation in a given level and the correspontìng changes in another level *of representation, help the theoritical mathematical meanings and subjects.*

Εισαγωγή

Στα Μαθηματικά πολλές φορές ο ορισμός μιας έννοιας συνδέεται με δυσκολίες στην προσέγγισή της και στην κατάνοησή της αφού -σε αντίθεση με άλλους επιστημονικούς κλάδους-ελλείπουν οι αντίστοιχες φυσικές αναφορές. Για παράδειγμα η έννοια της ταχύτητας στη φυσική παραπέμπει άμεσα σε ένα κινούμενο όχημα ενώ, η έννοια της συνάρτησης δεν οδηγεί αυθόρμητα σε μια φυσική αναφορά μέσω της οποίας θα είχαμε μια πρώτη « φυσική» προσέγγισή της.

Η ιδέα της αναπαράστασης χρησιμοποιείται με ποικίλους βαθμούς ακρίβειας και είναι πολύ λεπτή και πολυσήμαντη. Υπό μια ευρεία έννοια μια αναπαράσταση είναι κάτι που αντιπροσωπεύει ή αντικαθιστά κάτι άλλο, και ως εκ τούτου πρέπει να εμπλέκει κάποιο είδος σχέσης μεταξύ συμβόλων και των αναφορών τους, αν και κάθε αναπαράσταση μπορεί να είναι η ίδια σύνθετη οντότητα. [(4),σελ.. 383]. Τα Μαθηματικά καθαυτά μπορούν να θεωρηθούν ως η επιστήμη της δομής. Ως εκ τούτου μελετούν την αναπαράσταση μιας δομής από μια άλλη, και ακόμα περισσότερο η πραγματική δουλειά των μαθηματικών είναι να καθορίζουν ακριβώς ποιά δομή διατηρείται στην αναπαράσταση. Η ιδέα της αναπαράστασης υπ΄αυτήν την έννοια συμβαδίζει με τα ίδια τα Μαθηματικά. [(6), p. 23]

Υπάρχουν διάφοροι λόγοι που προσφεύγουμε στη χρήση αναπαραστάσεων. Αναφέρουμε μερικούς από αυτούς [(1), σελ. 110].

α) Οι αναπαραστάσεις είναι συμφυές τμήμα των Μαθηματικών. Μάλιστα ορισμένες από αυτές είναι τόσο συνδεδεμένες με μια έννοια που είναι δύσκολο να δεί κανείς πώς η έννοια μπορεί να συλληφθεί χωρίς αυτές. Για παράδειγμα η έννοια της συνάρτησης και η γραφική παράστασή της, η συνδιαστική ανάλυση και το δενδροδιάγραμμα. Μάλιστα αυτές οι αναπαραστάσεις είναι για τους μαθηματικούς εργαλεία για την επεξεργασία των αντίστοιχων εννοιών.

β) Οι αναπαραστάσεις είναι πολλαπλές συγκεκριμενοποιήσεις μιας έννοιας. Έτσι αρκετές διαφορετικές αναπαραστάσεις ίσως περικλείουν την ίδια έννοια ή την ίδια μαθηματική δομή. Με την παρουσίαση αυτών και τη σύλληψη των κοινών ιδιοτήτων, μπορεί να αποσπασθεί και η επιθυμητή δομή.

γ) Οι αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται να μετριάζουν συγκεκριμένες δυσκολίες. Έτσι με τη χρήση τους εφιστάται η προσοχή για μια στιγμή σε μια δυσκολία ή αντικείμενο ή σχέση. Για παράδειγμα μια πρώτη απάντηση για το εάν έχει λύσεις (και πόσες) η εξίσωση:

$$\sigma\upsilon\nu\chi=\chi-1$$

θα μπορούσε να προέλθει αν το πρόβλημα αντιμετωπιζόταν με τον σχεδιασμό των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=\sigma\upsilon\nu\chi$ και $g(\chi)=\chi-1$, αφού οι τετμημένες των κοινών σημείων (αν υπάρχουν) θα είναι και οι λύσεις της εξίσωσης.

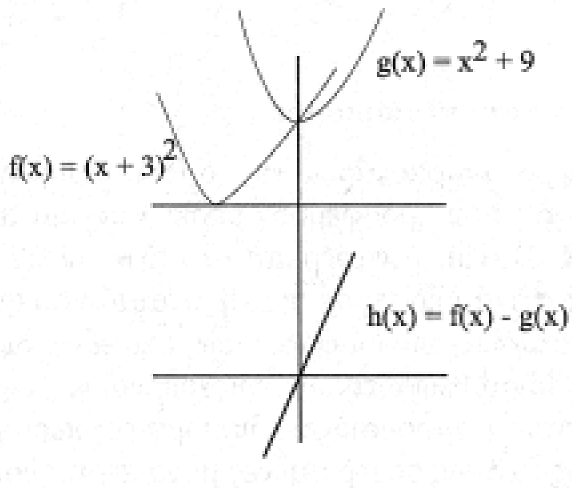
δ) Με τη χρήση αναπαραστάσεων μπορούν τα Μαθηματικά να γίνουν περισσότερο ελκυστικά και ενδιαφέροντα. Η χρήση Η/Υ με τις δυνατότητες που παρέχει να « οπτικοποιεί « έννοιες και ιδέες, μπορεί να συμβάλλει προς αυτή την κατεύθυνση.

Δυνατότητες και περιορισμοί.

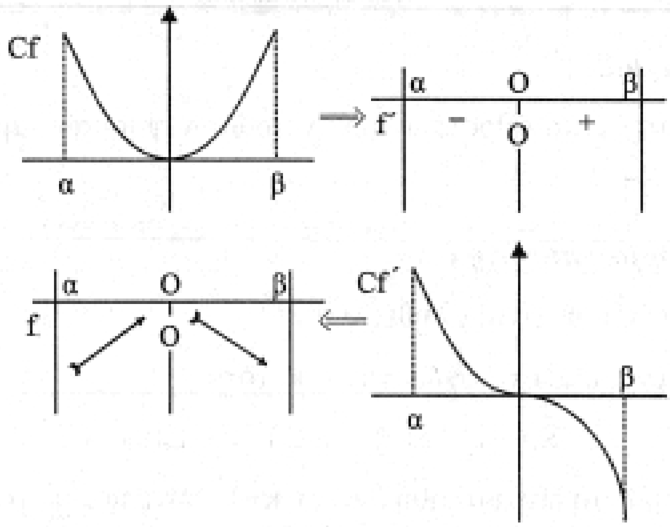
Οι διάφορες αναπαραστάσεις για το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο, μαζί με τις δυνατότητες που προσφέρουν υπόκεινται και σε περιορισμούς. Σύμφωνα με τον **R. Duval**: [αναφέρεται στο (3), σελ.273] «... κάθε αναπαράσταση είναι γνωστικά μερική σε σχέση με αυτό που αναπαριστά, καθώς και ότι οι αναπαραστάσεις των διαφορετικών επιπέδων δεν παρουσιάζουν τις ίδιες όψεις ενός ίδιου θεωρητικού περιεχομένου». Το γεγονός επομένως ότι κάθε αναπαράσταση παρουσιάζει ιδιομορφίες, περιορίζει τις δυνατότητες περιγραφής μιας έννοιας σε ωρισμένες μόνο περιπτώσεις. Έτσι στο γραφικό επίπεδο μόνο διανύσματα μέχρι τρείς συντεταγμένες μπορεί να αναπαρασταθούν, ενώ δεν υπάρχει αναπαράσταση για το μηδενικό διάνυσμα. Αν όμως ως επίπεδο αναπαράστασης για την έννοια του διανύσματος επιλεγεί αυτό των πινάκων, το μηδενικό διάνυσμα μπορεί να αναπαρασταθεί από τον πίνακα -στήλη $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, όμως και εδώ είμαστε υποχρεωμένοι να περιγράφουμε καταστάσεις διανυσμάτων που ανήκουν σε ένα χώρο πεπερασμένης και όχι απείρου διάστασης.[ο.π. σελ. 274].

Το συμβολικό επίπεδο αναπαράστασης έχει μια πληρότητα από την άποψη των δυνατοτήτων στο πληροφοριακό επίπεδο. Για παράδειγμα η εξίσωση ψ=2χ+3 εκφράζει μια ποσοτική σχέση μεταξύ των χ και ψ κατά τρόπο πολύ σαφή. Είναι ένας κανόνας που παράγει ψ από τα χ. Μια τέτοια διαδικαστική γνώση δεν προκύπτει εύκολα από πίνακες ή από τις συντεταγμένες ενός γραφήματος. Η εξίσωση επίσης έχει ένα χαρακτηριστικό (πρόκειται για τον συντελεστή του χ) το οποίο μεταφέρει (μεταβιβάζει)αντιληπτική γνώση για τη σταθερότητα της σχέσης των επιτρεπομένων τιμών των χ και ψ. [(5), σελ. 173].

Αλλά και οι διάφορες διαδικασίες που γίνονται σε κάθε επίπεδο αναπαράστασης (π.χ. πράξεις, αποδείξεις κ.λ.π.), αποτυπώνονται στις δυνατότητες του κάθε επιπέδου. Για παράδειγμα στο γραφικό επίπεδο από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=(x+3)^2$ και $g(x)=x^2+9$ δεν μπορεί να προκύψει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=f(x)-g(x)=(x+3)^2-(x^2+9)$ η οποία είναι μια ευθεία γραμμή, ενώ αυτές των C_f και C_g είναι παραβολές όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Η δυνατότητα αντιστρεψιμότητας των διαδικασιών ποικίλει στα διάφορα επίπεδα αναπαράστασης. Για παράδειγμα στο συμβολικό επίπεδο από μια συνάρτηση f με τη διαδικασία της παραγώγισης μπορεί να ευρεθεί η παράγωγός της f΄. Αλλά και η γνώση της f΄μέσω της διαδικασίας της ολοκλήρωσης μπορεί να οδηγήσει στην εύρεση της f. Στο γραφικό επίπεδο η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο της μπορεί να δώσει πληροφορίες για το πρόσημο της f΄, όμως από την γραφική παράσταση της f΄ δεν προκύπτουν πληροφορίες για τη πρόσημο της f αλλά για την μονοτονία της όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Αυτή η υπεροχή του συμβολικού επιπέδου αναπαράστασης τόσο ως προς τη δυνατότητα αναπαράστασης ενός ευρύτερου φάσματος καταστάσεων όσο και ως προς τη δυνατότητα εκτέλεσης διαφόρων διαδικασιών, δεν σημαίνει κατ΄ανάγκη ότι κάποιες διαδικασίες που μπορούν να πραγματοποιηθούν σε άλλα επίπεδα αναπαράστασης είναι ποιοτικά « κατώτερες» και λιγότερο χρήσιμες από παιδαγωγική κυρίως σκοπιά.. Μάλιστα η δυνατότητα ερμηνείας μιας αναπαράστασης από μια άλλη σε διαφορετικά συστήματα αναπαράστασης ή οι μετασχηματισμοί μέσα σε αυτά είναι πολύ σπουδαία υπόθεση [(7), σελ. 34].

Θα αναφερθούμε σε μια χαρακτηριστική διαδικασία με την οποία είναι εφοδιασμένα τα μαθηματικά. Πρόκειται για τη διαδικασία της (τυπικής) απόδειξης. Αν και η τυπική προσέγγιση στην απόδειξη αναπτύχθηκε, στην πραγματικότητα, για να εξαλείψει την ανάγκη για προσφυγή στην διαισθητική μαρτυρία και στην ανθρώπινη κρίση, αφού και οι δύο είναι γνωστές σαν πιθανές πηγές σοβαρών λαθών, εντούτοις μορφές απόδειξης που μπορεί να λάβουν χώρα σε άλλα επίπεδα αναπαράσασης π.χ γραφικό, γεωμετρικό έχουν ιδιαίτερη αξία για τη μαθηματική κατανόηση. Άλλωστε η μαθηματική κατανόηση που είναι και η επιδίωξη, είναι κάτι πολύ περισσότερο από την επιβεβαίωση ότι όλοι οι κρίκοι μιας αλυσίδας παραγωγής συμπερασμάτων είναι ορθοί [8]. Με το παρακάτω παράδειγμα [αναφέρεται στο (8)] θα γίνουμε περισσότερο κατανοητοί.

Παράδειγμα:

Αποδείξτε ότι το άθροισμα των ν πρώτων φυσικών αριθμών S(ν) είναι ίσο με: ν(ν+1)/2

Απόδειξη με επαγωγή

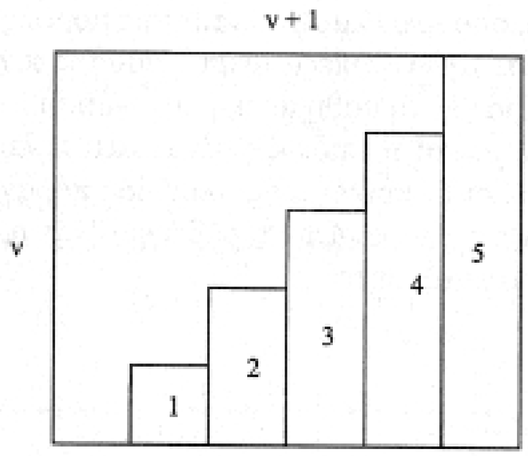
- Το θεώρημα είναι αληθές για ν=1
- Αν δεχθούμε ότι ισχύει για ν=κ, τότε:

$$S(\nu+1)= S(\nu)+ (\nu+1) =(\nu+1)(\nu+2)/2.$$

Άρα η δήλωση είναι αληθής για ν=κ+1. Συνεπώς με βάση την αρχή της τέλειας επαγωγής η δήλωση είναι αληθής για κάθε φυσικό αριθμό. Αυτή η απόδειξη είναι αναμφίβολα μια αποδεκτή απόδειξη. Αυτό όμως που δεν κάνει είναι ότι δεν εξηγεί γιατί το άθροισμα των ν πρώτων φυσικών ισούται με ν(ν+1)/2 ή ποιά χαρακτηριστική ιδιότητα του αθροίσματος των των ν πρώτων όρων πρέπει να είναι υπεύθυνη για την τιμή ν(ν+1)/2. Άλλωστε οι αποδείξεις με επαγωγή δεν χαρακτηρίζονται ως επεξηγηματικές.

Απόδειξη με γεωμετρική αναπαράσταση των όρων του αθροίσματος.

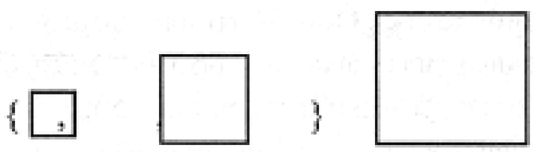
Μια αναπαράσταση των ν πρώτων όρων του αθροίσμστος θα μπορούσε να δοθεί με τα σκαλοπάτια μιας σκάλας την οποία δημιουργούμε ως εξής: Ένα ορθογώνιο διαστάσεων ν και ν+1 διαιρείται με μια zigzag γραμμή όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.. Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι ν(ν+1), έτσι το εμβαδό της σκάλας που είναι το μισό του εμβαδού του ορθογωνίου θα είναι ν(ν+1)/2.



Πολλαπλές αναπαραστάσεις και διαμόρφωση αφηρημένων εννοιών.

Το γεγονός ότι μια έννοια μπορεί να δοθεί μέσα από αναπαραστάσεις, που μερικές φορές είναι εντελώς « ξένες» μεταξύ τους, είναι δυνατό να προκαλέσει σύγχυση ακόμα και ταύτιση με την « ισχυρότερη» των αναπαραστάσεων. . Αλλά και γενικότερα έχει παρατηρηθεί ότι διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου μαθηματικού προβλήματος αποσπούν διαφορετικές απαντήσεις από τους σπουδαστές [9], [10], [11]. Σε έρευνα των D.Tirosh και P.Tsamir [12] στην οποία συμμετείχαν 189 σπουδαστές (γυμνασιακών τάξεων) παρατηρήθηκε ότι οι απαντήσεις των μαθητών για το κατά πόσον δύο δοσμένα απειροσύνολα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, εξαρτάται καθοριστικά από τις αναπαραστάσεις αυτών των συνόλων. Έτσι μια αριθμητική-οριζόντια αναπαράσταση, στην οποία τα δύο απειροσύνολα τοποθετήθηκαν οριζόντια το ένα δίπλα στο άλλο δηλαδή ({ 1, 2, 3,4,...} {4, 8, 12, 16,...}), οδήγησε τους μαθητές σε ένα υψηλό ποσοστό (περί το 70%), να απαντήσουν ότι τα δύο σύνολα έχουν διαφορετικό αριθμό στοιχείων και ότι το πρώτο έχει περισσότερα στοιχεία από το δεύτερο. Όταν όμως οι μαθητές είχαν να αντιμετωπίσουν έναν άλλο τύπο αναπαράστασης αυτών των δύο συνόλων-τη γεωμετρική τους αναπαράσταση - όπου το πρώτο σύνολο είναι ευθύγραμμα τμήματα με μήκη 1,2,3... και το δεύτερο σύνολο είναι τετράγωνα με πλευρές 1,2,3... και των οποίων οι περίμετροι είναι 4,8,12,...όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα,

{ ---, -------,-----------, --------------, ... }
1 2 3 4



1 2 3

τότε οι απαντήσεις τους σε μεγάλο ποσοστό (περί το 80%) ήταν ότι τα δύο αυτά σύνολα έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Έτσι δύο τύποι αναπαραστάσεων οδήγησαν τους μαθητές σε διαφορετικές δικαιολογήσεις και τελικά σε αντικρουόμενες λύσεις.

Πώς λοιπόν είναι δυνατό να αποφευχθεί αυτή η σύγχυση που τελικά μπορεί να καταλήξει ακόμα και σε ταύτιση του αντικειμένου που αναπαραστάται, από τον αναπαραστάτη του; Ο περιορισμός της διδασκαλίας στη χρήση ενός μόνο επιπέδου αναπαράστασης εμποδίζει τη σκέψη να συλλογισθεί πάνω στο αφηρημένο, η δε μετάβαση από τη μία αναπαράσταση στην άλλη είναι αναγκαία για να οδηγηθούμε στο περιεχόμενο που αναπαριστάται, αφου η έννοια είναι ανεξάρτητη από τα επίπεδα αναπαράστασης [2,σελ. 279]. Αν και υπάρχει αδυναμία στην αναπαράσταση γενικών ιδεών [14, p.48], η σύνδεση μεταξύ οπτικών και αναλυτικών αναπαραστάσεων της ίδιας μαθηματικής έννοιας, μπορεί να διαμορφώσει έναν ισχυρό παράγοντα στην προσπάθεια δημιουργίας αφηρημένων εννοιών [(3), p. 131]. Όμως η μετακίνηση μεταξύ αναπαραστάσεων διαφόρων επιπέδων δεν είναι μια εύκολη και γνώριμη διαδικασία [13]. **Αν λοιπόν η «μεταφορά» μιας αναπαράστασης από ένα επίπεδο σε ένα άλλο είναι μια δύσκολη υπόθεση, ένα πρώτο βήμα για τη σύνδεση των αναπαραστάσεων θα μπορούσε να αποτελέσει, κατά τη γνώμη μας, ο περιορισμός αυτής της διαδικασίας σε ένα τμήμα του αναπαριστώμενου αντικειμένου.** Άλλωστε η μαθησιακή διαδικασία προχωράει μέσα από το συγκεκριμένο και με διαδοχικές αφαιρέσεις και γενικεύσεις συντελείται η κατάκτηση της δομής του θέματος. Από την πλευρά του ο δάσκαλος, για να επιτευχθεί η ανωτέρω πορεία, θα πρέπει να τοποθετεί τη γνώση σε πλαίσια που να είναι κατάλληλα και οικεία για το μαθητή, δηλαδή η γνώση κατά κάποιο τρόπο θα πρέπει να «προσωποποιείται» [16].

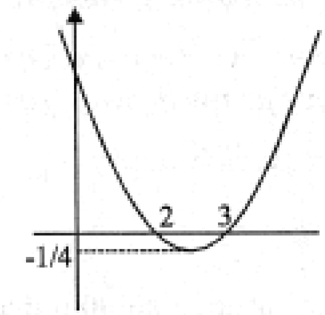
Μια επιλογή δραστηριοτήτων που να διευκολύνει την προοδευτική οικοδόμηση ολοένα και πιο αφηρημένων μαθηματικών γνώσεων θα μπορούσε αρχικά να βασισθεί στην συστηματική μεταβολή στοιχείων από ένα επίπεδο αναπαράστασης και την καταγραφή των αντίστοιχων μεταβολών που συντελούνται σε άλλα επίπεδα αναπαράστασης. Όσο δε το «πέρασμα» αυτών των μεταβολών στα άλλα επίπεδα θα αφομοιώνεται, τόσο θα υπάρχει και δυνατότητα διεύρυνσης των μεταβολών που σκόπιμα προκαλούμε στο αρχικό επίπεδο αναπαράστασης. Η ανωτέρω διαδικασία θα μπορούσε, κατά την γνώμη μας, να αναδείξει:

α) Τον ιδιαίτερο ρόλο που παίζουν τα μεμονωμένα στοιχεία του προβλήματος, κάτι το οποίο συμβάλλει και στην καλύτερη «αίσθηση» του προβλήματος.

β) Σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του προβλήματος. Με αποτέλεσμα δημιουργία άποψης για το αποτέλεσμα που διαμορφώνεται από την κοινή «δράση» αυτών των στοιχείων, κάτι που συνδέεται άμεσα με τη δυνατότητα, να αποκομίζεται από μια προβληματική κατάσταση, μια σφαιρική αντίληψη ή εντύπωση.

Το ερώτημα που διερευνούμε μέσα από την παρούσα εργασία είναι κατά πόσον η αλλαγή ωρισμένων στοιχείων, που συγκροτούν μια προβληματική κατάσταση, σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο αναπαράστασης και η καταγραφή της αντίστοιχης αλλαγής που συντελείται σε ένα δεύτερο επίπεδο, συμβάλλει στην προώθηση της αφαίρεσης (abstraction). Ως αφαίρεση εννοείται η διαδικασία μέσω της οποίας από ένα πλήθος διαφορετικών καταστάσεων σχεδιάζεται κάτι το οποίο είναι κοινό σε όλες. Πρόκειται για μια επαγωγική διαδικασία, που ερευνά για το κοινό χαρακτηριστικό γνώρισμα [(15, p.6].

Συγκεκριμένα: Ο στόχος. είναι η κατασκευή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(\chi)=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ μέσω της αναγνώρισης του ρόλου των συντελεστών α,β,γ. Αρχικά ξεκινήσαμε με την $f(\chi)=\chi^2-5\chi+6$ η δε γραφική παράστασή της ήταν γνωστή στον μαθητή. Στη συνέχεια μεταβάλοντας (όχι ταυτόχρονα αλλά τον καθένα χωριστά) τους συντελεστές α,β,γ, ζητήσαμε από το μαθητή να καταγράψει τις μεταβολές που η πρώτη στήλη του παρακάτω πίνακα, προκαλεί στις άλλες δύο.

συνάρτηση (αναλυτική έκφραση)	συνάρτηση (γραφική παράσταση)	εξίσωση
$f(\chi)=\chi^2-5\chi+6$		$\chi^2-5\chi+6=0$

Ασφαλώς και η μετάβαση από τη μια στήλη στην άλλη ήταν ελεύθερη και χωρίς περιορισμούς τόσο για τον διδάσκοντα, ο ρόλος του οποίου ήταν ρόλος καθοδηγητή και διευκολυντή, όσο και για το μαθητή, ο οποίος είναι από τους καλύτερους της τάξης του (Α΄Λυκείου). Καταβλήθηκε προσπάθεια να καταγράφεται η όποια μεταβολή που επέρχεται στη μία στήλη, και στις άλλες δύο. Αρχικά προσπαθήσαμε να δημιουργήσουμε συνδέσεις μεταξύ της λύσης της εξίσωσης $f(\chi)=0$ και των συντελεστών α,β,γ μεταβάλλοντάς τους μεμονωμένα. Ακολούθησε ο παρακάτω διάλογος.

1. *Καθηγητής (Κ): Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση χ^2-5χ+6=0;*
2. *Μαθητής (Μ): Η διακρίνουσα είναι (κάνει πράξεις) ένα, άρα έχει δύο ρίζες.*
3. *Κ: Με ποιά τιμή πρέπει να αντικατασταθεί ο σταθερός όρος γ=6 ώστε η εξίσωση να έχει α) μία μόνο ρίζα β) καμία ρίζα.*
4. *Μ: Θα πρέπει η διακρίνουσα να είναι μηδέν... (και μετά από υπολογισμούς).. θα πρέπει το β να είναι 25/4. Για το δεύτερο ερώτημα πρέπει η διακρίνουσα να είναι αρνητική και αυτό θα συμβεί όταν γ>25/4.*

Αυτό που έχουμε να παρατηρήσουμε είναι ότι ο μαθητής στις απαντήσεις του, δεν συνδέει τη μεταβολή του γ με κάποια μεταβολή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, και φαίνεται να εμπιστεύεται τις αλγεβρικές διαδικασίες από τις οποίες όμως δεν μπορεί να αναδειχθεί ο ρόλος του σταθερού όρου. Αυτόν τον ρόλο προσπαθούμε να αναδείξουμε με τον παρακάτω διάλογο.

5. *Κ: Η μεταβολή του αριθμού των ριζών της εξίσωσης f(x)=0 – από δύο ρίζες για γ=6, έχουμε μία ρίζα για γ=25/4 – δεν θα πρέπει να συνδέεται και με κάποια μεταβολή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f;*
6. *Μ: Τα δύο σημεία να γίνουν ένα. (προφανώς εννοεί τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα χ΄χ)*
7. *Κ:. Και πώς θα μπορούσε να γίνει αυτό;*
8. *Μ. Με διάφορους τρόπους.*

Χωρίς να του ζητήσουμε να μας απαριθμήσει αυτούς τους «διάφορους τρόπους», συνεχίσαμε τη συζήτηση στην προσπάθεια σύνδεσης των μεταβολών του γ και των αντίστοιχων μεταβολών που συμβαίνουν στη γραφική παράσταση της f, ώστε ο ίδιος ο μαθητής να συνειδητοποιήσει ότι δεν υπάρχουν «διάφορες» απαντήσεις στην ερώτηση της γραμμής -7.

9. *Κ: Πόσο χρειάστηκε να μεταβληθεί (μόνο) ο σταθερός όρος ώστε η εξίσωση f(x)=0 από δύο ρίζες να έχει μία ρίζα;*
10. *Μ: Η διαφορά είναι 25/4- 6=1/4*
11. *Κ: Η κορυφή της καμπύλης έχει τεταγμένη πόσο;*

12. *Μ: Έχει ψ= - 1/4*

13. *Κ: Δηλαδή αύξηση του γ κατά 1/4 τι πρέπει, λογικά, να προκαλεί στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f αφού τώρα η εξίσωση f(x)=0 έχει μία ρίζα;*

14. *Μ: Η κορυφή της καμπύλης θα έχει τεταγμένη μηδέν.*

15. *Κ: Και τετμημένη πόσο;*

16. *Μ: (αυθόρμητα) ίδια θα είναι.*

17. *Κ: Μπορούμε αυτό να το ελέγξουμε;*

Μετά τον έλεγχο ότι η τετμημένη της κορυφής της καμπύλης παραμένει σταθερή όταν $\gamma=\frac{25}{4}$, ο μαθητής διατύπωσε με σιγουριά την άποψή του για τον ρόλο του σταθερού όρου γ.

18. *Μ: Ο γ πάει πάνω - κάτω τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.*

19. *Κ: Επομένως ο γ πώς επηρεάζει τις συντεταγμένες της κορυφής της καμπύλης μας;*

20. *Μ: Αλλάζει μόνο το ψ της καμπύλης.*

Το επόμενο βήμα είναι η διερεύνηση του ρόλου του συντελεστή του x, του β δηλαδή.

21. *Κ: Ας δούμε τώρα πώς οι μεταβολές του β επηρεάζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Έστω ότι β=0*

22. *Μ: Τότε η εξίσωση $x^2+6=0$ δεν θα έχει ρίζες*

23. *Κ: Και για τη γραφική παράσταση της $f(x)=x^2+6$ τι έχουμε να πούμε, που θα βρίσκεται η κορυφή της;*

24. *Μ: Πάνω από τον χ΄χ.*

25. *Κ: Μπορούμε να την προσδιορίσουμε επακριβώς;*

26. *Μ: Η x^2 έχει κορυφή το (0,0) άρα η x^2+6 θα είναι στο (0,6)*

27. *Κ: Επομένως οι μεταβολές του β επηρεάζουν και τις δύο συντεταγμένες της κορυφής της καμπύλης μας. Δηλαδή η καμπύλη μας πώς πρέπει να*

μετατοπίζεται;

28. Μ: Και πάνω-κάτω και δεξιά -αριστερά.

29. Κ: Επομένως τι έχουμε να πούμε για το ρόλο του β σε σχέση με αυτόν του γ;

30. Μ: Ότι είναι σπουδαιότερος.

31. Κ: Πιο σύνθετος θα έλεγα εγώ.

32. Μ: Ναι πιο σύνθετος

Για το ρόλο του συντελεστή του x^2, του α δηλαδή, ξεκινήσαμε από την x^2+6 και διαπιστώσαμε ότι οι μεταβολές του α επηρεάζουν μόνο το «άνοιγμα» της καμπύλης αφού, η κορυφή της καμπύλης εξακολουθεί να έχει τις ίδιες συντεταγμένες (0,6). Τούτο δημιούργησε το ερώτημα γιατί η τιμή μηδέν του β «εξουδετερώνει» κάθε μεταβολή του α, και έθεσε το ζήτημα εύρεσης της ποσοτικής σχέσης που συνδέει τα α,β με την τετμημένη της κορυφής της καμπύλης (αφού, όπως ήδη διαπιστώσαμε, ο γ δεν επηρεάζει την τετμημένη της κορυφής).

33. Κ: ‘Οταν όμως ο β δεν είναι μηδέν, άραγε τί μπορούμε να πούμε για τις συντεταγμένες της κορυφής της καμπύλης;

34. Μ: Θα μεταβάλλεται ο χ άρα και ο ψ.

35. Κ: Το θέμα είναι πώς μεταβάλεται ο χ.

36. Μ: Να βρούμε σχέση του χ με τους αριθμούς α και β αλλά πώς;

37. Κ: Μπορούμε να βρούμε σχέση ανάμεσα στα σημεία τομής της καμπύλης με τον άξονα των χ΄χ και στις συντεταγμένες της κορυφής;

38. Μ Δηλαδή ότι $\frac{(2+3)}{2}=\frac{5}{2}$ όσο και η τετμημένη της κορυφής;

39. Κ: Οι αριθμοί όμως 2, 3 τί είναι ;

40. Μ: Οι ρίζες τις εξίσωσης χ^2-5χ+6=0

41. Κ: Να το αντιμετωπίσουμε πιο γενικά. Αν είναι δηλαδή ρ_1 και ρ_2

42. Μ: Τότε $\frac{(\rho_1+\rho_2)}{2}$ θα είναι ίσο (κάνει πράξεις) με $-\frac{\beta}{2\alpha}$

43. Κ: Δώσε τώρα την εξήγηση όταν το β είναι μηδέν.

44. Μ: Όταν το β είναι μηδέν τότε το κλάσμα είναι πάντα μηδέν.

45. Κ: Στην περίπτωση που η εξίσωση δεν έχει πραγματικές λύσεις εξακολουθεί η κορυφή της καμπύλης να έχει τετμημένη $\chi=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$;

46: Μ: Ναι. (και μετά από λίγο).. η συνάρτηση θα είναι πιο πάνω.

47: Κ: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν θα τέμνει τον χ΄χ.

ΣΧΟΛΙΑ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Αρχικά έχουμε να παρατηρήσουμε ότι ο μαθητής στις αρχικές του απαντήσεις (γραμμές 2 και 4) για τις ρίζες της εξίσωσης χ^2-5χ+6=0, βασίστηκε αποκλειστικά στους γνωστούς τύπους και αγνόησε εντελώς τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\chi)=\chi^2-5\chi+6$ κάτι, που δεν του επέτρεψε και τη σύνδεση των ριζών της εξίσωσης με τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον χ΄χ. Στη συνέχεια του διαλόγου, οι όποιες συνδέσεις ανάμεσα σε αναπαραστάσεις που δημιουργήθησαν από το μαθητή, είχαν ως αφετηρία τον τρόπο παρέμβασης του δασκάλου (π.χ. γραμμή 5). Η απάντηση όμως που δόθηκε από το μαθητή στη γραμμή 46 δείχνει ότι αυτός ο τρόπος παρέμβασης επέφερε και αλλαγή στη συμπεριφορά του μαθητή. Πιο συγκεκριμένα ο μαθητής αιτιολογεί -με την κατακόρυφη μεταφορά της C_f- τη « διατήρηση» της σχέσης $\chi=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$ η οποία όμως προέκυψε από ένα άλλο επίπεδο αναπαράστασης και κάτω από ωρισμένες συνθήκες (όταν δηλαδή η εξίσωση έχει ρίζες). Η σύνδεση λοιπόν των αναπαραστάσεων διαφόρων επιπέδων δεν είναι κάτι που προκύπτει αυθόρμητα, όπως άλλωστε δείχνουν και άλλες έρευνες [(2), σελ. 269], και σε καμμιά περίπτωση οι παραδοσιακοί τρόποι εκμάθυνσης δεν πρόκειται να ευνοήσουν τέτοιες προσεγγίσεις.

Σε ότι αφορά τις μεμονομένες μεταβολές των συντελεστών α,β,γ έχουμε να σημειώσουμε τα εξής:

- Η αναγνώριση του ρόλου του κάθε συντελεστή όσον αφορά στο είδος των μετατοπίσεων που προκαλεί στη γραφική παράσταση της συνάρτησης, έγινε μια σχετικά εύκολη υπόθεση από τη στιγμή που ο μαθητής τις μεταβολές που συμβαίνουν σε μία στήλη του πίνακα της σελίδας 5 τις καταγράφει - με τις αναγκαίες «μεταφράσεις» - και στις άλλες δύο στήλες. (π.χ γραμμές 6, 14, 22).

- Η- με τον παραπάνω τρόπο - αναγνώριση του ρόλου των συντελεστών α,β,γ έδωσε την ευκαιρία στον μαθητή να εκφρασθεί και «αξιολογικά» γιαυτούς τους ρόλους (π.χ γραμμή 30). Θα λέγαμε δηλαδή ότι δημιουργείται μια καλύτερη «αίσθηση» των στοιχείων που συγκροτούν την προβληματική κατάσταση την οποία προσπαθεί να αντιμετωπίσει ο μαθητής.Ταυτόχρονα προέκυψαν και κάποιες « ποιοτικές» εκτιμήσεις για το αποτέλεσμα της κοινής «δράσης» αυτών των στοιχείων (γραμμές16, 34), κάτι που δημιούργησε και την αναγκαιότητα περιγραφής (ποσοτικά) αυτού του αποτελέσματος.

Έχουμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι η διαδικασία των διαδοχικών αφαιρέσεων και γενικεύσεων - μέσω της οποίας ο μαθητής οδηγείται στην κατάκτηση της δομής του θέματος - ευνοείται μέσω της μεταβολής τμήματος του αναπαριστώμενου αντικειμένου. Έτσι σε ό,τι αφορά τις συντεταγμένες της κορυφής της καμπύλης - η γνώση των οποίων είναι καθοριστική για την κατασκευή της-από την αρχή ξεκαθαρίστηκε ότι ο γ δεν επηρεάζει την τετμημένη της κορυφής της καμπύλης (γραμμή 16). Έτσι ένα πρώτο επίπεδο αφαίρεσης είναι η γνώση για το ποιοί συντελεστές επηρεάζουν την τετμημένη της κορυφής της καμπύλης κάτι που στη συνέχεια οδήγησε και στην « ποσοτική» εύρεση αυτής της συμβολής. Ένα δεύτερο επίπεδο αφαίρεσης είναι η αναγνώριση του πιο σύνθετου ρόλου που διαδραματίζουν κάποια από τα στοιχεία του προβλήματος (γραμμή 30).

Αν και οι επεξεργασίες (π.χ. πράξεις, μετασχηματισμοί, αποδεικτικά σχήματα) που μπορεί να γίνονται στα διάφορα επίπεδα αναπαράστασης δεν έχουν τον ίδιο βαθμό εγκυρότητας και αξιοπιστίας, η σύνδεση των αναπαραστάσεων διαφόρων επιπέδων φαίνεται να συμβάλλει στην ανάδειξη του συμπληρωματικού ρόλου της κάθε αναπαράστασης, και τελικά στη θεωρητική γνώση του περιεχομένου που με διάφορες μορφές αναπαρίσταται.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

1. Bednarz, N. et all. (1987). «Pedagogical Considerations Concerning the Problem of Representation.» In C. Janvier (Ed.) Problems of Represantation in the Teaching and Learning of Mathematics. (pp. 109-122). Hillsdale,NJ: Lawrence Etlbaum Associates.

2. Δαγδιδέλης, Ε., Παυλοπούλου, Κ., Τρίγγα, Π. (1998). «Διδακτική: Μέθοδοι και Εφαρμογές». Εκδόσεις Ε. Μπένου.

3. Dreyfus, T. (1990). «Advanced Mathematical Thinking». In P. Nesher and J Kilpatric (Ed.) Mathematics and Cognition. (pp. 113-134). Cambridge University Press.

4. Kaput, J. (1985). Represantation and Problem Solving: Methodological Issues Related to Modeling. In Silver E. (Ed.) Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspective. LEA.

5. Kaput, J.(1989). «Linking Representatios in the Symbol of Aigebra». In Wagner (Ed.) Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, Vol. 4.,LEA, NCTM.

6. Kaput, J.(1987). «Representation Systems and Mathematics». In Janvier C. (Ed.) Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics. LEA.

7. Lesh, R. et all.(1987). «Representations and Translations among Represantations in Mathematics Learning and Problem Solving». In C. Janvier (Ed.) Problems of Represantatio In the Teaching and Learning of Mathematics. Hillsdale, NJ Lawrence Ellbaum Associates.

8. Hanna, G.(1990). «Some Pedagogical Aspects of Proof» . **Interchange**, Vol. 21, No 1, pp. 6-13.

9. Arcani, A., Tirosh, D., and Nachimias, R. (1989). «The effects of exploring a new representation on prospective teachers΄conception of functions». In S. Vinner (Ed.) Science and mathematics teaching: Interaction between research and practice. pp. 269-277, Jerusalem: Hebrew University.

10. Silver, E. A. (1986). «Using conceptual and procedural Knowledge: A focus on relationships». In J. Hiebert (Ed.). Conceptual and procedural Knowledge: The case of mathematics. pp. 181-198, Hillsdale, NJ: Erlbaum

11. Keller, B., Hirsch, C. (1998). «Student preferences for representations of functions». **Int. J.Math.Educ. Sci. Tecnol.**, vol. 29, No 1, pp. 1-17.

12. Tirosh, D., Tsamir, P. (1999). «Consistency and Represantations: The Case of Actual Infinity». **Journal for Research in Mathematics Education**. Vol. 30, No 2, pp. 213-219, NCTM.

13. Moschkovich, J., Schoenfeld, A., Arcani, A. (1993). «Aspects of understanding: On multiple perspectives and representations of linear relations and connections among them». In A. Romberg, E. Fenemma and T. Carpenter (Eds.). Integrating Research on the Graphical Representation of Functions, LEA, NY, pp. 69-100.

14. Glasersfeld Ernst von.(1991) «Abstraction, Re-Presentation, and Reflection: An Interpretation of Experience and Piaget´s Approach». In Steffe L.(Ed.) Epistemological Foundations of Mathematical Experience, pp. 45-67, Springer-Verlag.

15. Seeger, Falk. (1995). «Representation in the Mathematics Classroom: Reflection and Construction». In F. Seeger, U. Waschescio and J. Vougt (Eds.), The Culture of the Mathematics Classroom. Cambrige University Press, N.Y.

16. Simon, A. M. (1995). «Reconstructing mathematics pedagogy from an constructivism perspective». **Journal for Research in Mathematics Education**, Vol.26, No 2. pp. 114-145, MCTM.