Author: Μ. Τουμάσης

Title: Αλλάζει η φύση της Μαθηματικής απόδειξης; Παιδαγωγικές συνέπειες

Abstract: Η επίδραση της ανάπτυξης της τεχνολογίας του ηλεκτρονικού υπολογιστή πάνω στη μαθηματική επιστήμη και ιδιαίτερα στο πιο σημαντικό της συστατικό, την απόδειξη

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Γ΄, Τόμος 16, Τεύχος 52, 1999

Αλλάζει η φύση της μαθηματικής απόδειξης; Παιδαγωγικές συνέπειες.

Μπάμπης Τουμάσης

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο άρθρο αυτό διερευνάται η επίδραση της ανάπτυξης της τεχνολογίας του ηλεκτρονικού υπολογιστή πάνω στην μαθηματική επιστήμη και ιδιαίτερα στο πιο σημαντικό της συστατικό, την απόδειξη. Στην αρχή προσεγγίζεται ιστορικά η φύση της μαθηματικής απόδειξης, μελετάται η ιστορική εξέλιξη του βαθμού αυστηρότητάς της και συμπεραίνεται ότι τα στάνταρτ αυστηρότητας δεν ήταν πάντα τα ίδια 6στην μακρόχρονη πορεία εξέλιξής της. στη συνέχεια, επισημαίνονται οι πιέσεις που υφίσταται η παραδοσιακή αντίληψη για τη φύση της απόδειξης, ένεκα της εμφάνισης του ηλεκτρονικού υπολογιστή και του τρόπου με τον οποίο αυτός συμβάλλει στην παραγωγή νέας μαθηματικής γνώσης. Λόγω αυτής ακριβώς της αποτελεσματικής και πολλά υποσχόμενης διείσδυσης του ηλεκτρονικού υπολογιστή στο χώρο των μαθηματικών, διαφαίνεται μια τάση για εξασθένηση της σημασίας της παραδοσιακής μαθηματικής απόδειξης στο προσεχές μέλλον. Τέλος, διερευνώνται οι επιπτώσεις όλων αυτών των αλλαγών και εξελίξεων στη διδασκαλία των μαθηματικών και διαγράφονται οι όροι οι οποίοι θα εξασφαλίσουν την καλύτερη αξιοποίησή τους, με στόχο τη βελτιστοποίηση της μαθησιακής διαδικασίας.

Abstract

This article examines the effect that the development of computer technology has on mathematics and especially on proofs, its most important element. In the beginning, we approach the historical nature of mathematical proof, we study the historical evolution of its degree of austerity and we conclude that the standards of austerity were not always the same in its long course of development. Next, we point out the pressures that the traditional viewpoint of the nature of proof has undergone, since the emergence of the computer and the way that it contributes in the production of new mathematical knowledge. Because of this effective and very promising penetration of the computer in the area of mathematics, the attenuation of the significance of traditional mathematical proof will be revealed in the near future. In closing, we examine the consequences of all these changes and developments in the teaching of mathematics and the conditions which will ensure their better utilization, with an aim to optimize the learning procedure.

Η είσοδος της ανθρωπότητας στον 21^{ο} αιώνα χαρακτηρίζεται από ένα πλήθος αλλαγών σε κοινωνικό, οικονομικό, πολιτικό και επιστημονικό επίπεδο, που με τη σειρά τους επιδρούν και επηρεάζουν όλα τα μικρο- και μακρο- επίπεδα της ατομικής και συλλογικής ζωής. Τα πάντα αλλάζουν στην κοινωνία μας με τρομακτικούς ρυθμούς. Το μόνο σταθερό, θα λέγαμε, είναι η συνεχής αλλαγή. Η ρήση του Ηράκλειτου «τα πάντα ρει και ουδέν μένει», χαρακτηρίζει ίσως με τη μεγαλύτερη ευστοχία την κατάσταση που επικρατεί την αυγή του 21^{ου} αιώνα.

Οι καταλυτικές αλλαγές στην τεχνολογία και η εμφάνιση του ηλεκτρονικού υπολογιστή, επαναστατικοποίησαν όλες τις περιοχές της γνώσης και της επιστήμης και συνέβαλαν αποφασιστικά στην ποιοτική μεταβολή της κοινωνίας, με τη μετάβασή της από τη βιομηχανική κοινωνία στην τεχνολογική κοινωνία της γνώσης και της πληροφορίας. Τα τοπικά και χρονικά όρια στη ροή της πληροφορίας καταργούνται και τα μέσα μαζικής επικοινωνίας με το ηλεκτρονικό ταχυδρομείο και το διαδίκτυο έχουν πλήρως καταργήσει τους συμβατικούς περιορισμούς στην ανταλλαγή πληροφοριών και ιδεών. Τα τελευταία 10 –20 χρόνια γίναμε μάρτυρες πρωτοφανών αλλαγών στην ίδια την επιστήμη με την εμφάνιση νέων επιστημών μέσα από τη διασταύρωση κλασικών κλάδων.

Η ανάπτυξη της επιστήμης των ηλεκτρονικών υπολογιστών επαναστατικοποίησε όπως ήταν φυσικό και την αρχαιότερη των επιστημών, τη μαθηματική επιστήμη. Πριν 10 – 20 χρόνια οι μαθηματικοί δούλευαν σκυμμένοι πάνω σ' ένα γραφείο, χρησιμοποιώντας μολύβι και χαρτί. Ο σημερινός μαθηματικός κάθεται, βέβαια, ακόμη στο γραφείο του, αλλά έχει μπροστά του έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή. Το μολύβι και τα χαρτιά είναι ακόμα εκεί, πλην όμως οι σπουδαιότερες δραστηριότητες γίνονται με τη βοήθεια του υπολογιστή. Ισχυρά λογισμικά πακέτα, όπως τα mathematica και maple, διαφημίζονται από τους κατασκευαστές τους ως αποτελεσματικά συστήματα παραγωγής νέων μαθηματικών μέσω του υπολογιστή.

Τα μαθηματικά του 20ου αιώνα διακρίνονται από ένα συνεχή διανοητικό συμβιβασμό μεταξύ των περιορισμών της πεπερασμένης ανθρώπινης πνευματικής λειτουργίας και των άπειρων θεωρήσεων της ανθρώπινης φαντασίας. Σήμερα διακρίνεται ένας νέος συμβιβασμός – ή ένα νέο παράδειγμα σύμφωνα με την ορολογία του Thomas Kuhn (1981) – η σύζευξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών με τα μαθηματικά. Οι υπολογιστές είναι ταυτόχρονα και το δημιούργημα αλλά και οι δημιουργοί των σύγχρονων μαθηματικών' είναι τα μαθηματικώς ομιλούντα όντα. Οι υπολογιστές διαμορφώνουν και ενισχύουν τη δύναμη των μαθηματικών, ενώ τα μαθηματικά διαμορφώνουν και ενισχύουν τη δύναμη των υπολογιστών (Steen, 1986).

Αυτές οι ραγδαίες εξελίξεις έχουν αλλάξει τη φύση της παραγωγής μαθηματικών κατά ένα πολύ σημαντικό τρόπο. Ο υπολογιστής δεν βοηθάει απλώς το μαθηματικό στη δουλειά του, αλλά μεταβάλλει κυριολεκτικά τη φύση αυτή καθ' εαυτής της εργασίας του και δίνει άλλη διάσταση στο τι σημαίνει να κάνει κάποιος μαθηματικά. Ειδικά δε, η λογική δομή της μαθηματικής σκέψης και συλλογιστικής διαδικασίας, η οποία επιτυγχάνεται μέσω, των δυνατοτήτων ενός υπολογιστή, είναι διαφορετική από τη δομή της παραδοσιακής μορφής της διαδικασίας αυτής. Η φύση της απόδειξης, του θριάμβου και της δόξας, θα λέγαμε, της μαθηματικής επιστήμης, αρχίζει να αναθεωρείται και μαζί μ' αυτήν, όπως είναι φυσικό, να κλονίζεται και η παραδοσιακή πεποίθηση για την απόλυτη αλήθεια των μαθηματικών προτάσεων.

Μαθηματική απόδειξη και κριτήρια αυστηρότητάς της. Σύντομη ιστορική εξέλιξη.

Αν και οι Βαβυλώνιοι, οι Αιγύπτιοι αλλά και οι άλλοι πολιτισμοί, όπως οι Ινδοί, Κινέζοι, Μάγια κλπ., είχαν τη δική τους αξιόλογη συνεισφορά στα μαθηματικά, φαίνεται ότι δεν υπάρχει κάποια μαρτυρία που να δείχνει ότι παρήγαγαν κάτι το οποίο μοιάζει ουσιαστικά με αυτό που καλούμε μαθηματική απόδειξη. Απ' ότι είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε μέχρι σήμερα, κανένας πολιτισμός έξω από την Ευρωπαϊκή Παράδοση δεν ανέπτυξε ένα καλώς – ορισμένο πρότυπο μαθηματικής απόδειξης, ούτε «απέδειξε» κάποια μαθηματικά θεωρήματα κατά έναν τρόπο που θα μπορούσαμε να τον χαρακτηρίσουμε απόδειξη.

Η απόδειξη ως μια ακολουθία προτάσεων που προκύπτουν με παραγωγικό συλλογισμό από ένα αποδεκτό σύνολο αρχικών προτάσεων – αξιωμάτων – ήταν, βέβαια, μια σύλληψη του αρχαίου Ελληνικού πνεύματος. Η αξιωματική μέθοδος είναι, χωρίς αμφιβολία, η πιο σημαντική συνεισφορά της αρχαίας Ελλάδας στα μαθηματικά και στην ανάπτυξη των επιστημών γενικότερα (Wilder, 1967).

Ο Θαλής και ο Πυθαγόρας θεωρούνται οι πρώτοι Έλληνες μαθηματικοί οι οποίοι εισήγαγαν τις έννοιες του θεωρήματος και της απόδειξης. Ο Θαλής, πιστεύεται ότι έχει αποδείξει πέντε γεωμετρικά θεωρήματα, μεταξύ των οποίων και το θεώρημα ότι κάθε κύκλος χωρίζεται σε δύο ίσα μέρη από οποιαδήποτε διάμετρό του (Eves, 1989, 29). Ο Πυθαγόρας, πιστεύεται ότι απέδειξε πολύ νωρίς ότι εάν δυο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι όμοια, τότε α/β = α΄/β΄ και β/γ = β΄/γ΄ (Bell, 1945, 70). Τα στάνταρτ αυστηρότητας αυτών των αποδείξεων είναι σχεδόν τα ίδια με αυτά των στοιχείων του Ευκλείδη.

Ο τίτλος «Στοιχεία» αναφέρονταν συχνά από τους αρχαίους Έλληνες και χρησιμοποιούνταν για να προσδιορίσουν ένα σύστημα προτάσεων οι οποίες βασίζονταν πάνω σε αξιώματα. Ο Ευκλείδης στο έργο του, το οποίο συγκεντρώνει τα αποτελέσματα πολλών μαθηματικών της αρχαιότητας, όπως π.χ. του Θεαίτητου και Εύδοξου, βάζει τα θεμέλια της αξιωματικής μεθόδου ανάπτυξης ενός μαθηματικού κλάδου, προσδιορίζει τα μεθοδολογικά στάνταρτ των μαθηματικών αποδείξεων στους Ελληνιστικούς χρόνους και αποτελεί το πρότυπο κατασκευής αποδείξεων σχεδόν μέχρι το τέλος του 19ου αιώνα. Στην πραγματικότητα, τα Στοιχεία του Ευκλείδη λειτούργησαν όχι μόνο ως ένα μοντέλο μαθηματικών αποδείξεων, αλλά επίσης ως ένα υπόδειγμα αυστηρότητας και σε άλλες επιστήμες. Οι εργασίες του Newton στη φυσική και του Spinoza στη φιλοσοφία οφείλουν το στυλ, τη μορφή και τη μεθοδολογία τους στον Ευκλείδη.

Η γενική περιγραφή του τυπικού Ευκλείδειου συστήματος μοιάζει πάρα πολύ με αυτήν ενός μοντέρνου τυπικού συστήματος. Τα συστατικά του είναι:

(α) Ένα σύνολο πρωταρχικών εννοιών
(β) Ένα σύνολο ορισμών
(γ) Ένα σύνολο αξιωμάτων
(δ) Ένα σύνολο αιτημάτων

(ε) Ένα σύνολο θεωρημάτων (ή προτάσεων)

Η διαφορά μεταξύ αξιώματος και αιτήματος είναι η εξής: Το αξίωμα ήταν μια γενική πρόταση (όχι μόνο γεωμετρική), η οποία ήταν μεν αληθής με την κοινή λογική, αλλά η αλήθεια της δεν ήταν δυνατόν να προκύψει παραγωγικά. Το αίτημα ήταν μία πρόταση, ειδικά της γεωμετρίας, η οποία υπέθεταν επίσης ότι ήταν αληθής αλλά ήλπιζαν ότι κάποια μέρα θα ήταν δυνατό να αποδειχθεί με παραγωγικό τρόπο. (Απ' αυτήν την ελπίδα ξεκίνησαν άλλωστε, αργότερα, και οι εκατοντάδες προσπάθειες για την απόδειξη του φημισμένου αιτήματος των παραλλήλων).

Η αξιωματική, βέβαια, θεμελίωση της γεωμετρίας από τον Ευκλείδη παρουσίαζε κάποια ελαττώματα, τα σημαντικότερα των οποίων ήταν:

(α) Δεν αναφέρονται πουθενά οι κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων. Τα μοντέρνα τυπικά συστήματα περιέχουν ένα σύνολο κανόνων βάσει των οποίων καθίσταται δυνατό το πέρασμα από μια πρόταση σε μια άλλη.

(β) Χρησιμοποιούνται, σιωπηρώς, στις αποδείξεις πολλές υποθέσεις οι οποίες δεν αναφέρονται πουθενά πριν. Στην πραγματικότητα, η θεμελίωση της Ευκλείδειας γεωμετρίας απαιτούσε περισσότερα αξιώματα απ' αυτά τα οποία αναφέρονται. Αυτή η ανεπάρκεια τακτοποιήθηκε πολύ αργότερα με τη δημοσίευση, το 1900 περίπου, της εργασίας του Hilbert «Θεμέλια της Γεωμετρίας».

Τα κριτήρια της μαθηματικής αυστηρότητας παρήκμασαν μετά τους Ελληνιστικούς χρόνους. Αυτό, κατ' αρχάς, ήταν αναμενόμενο σε συνάρτηση με τη γενική πνευματική παρακμή των Ρωμαϊκών και κατόπιν των Μεσαιωνικών χρόνων. Κατά τη διάρκεια, βεβαίως, της Αναγέννησης υπήρξε μια μεγάλη αναζωπύρωση της πρωτότυπης μαθηματικής έρευνας και εργασίας. Αυτή η εργασία πήρε, ως επί το πλείστον, τη μορφή των μαθηματικών ανακαλύψεων, οι οποίες δεν συνοδεύονταν συνήθως από αυστηρές αποδείξεις. Στην αρχή αυτό γίνονταν ίσως από αμέλεια και στη συνέχεια από βαθιά πίστη στη διαίσθηση. Παρ' όλη τη μακραίωνη παράδοση των μαθηματικών που απαιτούσε στέρεες αποδείξεις για το κάθε τι, αρκετοί μαθηματικοί θυσίαζαν τη λογική αυστηρότητα όταν έβλεπαν, πως κρατούσαν στα χέρια τους μια πολύτιμη ιδέα, που τη θεωρούσαν σημαντική και που έπρεπε να την προχωρήσουν περισσότερο, αλλά δεν ήταν σε θέση να τη δικαιολογήσουν αυστηρά. Ο Pascal αναγκάζεται, για παράδειγμα, να υποστηρίξει πως μερικές φορές παρεμβαίνει η καρδιά, για να μας διαβεβαιώσει ότι ορισμένα μαθηματικά βήματα είναι σωστά (Kline, xx., 31). Η τυπική στάση του 18ου αιώνα ήταν: Γιατί να μπούμε στον κόπο να αποδείξουμε με αυστηρές λογικές διαδικασίες πράγματα για τα οποία ουδέποτε αμφιβάλουμε ή να αποδείξουμε κάτι το οποίο είναι προφανές με μέσα τα οποία είναι λιγότερο προφανή; (Kline, 1972, 618). Για το λόγο αυτό, το δεύτερο μισό του $17^{ου}$ αιώνα, από την εποχή των Descartes, Leibniz και Newton και ο $18^{ος}$ αιώνα, αποκαλούνται μερικές φορές ως η ηρωική περίοδος των μαθηματικών (Kline, 1980, 168).

Γύρα στα 1800 περίπου, οι μαθηματικοί άρχισαν να ανησυχούν για τη χαλαρότητα των εννοιών στους διάφορους κλάδους της ανάλυσης. Η βασική έννοια της συνάρτησης δεν ήταν ξεκάθαρη. Η χρήση των σειρών χωρίς αυστηρά κριτήρια σύγκλισης είχε δημιουργήσει παράδοξα και αντιφάσεις. Η διαμάχη γύρω από την αντιπροσώπευση των συναρτήσεων με τριγωνομετρικές σειρές, είχε δημιουργήσει επιπλέον σύγχυση και βέβαια, οι θεμελιώδεις έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος ουδέποτε είχαν οριστεί με αυστηρότητα. Όλες αυτές οι δυσκολίες έφεραν τελικώς μια αναστάτωση και ανησυχία σχετικά με τη λογική θεμελίωση της ανάλυσης. Στις αρχές του $19^{ου}$ αιώνα μαθηματικοί, όπως οι Cauchy, Abel, Dirichlet, Bolzano και αργότερο ο Weierstrass, έκαναν μεγάλες προσπάθειες για να διαμορφώσουν τους ορισμούς και τα αξιώματα τα οποία θα έδιναν μια λογική βάση στην ανάλυση. Η ταυτόχρονη ανάπτυξη των μη Ευκλείδειων γεωμετριών από τους Gauss, Bolyai, Lobachevsky και Riemann, ενίσχυσε επίσης τη λογική θεώρηση της γεωμετρίας και την αξιωματική μέθοδο γενικότερα, ιδιαίτερα την αυθαίρετη επιλογή αξιωμάτων. Προς το τέλος του $19^{ου}$ αιώνα, η πιο σημαντική μαθηματική δραστηριότητα συνδέθηκε με την προσπάθεια για αυστηρή θεμελίωση των μαθηματικών. Όλη αυτή η δραστηριότητα χαρακτηρίζεται από τάσεις για μεγαλύτερη αφαίρεση και αυξημένη αυστηρότητα στις μεθόδους της απόδειξης.

Στις αρχές του 20ου αιώνα πολλοί μαθηματικοί και φιλόσοφοι, οι οποίοι έδειχναν ενδιαφέρον για τη λογική και τα θεμέλια των μαθηματικών, σχημάτισαν τρεις σχολές, τους λογικιστές, τους φορμαλιστές και τους ενορατιστές (Αναπολιτάνος, 1985; Snapper, 1979). Βασικοί αντιπρόσωποι αυτών των σχολών ήταν αντιστοίχως οι Russel, Hilbert και Brouwer. Αν και η κύρια διαφορά μεταξύ αυτών των σχολών της μαθηματικής σκέψης αφορούσε τη φύση των μαθηματικών οντοτήτων, υπήρχαν επίσης σπουδαίες διαφορές ως προς τις χρησιμοποιούμενες αποδεικτικές μεθοδολογίες. Οι διαφορές μεταξύ λογικιστών και φορμαλιστών αφορούσαν κυρίως την έμφαση που απέδιδαν σε κάποια ζητήματα και σίγουρα δεν ήταν διαφορές ουσίας. Για τους λογικιστές δεν ήταν επιτρεπτό, λόγου χάριν, να χρησιμοποιούν μαθηματικές μεθόδους απόδειξης, όπως π.χ. τη μαθηματική επαγωγή, χωρίς προηγουμένως να δώσουν μια αυστηρώς λογική περιγραφή τους.

Απεναντίας, είχε δημιουργηθεί μια θυελλώδης αντιπαράθεση μεταξύ φορμαλιστών και ενορατιστών. Μια από τις πιο σοβαρές προστριβές αφορούσε στη χρήση από τους φορμαλιστές των αφηρημένων αποδείξεων ύπαρξης, οι οποίες δεν περιλάμβαναν την κατασκευή του μαθηματικού αντικειμένου του οποίου την ύπαρξη αποδείκνυαν. Οι αποδείξεις αυτές, τις οποίες χρησιμοποιούσε συχνά ο Hilber, δεν γίνονταν αποδεικτές από τους ενορατιστές, οι οποίοι θεωρούσαν ότι το κριτήριο εγκυρότητας της αποδεικτικής μεθόδου είναι η κατασκευαστικότητά της. Ξεκινώντας απ' αυτή τη θέση, οι ενορατιστές απέρριψαν κάποιους «κλασσικούς» λογικούς νόμους από την περιοχή των μαθηματικών αποδείξεων. Ο πιο γνωστός απ' αυτούς ήταν η αρχή της απόκλισης του τρίτου (P ή όχι P).

Για να αντιμετωπίσει ο Hilbert τις αντιρρήσεις των ενορατιστών, διαμόρφωσε ένα πρόγραμμα με σκοπό να αποδείξει ότι τα κλασσικά μαθηματικά είναι συνεπή, δηλαδή απαλλαγμένα από αντιφάσεις. Η ιδέα συνίστατο στο να αποδείξει τη συνέπεια αυτή χρησιμοποιώντας μόνο αυστηρές κατασκευαστικές μεθόδους απόδειξης, οι οποίες ήταν αποδεικτές από τους ενορατιστές. Οι ελπίδες, βέβαια, του Hilbert γκρεμίστηκαν και τα σχέδιά του ανατράπηκαν από την εργασία του Αυστριακού λογικού Kurt Godel, ο οποίος το 1931 απέδειξε ότι για κάθε συνεπές τυπικό σύστημα Σ που περιέχει το σύστημα των φυσικών αριθμών, υπάρχουν στο Σ μη αποδείξιμες προτάσεις. Οποιαδήποτε, δηλαδή, αξιωματικοποίηση δεν μπορεί να εξασφαλίσει ότι όλες οι «αληθείς» προτάσεις στο σύστημα είναι δυνατόν να εξαχθούν από το σύνολο αυτών των αξιωμάτων (Nagel & Newman, 1991).

Ένα άλλο αποτέλεσμα της εργασίας του Godel ήταν ότι, για κάθε συνεπές τυπικό σύστημα Σ που περιέχει το σύστημα των φυσικών αριθμών, η συνέπεια του Σ δεν μπορεί να αποδειχθεί μέσα στο Σ. Το αποτέλεσμα αυτό ερχόταν σε πλήρη αντίθεση με το πρόγραμμα του Hilbert, για την απόδειξη της συνέπειας όλων των μαθηματικών συστημάτων. Ο Hilbert, προηγουμένως, είχε αναγάγει το πρόβλημα της απόδειξης της συνέπειας πολλών άλλων μαθηματικών κλάδων στο πρόβλημα της συνέπειας των φυσικών αριθμών. Κατά έναν τρόπο, τα σημαντικά αυτά αποτελέσματα του Godel έχουν θέσει όρια στην κλασσική αξιωματική προσέγγιση, δείχνοντας ότι δεν είναι δυνατή η πλήρης αξιωματική θεμελίωση ορισμένων σημαντικών μαθηματικών και ότι καμιά σοβαρή εγγύηση δεν μπορεί να δοθεί πως ορισμένοι σημαντικοί κλάδοι των μαθηματικών δεν έχουν εσωτερικές αντιφάσεις. Αυτοί είναι άτεγκοι περιορισμοί της αξιωματικής διαδικασίας. Δεν μπορούν, επομένως, να τεθούν εκ των προτέρων όρια στην εφευρετικότητα των μαθηματικών ως προς την επινόηση νέων διαδικασιών απόδειξης.

Μια από τις μεγαλύτερες επιτυχίες της λογικής των αρχών του 20ου αιώνα ήταν η διατύπωση ενός τυπικού ορισμού της έννοιας της μαθηματικής απόδειξης. Σύμφωνα με τη μαθηματική λογική, μια απόδειξη ενός μαθηματικού ισχυρισμού P συνίσταται από μια πεπερασμένη ακολουθία προτάσεων $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$, τέτοιων ώστε $P_\nu = P$, όπου για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu - 1$, P_{i+1} είναι είτε ένα αξίωμα είτε προκύπτει από τις $P_1, P_2, \ldots, P_i$ με βάση κάποιο επιτρεπτό κανόνα της λογικής συμπερασματολογίας (όπως π.χ. τον modus Ponens). Για να είναι, τώρα, όλη η διαδικασία εντελώς ακριβής, οι προτάσεις $P_1, P_2, \ldots, P_{\nu-1}$ θα πρέπει να γραφούν σε μια τυπικώς καθορισμένη γλώσσα, τέτοια όπως η κατηγορηματική λογική.

Βεβαίως, μια ματιά σ' οποιοδήποτε μαθηματικό βιβλίο ή ερευνητική εργασία που εκλέγεται στην τύχη – ακόμη και στην περιοχή της μαθηματικής λογικής – θα δείξει ότι οι μαθηματικοί δεν γράφουν σχεδόν ποτέ αποδείξεις στην αυστηρή μορφή που καθορίστηκε παραπάνω. Ο βασικότερος λόγος γι' αυτό είναι ότι για όλους τους μαθηματικούς ισχυρισμούς, εκτός ίσως τους απλούστατους, μια απόδειξη γραμμένη σύμφωνα με τους κανόνες της τυπικής λογικής θα ήταν τόσο πολύπλοκη, ώστε θα ήταν αδύνατο, πρακτικά, να την παρακολουθήσει ή πολύ περισσότερο να την κατανοήσει κανείς.

Η απόδειξη την εποχή του ηλεκτρονικού υπολογιστή

Παρατηρώντας την εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης τον 20ο αιώνα, θα μπορούσε να διακρίνει κάποιος χονδρικά δύο τάσεις. Μέχρι, περίπου, το 1960 δινόταν έμφαση στη διαμόρφωση γενικών μεθόδων και αφηρημένων θεωριών, όπως για παράδειγμα, αφηρημένη άλγεβρα, αλγεβρική τοπολογία, θεωρία κατανομών κλπ.. Από το τέλος της δεκαετίας του 1960 μέχρι σήμερα, δίνεται μεγαλύτερη προσοχή στην επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων, όπως για παράδειγμα, το πρόβλημα των τεσσάρων χρωμάτων, την εικασία Bieberhach, την εικασία Mordell, τις εικασίες του Poincare, την εικασία του Fermat κλπ. Ο ηλεκτρονικός υπολογιστής, χωρίς αμφιβολία, έπαιξε καθοριστικό ρόλο σ' αυτήν την εξέλιξη, αφού συνέβαλε στην ανάπτυξη νέων μαθηματικών πεδίων, όπως η αλγεβρική θεωρία κωδίκων, η αλγοριθμική ανάλυση, η θεωρία βελτιστοποίησης και έχει βοηθήσει στην αναζωογόνηση παλαιότερων μαθηματικών κλάδων, όπως για παράδειγμα, η θεωρία γραφημάτων και η συνδυαστική. Σημαντική είναι επίσης η συμβολή του στο σχηματισμό, έλεγχο, τροποποίηση ή απόρριψη εικασιών και πιο πρόσφατα στην απόδειξη θεωρημάτων.

Μια σημαντική εξέλιξη στα τέλη του 20ου αιώνα είναι η σύνδεση των αποδείξεων και των τυπικών συστημάτων με τον ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Κατ' αρχήν, βέβαια, το γεγονός αυτό δεν θα έπρεπε να προξενεί έκπληξη, αφού ένας από τους πρωταρχικούς στόχους της ανάπτυξης των τυπικών συστημάτων ήταν να προσφέρουν αποδεικτικές μεθόδους, οι οποίες θα ήταν δυνατόν να χρησιμοποιηθούν από μηχανές. Δύο κατευθύνσεις – σχολές διαφαίνονται εδώ. Η μία σχολή χρησιμοποιεί τους υπολογιστές για την απόδειξη μαθηματικών και λογικών θεωρημάτων κατά έναν εντελώς μηχανικό τρόπο (Nilsson, 1980). Μολονότι τα προγράμματα απόδειξης τέτοιων θεωρημάτων γίνονται όλο και πιο εκλεπτυσμένα, δεν έχουν αποδειχτεί μέχρι τώρα νέα και σημαντικά θεωρήματα. Βεβαίως, με τη ραγδαίως αναπτυσσόμενη δύναμη των υπολογιστών, σε συνδυασμό με την ανθρώπινη ευφυία, αυτή η κατάσταση μπορεί να αλλάξει μελλοντικά.

Η άλλη κατεύθυνση χαρακτηρίζεται από τη χρήση ενός συνδυασμού ανθρώπου και υπολογιστή για την απόδειξη ενός θεωρήματος. Η πρώτη και πιο δημοφιλής τέτοια περίπτωση είναι η απόδειξη του θεωρήματος των τεσσάρων χρωμάτων. Το 1976, οι μαθηματικοί Kenneth Appel και Wolfgang Haken του πανεπιστημίου του Ιλλινόϊς, απέδειξαν ότι τέσσερα χρώματα θα επαρκούσαν για να χρωματιστεί ένας χάρτης, έτσι ώστε δύο χώρες με ένα κοινό σύνορο να έχουν διαφορετικά χρώματα. Πολλοί μαθηματικοί είχαν εργαστεί πάνω στο πρόβλημα αυτό για πάνω από 120 χρόνια από τότε που πρωτοδιατυπώθηκε , ανακαλύπτοντας διάφορα αναγωγικά σχήματα που περιόριζαν τη μορφή του χάρτη που χρειάζεται να μελετηθεί. Οι έρευνες γίνονταν όλο και πιο περίπλοκες και αυτό οδήγησε στην ιδέα να προγραμματιστεί ο έλεγχος των αναγώγιμων μορφών σε ηλεκτρονικό υπολογιστή. Η απόδειξη των Appel και Haken περιέχει αρκετές εκατοντάδες σελίδες με πολύπλοκες λεπτομέρειες και συμπεριλαμβάνει τουλάχιστον 1000 ωρών υπολογισμούς σε υπολογιστή. Η απόδειξη περιλαμβάνει ελέγχους 1936 αναγώγιμων μορφών, που καθεμιά τους απαιτεί για τη διερεύνησή της μέχρι 500.000 λογικές επιλογές για να επαληθευτεί η αναγωγιμότητα (Τουμάσης, 1984).

Μετά την απόδειξη του θεωρήματος των τεσσάρων χρωμάτων, ακολούθησαν και άλλες υποβοηθούμενες από υπολογιστή αποδείξεις. Τέτοια είναι, για παράδειγμα, και η απόδειξη του αποκαλούμενου προβλήματος των προσκεκλημένων σ' ένα πάρτι (Horgan, 1993). Το πρόβλημα αυτό ανέκυψε από την εργασία του Βρετανού μαθηματικού Frank Ramsey τη δεκαετία 1920 πάνω στη συνολοθεωρία και αναφέρεται σε συσχετισμούς μεταξύ προσκεκλημένων σε ένα πάρτι. Ποιος είναι, δηλαδή, ο ελάχιστος αριθμός των καλεσμένων που πρέπει να προσκληθούν για να εξασφαλιστεί ότι τουλάχιστον Χ άνθρωποι είναι όλοι αμοιβαίως γνωστοί ή τουλάχιστον Ψ είναι αμοιβαίως άγνωστοι; Ο αριθμός αυτός είναι γνωστός ως αριθμός Ramsey.

Στη απόδειξή τους οι Radziszowski και Mckay έδειξαν, με τη βοήθεια υπολογιστή, ότι ο αριθμός Ramsey για τέσσερις φίλους ή πέντε άγνωστους είναι 25.

Η εμφάνιση τέτοιων αποδείξεων ξεσήκωσε αμέσως κάποιες αντιδράσεις και αντιρρήσεις, στην κατεύθυνση ότι αυτός ο τύπος της απόδειξης συνιστούσε μια μεγάλη απόκλιση από τα θέσφατα της παραδοσιακής μαθηματικής απόδειξης. Τα βασικά επιχειρήματα ήταν:

(α) Οι αποδείξεις αυτές αποτελούνται συνήθως από χιλιάδες σελίδες προγραμμάτων υπολογιστή, τα οποία ουδέποτε δημοσιεύονται και επομένως δεν είναι ανοικτά στις παραδοσιακές διαδικασίες ελέγχου από τη μαθηματική κοινότητα. Οι αποδείξεις αυτές δεν είναι δυνατόν να ελεχθούν εξονυχιστικά και επομένως είναι κατ' αρχήν ατελείς (Davis & Hersh, 1981, 151).

(β) Τόσο ο μηχανικός εξοπλισμός όσο και το λογισμικό των ηλεκτρονικών υπολογιστών υπόκεινται σε σφάλματα. Εάν συμβολίσουμε με P ($0 < P < 1$) την πιθανότητα επιτυχίας μιας στοιχειώδους πράξης σ' έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή, τότε η πιθανότητα επιτυχίας σε μια ακολουθία ν πράξεων είναι P^{ν}, δηλαδή αρκετά μικρή εάν το ν είναι πολύ μεγάλο. Ο Paul Davis υπολογίζει ότι εάν συμφωνήσουμε να δεχθούμε ως πιθανότητα αποτυχίας για κάθε πράξη όχι μεγαλύτερη του 1/1000, τότε δεν θα έπρεπε να εκτελεί ο υπολογιστής πάνω από $1/1000(1 - P)$ πράξεις. Με το δεδομένο ότι ο αριθμός των πράξεων οι οποίες πραγματοποιούνται συνήθως σε έναν υπολογιστή είναι τεράστιος, η πιθανότητα αποτυχίας είναι αρκετά σεβαστή. Γενικά αναφέρονται 38 τύποι λαθών τα οποία είναι δυνατόν να συμβούν σ' ένα υπολογισμό, ο οποίος πραγματοποιείται με ηλεκτρονικό υπολογιστή (Davis, 1972). Το 1991, ο David Stoutemyer, ένας σπεσιαλίστας στο λογισμικό, παρουσίασε 18 πειράματα στην άλγεβρα τα οποία έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις όταν εκτελέστηκαν με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή (Horgan, 1993). Επομένως, είναι λογικό να αισθάνονται κάποιοι ότι η εξαγωγή συμπερασμάτων με τη βοήθεια προγραμμάτων ηλεκτρονικού υπολογιστή δεν είναι τόσο αξιόπιστη όσο η κλασσική – παραδοσιακή μέθοδος ελέγχου των αποδείξεων από ειδικούς.

(γ) Η απόδειξη, γενικά, όταν παρουσιάζει την προέλευση των βασικών ιδεών οι οποίες οδήγησαν στο συγκεκριμένο συμπέρασμα, συμβάλλει στην καλύτερη κατανόηση. «Μια καλή απόδειξη είναι εκείνη η οποία μας κάνει σοφότερους», ισχυρίζεται ο Ρώσος μαθηματικός Yu.I. Manin (1979). Ο Pierre Deligue, στον οποίο απονεμήθηκε το 1978 το μετάλλιο Fields στα μαθηματικά (αντίστοιχο του βραβείου Νόμπελ), λεει: «Δεν πιστεύω σε μια απόδειξη η οποία διαμορφώνεται από έναν υπολογιστή. Κατά κάποιο τρόπο είμαι εγωκεντρικός. Πιστεύω σε μια απόδειξη εάν την κατανοήσω, εάν είναι καθαρή. Ένας υπολογιστής θα κάνει λάθη, όπως εξάλλου και ο άνθρωπος,. Μόνο που αυτά είναι πολύ πιο δύσκολο να εντοπιστούν» (Horgan, 1993).

Από την άλλη, οι υποστηρικτές των αποδείξεων με τη βοήθεια υπολογιστή ισχυρίζονται ότι λάθη και ατέλειες γίνονται και στις κλασσικές αποδείξεις. Τα λάθη στα συμβατικά μαθηματικά συγγράμματα μερικές φορές επιζούν χρόνια χωρίς να επισημανθούν. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η δημοσίευση το 1879 μιας απόδειξης του προβλήματος των τεσσάρων χρωμάτων από τον A.B. Kempe, η οποία όπως αποδείχθηκε 11 χρόνια μετά από τον P. Heawood, περιείχε ένα σοβαρό ελάττωμα και απορρίφθηκε (Τουμάσης, 1984). Ο Paul Davis (1972) αναφέρει ότι τα Mathematical Reviews του 1970 περιέχουν ένα paper με τίτλο «η παρακμή και η πτώση ενός θεωρήματος του Zarankiewicz». Αναφέρει, επίσης, ότι όπως του εκμυστηρεύτηκε κάποτε ένας πρώην εκδότης των Mathematical Reviews, το 50% περίπου όλων των μαθηματικών εργασιών που δημοσιεύονται σ' αυτά περιέχουν κάποιο ελάττωμα.

Ως προς τη δυνατότητα, επίσης, ελέγχου μιας απόδειξης η οποία γίνεται με τη βοήθεια υπολογιστή, οι υποστηρικτές των αποδείξεων αυτών ισχυρίζονται ότι τα πράγματα δεν είναι καλύτερα με τις παραδοσιακές – κλασσικές αποδείξεις. Το πρώτο σημαντικό παράδειγμα είναι η απόδειξη από τους Felt και Thompson, τη δεκαετία του 1960, της επιλυσιμότητας όλων των πεπερασμένων ομάδων περιττής τάξης και το δεύτερο παράδειγμα είναι η ταξινόμηση των πεπερασμένων απλών ομάδων, η οποία έγινε πραγματικότητα με την κοινή εργασία πολλών μαθηματικών, το μεγαλύτερο μέρος της οποίας δημοσιεύτηκε σε πολλά μαθηματικά περιοδικά τη δεκαετία του 1980. Η πρώτη απόδειξη ξεπερνά τις 300 σελίδες και είναι δημοσιευμένη σ' ένα ολόκληρο τεύχος του Pacific Journal of Mathematics, βασίζεται δε, σε πολλές προηγούμενες εργασίες. Η δεύτερη απόδειξη ξεπερνά τις 11.000 σελίδες (!) και είναι διασκορπισμένη σε πολλά ερευνητικά περιοδικά. Είναι λογικό λοιπόν να ισχυριστεί κανείς ότι είναι πέραν της ανθρώπινης ικανότητας να παρουσιαστεί ένα λογικό επιχείρημα, το οποίο αποτελείται από μερικές εκατοντάδες σελίδες, με απόλυτη ακρίβεια. Τι θα πρέπει να κάνει κάποιος μαθηματικός, ο οποίος είναι υποχρεωμένος να βασίσει την εργασία του πάνω σε τέτοια θεωρήματα; Να τα απορρίψει ή να τα αποδεχτεί και να προχωρήσει; Ιδού το μεγάλο δίλημμα (Kolota, 1976).

Ως αποτέλεσμα, κυρίως των παραπάνω εξελίξεων, μια νέα φιλοσοφία γύρω από τη φύση της μαθηματικής απόδειξης φαίνεται να αναδύεται, εκφραζόμενη μέσα από όρους όπως, δημόσια απόδειξη, ημιεμπειρικιστική απόδειξη και απόδειξη ως μια κοινωνική διαδικασία. Η ουσία αυτής της αντίληψης είναι ότι οι αποδείξεις δεν είναι αλάθητες και κατά συνέπεια, τα μαθηματικά θεωρήματα δεν είναι σε θέση να διασφαλίσουν την απόλυτη βεβαιότητα (Ernest, 1991). Αυτή η άποψη δεν αφορά φυσικά μόνο τα θεωρήματα τα οποί απαιτούν μεγάλες αποδείξεις ή τη βοήθεια ενός υπολογιστή, αλλά πολύ περισσότερα, αφού οι αποδείξεις των περισσοτέρων θεωρημάτων βασίζονται, συνήθως, πάνω στην ορθότητα άλλων θεωρημάτων. Εάν τώρα αναλογιστεί κανείς ότι οι αποδείξεις οι οποίες δημοσιεύονται διαβάζονται προσεκτικά, συνήθως, μόνο από το συγγραφέα και μερικούς ίσως ειδικούς, τα λάθη ή τα ελαττώματα είναι αναπόφευκτα.

Ο μαθηματικός Stanislaw Ulam (1976) εκτιμά ότι δημοσιεύονται περίπου 200.000 θεωρήματα το χρόνο. Ένα μέρος απ' αυτά έρχονται αργότερα σε αντίθεση ή απορρίπτονται, κάποια άλλα δέχονται μεγάλη αμφισβήτηση και τα περισσότερα αγνοούνται παντελώς ως ήσσονος σημασίας. Μόνο ένα μικρό ποσοστό απ' αυτά γίνονται κατανοητά και αποδεκτά από ένα μεγάλο μέρος της μαθηματικής κοινότητας. Ο Ρώσος μαθηματικός Yu. Manin συγκαταλέγεται μεταξύ εκείνων, οι οποίοι έχουν τονίσει ότι η αποδοχή μιας απόδειξης είναι ζήτημα πολύ περισσότερο μιας κοινωνικής διαδικασίας, παρά κάποιου ιδανικού αντικειμενικού κριτηρίου. «Μια απόδειξη γίνεται πραγματικά απόδειξη μετά την κοινωνική διεργασία της αποδοχής της ως απόδειξης. Αυτό ισχύει τόσο για τα μαθηματικά όσο και για τη φυσική, τη γλωσσολογία και τη βιολογία». (Manin, 1977, 48).

Σύμφωνα με την αντίληψη αυτή, η αλήθεια ενός θεωρήματος συνδέεται με μια πιθανότητα P. Η πιθανότητα αυτή αυξάνει στο βαθμό που περισσότεροι μαθηματικοί μελετούν, συζητούν και χρησιμοποιούν το θεώρημα. Σε τελική ανάλυση, η αποδοχή της εγκυρότητας της απόδειξης ενός θεωρήματος συνιστά μια κοινωνική διεργασία και βασίζεται στην εμπιστοσύνη της μαθηματικής κοινότητας, στα κοινωνικά συστήματα τα οποία έχει θεσμοθετήσει ως υπεύθυνα για την αξιολόγηση αυτής της αποδεικτικής διαδικασίας. Εάν ένα θεώρημα έχει δημοσιευτεί σ' ένα έγκυρο περιοδικό, εάν το όνομα του συγγραφέα είναι γνωστό, εάν το θεώρημα έχει αναφερθεί και χρησιμοποιηθεί από άλλους μαθηματικούς, τότε καθιερώνεται ως έγκυρη γνώση (Davis & Hersh, 1981, 390).

Ο Imre Lakatos (1978, 24 – 42). καταλήγει στο συμπέρασμα ότι τα μαθηματικά υπόκεινται σε σφάλματα και ότι οι μαθηματικές αλήθειες δεν είναι απόλυτες. Τα μαθηματικά θεωρήματα, ισχυρίζεται, δεν είναι αμετάβλητα· απεναντίας υπόκεινται σε σταθερό και διαρκή έλεγχο και είναι δυνατόν να απορριφθούν μέσω αντιπαραδειγμάτων. Οι αποδείξεις δεν είναι εργαλεία δικαιολόγησης, αλλά μηχανισμοί ανακάλυψης με σκοπό να συμβάλλουν στην ανάπτυξη των εννοιών και το ραφινάρισμα των εικασιών. Η αλληλεπίδραση μεταξύ εικασίας, απόδειξης, αντιπαραδείγματος και τελειοποίησης της εικασίας, αποτελεί το ζωντανό αίμα των μαθηματικών. Οι ιδέες αυτές ξεκαθαρίζονται με έναν αριστουργηματικό τρόπο με το παράδειγμα της ιστορίας του τύπου των Descartes – Euler $V - E + F = 2$ για ένα πολύεδρο. Παρουσιάζεται στην αρχή μια απόδειξη, μετά εισάγονται αντιπαραδείγματα, η εικασία $V - E + F = 2$ τροποποιείται (δηλαδή, η έννοια του πολυέδρου τροποποιείται) κια μια νέα απόδειξη δίνεται. Το «δούναι και λαβείν» αυτής της ιστορικής – φιλοσοφικής – παιδαγωγικής αλληλεπίδρασης, ενσωματώνει μια ιστορική ανάλυση 200 περίπου χρόνων και περιγράφεται με γλαφυρό τρόπο σε κείμενο το οποίο ξεπερνά τις 100 σελίδες (Lakatos, 1976).

Μια άλλη ενδιαφέρουσα εξέλιξη σχετική με την έννοια της απόδειξης έχει να κάνει με τις πιθανοτικές αποδείξεις. Οι αποδείξεις αυτές βασίζονται σε μια τεχνική, η οποία δεν προσφέρει βεβαιότητα αλλά μόνο μια στατιστική πιθανότητα αλήθειας. Έχει δειχθεί ότι κάποια αποτελέσματα, ακόμη κι αν είναι θεωρητικώς προσδιορίσιμα, έχουν τόσο μεγάλες αποδείξεις που δεν είναι δυνατόν ποτέ να γραφούν ούτε από ανθρώπους, αλλά ούτε και από υπολογιστές (Stockmeyer & Chandra, 1979). Τέτοιο παράδειγμα αποτελούν οι έλεγχοι που γίνονται για να διαπιστωθεί εάν ένας πολύ μεγάλος αριθμός είναι πρώτος. Ο Michael Rabin πρότεινε το 1976 τη χαλάρωση της έννοιας της απόδειξης, ως προς την αυστηρότητα, με την αποδοχή πιθανοτικών αποδείξεων (Rabin, 1976). Για παράδειγμα, ο ίδιος βρήκε ένα γρήγορο τρόπο να διαπιστώνει, με μια πολύ μικρή πιθανότητα σφάλματος ($1/10^9$), εάν ή όχι ένας τυχαία εκλεγόμενος αριθμός είναι πρώτος. Μ' αυτόν τον τρόπο έδειξε ότι ο αριθμός 2^{400}- 593 είναι πρώτος «για όλους τους πρακτικούς σκοπούς». Αργότερα, βέβαια, αποδείχθηκε με τον κλασσικό – παραδοσιακό τρόπο ότι ο αριθμός αυτός είναι πράγματι πρώτος (Pomerance, 1981).

Η τελευταία σύγχρονη εξέλιξη που αφορά την έννοια της απόδειξης είναι η βιντεο – απόδειξη, δηλαδή η απόδειξη η οποία γίνεται μέσω εικόνας υπολογιστή. Ο William Thurston, ένας διακεκριμένος Αμερικάνος μαθηματικός, ο οποίος το 1982 κέρδισε για τις εργασίες του το μετάλλιο Fields, παρήγαγε το 1992 στο κέντρο γεωμετρίας της Minessota μια βιντεο – απόδειξη για μια εικασία την οποία είχε αποδείξει ο ίδιος μια δεκαετία πριν με τον κλασσικό τρόπο. Η εικασία αυτή διατύπωνε μια θεμελιώδη σχέση μεταξύ τοπολογίας κια υπερβολικής γεωμετρίας (Horgan, 1993).

Το αβέβαιο μέλλον

Η μαθηματική κοινότητα των «καθαρών» μαθηματικών θεωρεί μέχρι και σήμερα και είναι βέβαιο ότι θα εξακολουθεί να θεωρεί, τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές σαν κάτι παρόμοιο με βάρβαρους επιδρομείς και βέβηλους εισβολείς του ιερού εδάφους των μαθηματικών, οι οποίοι ανέτρεψαν το οικοσύστημά του. Όλοι αυτοί οι οποίοι πιστεύουν ότι τα πειραματικά μαθηματικά, οι πιθανοτικές αποδείξεις ή οι αποδείξεις οι οποίες βασίζονται στους υπολογιστές, είναι βδελυγμίες μάλλον παρά καινοτομίες, φέρνουν ως λαμπρό παράδειγμα την απόδειξη του τελευταίου θεωρήματος του Fermat από τον Άγγλο μαθηματικό Andrew Wiles, ένα θρίαμβο τον οποίο προπαγανδίζουν, ως ένα θρίαμβο της μαθηματικής παράδοσης έναντι των παραπάνω σύγχρονων εξελίξεων. Βέβαια και ο ίδιος ο Wiles παραδέχεται ότι ο έλεγχος εικασιών με τη βοήθεια υπολογιστών μπορεί να αποβεί χρήσιμος (Horgan, 1993). Εξάλλου, τη δεκαετία του 1970, έλεγχοι με ηλεκτρονικό υπολογιστή υπέδειξαν ότι η εικασία των Taniyama – Shimura θα μπορούσε να ήταν αληθής. Αυτοί οι έλεγχοι παρακίνησαν την έρευνα η οποία τελικά κατέληξε στην απόδειξη του Wiles.

Όπως και να το κάνουμε πάντως, διαφαίνεται σε πολλούς μαθηματικούς μια τάση για αμφισβήτηση της παραδοσιακής αντίληψης ότι, δηλαδή, οι τυπικές αποδείξεις αποτελούν το υπέρτατο κριτήριο της αλήθειας. Μολονότι κανένας δεν υποστηρίζει ότι οι κλασσικές αποδείξεις θα πρέπει να καταργηθούν, από την άλλη διαβλέπουν ότι η σημασία της παραδοσιακής μαθηματικής απόδειξης θα αρχίσει να μειώνεται στο μέλλον, αφού όλο και περισσότεροι μαθηματικοί θα είναι αναγκασμένοι να παράγουν μαθηματικά χωρίς να προσφέρουν υποχρεωτικά αποδείξεις. Κάτι τέτοιο μπορεί να είναι αναπόφευκτο εάν λάβει κανείς υπόψη του ότι η μαθηματική επιστήμη γίνεται όλο και πιο πολύπλοκη και τα αποτελέσματα που θα είναι σε θέση να αποδείξει κανείς με τον παραδοσιακό τρόπο αποτελούν μικρές νησίδες, εξαιρέσεις, συγκρινόμενα με τον απέραντο ωκεανό των αποτελεσμάτων τα οποία δεν είναι δυνατόν να αποδειχθούν από το ανθρώπινο μυαλό μόνο. Για το λόγο αυτό, αρκετοί είναι εκείνοι οι οποίοι ομιλούν για τους πειραματικούς μαθηματικούς και τα μισο-αυστηρά μαθηματικά του μέλλοντος. Ο Μαθηματικός Doron Zeilberger (1993) γράφει χαρακτηριστικά: «Είμαι σε θέση να φανταστώ μια μελλοντική εργασία στην περίληψη της οποίας θα αναφέρεται: Δείχνουμε με κάποια αίσθηση ακρίβειας ότι η εικασία του Goldbach είναι πράγματι αληθής με πιθανότητα μεγαλύτερη από 0,99999 και ότι η πλήρης αλήθεια της θα ήταν δυνατόν να καθοριστεί με ένα κονδύλι της τάξης των 10 δισεκατομμυρίων δολαρίων».

Τα συμβατικά – παραδοσιακά μαθηματικά αναπτύχθηκαν σε ένα καθεστώς όπου το μέγεθος των αποδείξεων ήταν πολύ μικρό, έτσι ώστε η εγκυρότητά τους μπορούσε να φτάσει στο επίπεδο του απολύτου. Υπάρχουν βάσιμες ενδείξεις ότι τα μελλοντικά μαθηματικά θα κινηθούν σε κατευθύνσεις όπου η αποδεικτική πλευρά θα εξασθενίσει, με την έννοια ότι θα πάψει να έχει την κλασσική σημασία που είχε και οι μαθηματικοί θα υποχρεωθούν να προσαρμοστούν στην ιδέα για λιγότερη αυστηρότητα και ακρίβεια ως αναγκαίο πια κακό. Είναι δυνατόν να αναπτυχθεί μελλοντικά ένας νέος τύπος μαθηματικών, των οποίων οι διαδικασίες και τα εξαγόμενα να είναι τόσο πολύ εκτεταμένα, ώστε η πιθανοτική φύση των αποτελεσμάτων να αποτελεί ένα αναπόσπαστο χαρακτηριστικό τους.

Ορισμένοι, βέβαια, ισχυρίζονται ότι δεν υπάρχει ουσιώδης διαφορά μεταξύ των πιθανοτικών αποδείξεων και των ντετερμινιστικών αποδείξεων της παραδοσιακής – κλασικής μαθηματικής πρακτικής, Και τα δύο είδη συνιστούν πειστικά επιχειρήματα· και τα δύο είδη πρέπει να γίνουν αποδεκτά με κάποια πιθανότητα σφάλματος. Στην πραγματικότητα μάλιστα, πολλές ντετερμινιστικές αποδείξεις παρουσιάζουν υψηλότερη πιθανότητα σφάλματος παρά οι πιθανοτικές αποδείξεις. Το αντι-επιχείρημα, βέβαια είναι ότι υπάρχει μια θεμελιώδης ποιοτική διαφορά μεταξύ των δύο αυτών τύπων απόδειξης. Μολονότι αμφότεροι είναι δυνατόν να υπόκεινται σε σφάλμα, εντούτοις μια ουσιώδης φιλοσοφική διάκριση του ξεχωρίζει. Εάν οι πιθανοτικές αποδείξεις τύχουν τελικά ευρείας αποδοχής, το γεγονός αυτό θα ενδυνάμωνε τη θέση για την ημιεμπειρική φύση των μαθηματικών (Τουμάσης, 1994, 86) και θα συνιστούσε μια ριζική απομάκρυνση από την παραδοσιακή – απόλυτη άποψη της μαθηματικής επιστήμης.

Συνέπειες για τη διδασκαλία των μαθηματικών

Η αυξανόμενη χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών στα μαθηματικά έχει επηρεάσει, όπως εξάλλου ήταν φυσικό και τη διδασκαλία των μαθηματικών, Τα τελευταία 15 περίπου χρόνια πολλοί μαθηματικοί – παιδαγωγοί παρακολουθούν με ενδιαφέρον τις αλλαγές που οι υπολογιστές έχουν δρομολογήσει στη μαθηματική επιστήμη και μελετούν κριτικά τις επιπτώσεις που αυτές μπορεί να έχουν στο οικοσύστημα της μαθηματικής εκπαίδευσης (Fey, 1984). Ως απαύγασμα της επιστημονικής αυτής συζήτησης διαφαίνεται μια τάση απομάκρυνσης από την προσκόλληση στις αυστηρές αποδείξεις και μια διάθεση για χαλάρωση των κριτηρίων αποδοχής μιας απόδειξης (Hanna, 1989). Η επιθυμία να ληφθεί υπόψη ο ρόλος της απόδειξης ως μέσο επικοινωνίας και να αναγνωριστεί η σημασία της κοινωνικής διαδικασίας για την αποδοχή ενός νέου αποτελέσματος από τη μαθηματική κοινότητα, έχει αναγκάσει τους μαθηματικούς – παιδαγωγούς να δώσουν μεγαλύτερη έμφαση στην έννοια της απόδειξης ως ένα είδος επιχειρήματος το οποίο έχει ως σκοπό να πείσει και να αποσαφηνίσει.

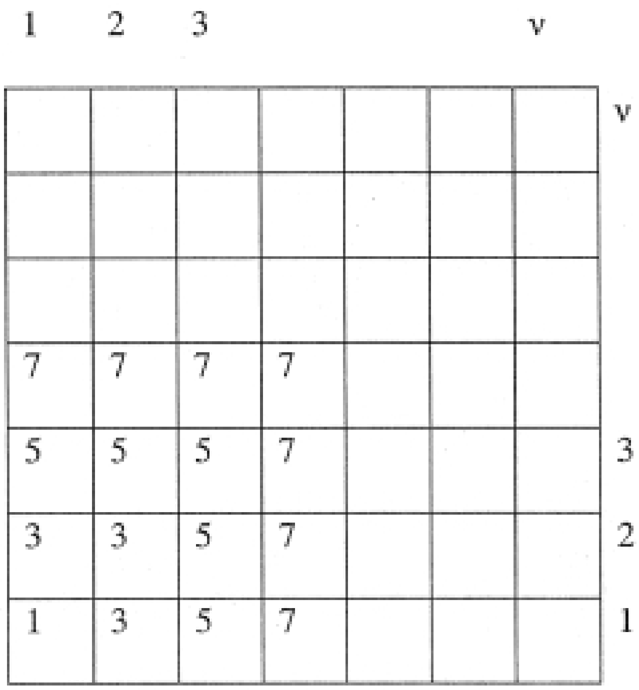
Αυτή η τάση απομάκρυνσης από την τυπική – φορμαλιστική απόδειξη στα σχολικά προγράμματα και η επακόλουθη έρευνα για εναλλακτικούς τρόπους και μορφές εξασφάλισης της εγκυρότητας των μαθηματικών αποτελεσμάτων στη σχολική τάξη, έχει δώσει ώθηση στη μελέτη των προβλημάτων που έχουν σχέση με τη διδασκαλία της απόδειξης. Αρκετές μελέτες έχουν εμφανιστεί με στόχο να φωτίσουν διάφορες πλευρές της διδακτικής της απόδειξης και να προσφέρουν ενδιαφέροντες νέους τρόπους διδασκαλίας της (Alibert, 1988˙ Movskovitz – Hadar, 1988˙ Hanna, 1998). Σ' όλες αυτές τις εργασίες, η απόδειξη δεν θεωρείται απλώς ένα μέσο το οποίο αποδεικνύει μόνο, αλλά ένα εργαλείο μέσω του οποίου επιτυγχάνεται καλύτερη κατανόηση. Η Hanna (1998) θεωρεί ότι η πιο σπουδαία λειτουργία της απόδειξης είναι η επεξηγηματική ή διασαφηνιστική. Η καλύτερη απόδειξη, ακόμη και στα μάτια των επαγγελματιών μαθηματικών, είναι εκείνη η οποία όχι μόνο εδραιώνει την αλήθεια ενός θεωρήματος, αλλά βοηθάει επίσης στην καλύτερη κατανόησή του.

Μια επεξηγηματική απόδειξη, για παράδειγμα, προσφέρει άφθονη οπτική πληροφορία, κάτι που συμφωνεί, εξάλλου, και με τη μαθηματική πρακτική. Η μεγάλη πλειοψηφία των μαθηματικών ισχυρίζονται ότι, ακόμη και όταν σκέφτονται αφηρημένα, με τα μάτια τους κλειστά, οι διαδικασίες που λαμβάνουν χώρα στη σκέψη τους είναι πρωτίστως εικονογραφικές και όχι συμβολικές ή γλωσσικές. Για τους περισσότερους μαθηματικούς τα μαθηματικά είναι κατ' εξοχήν οπτικά και παραστατικά, ακόμη και όταν οι διανοητικές εικόνες που σχηματίζει ο μαθηματικός ενίοτε στο μυαλό του είναι σε υψηλό βαθμό αφηρημένες.

Η χρήση των διαγραμμάτων μπορεί όχι μόνο να κάνει τη λύση ενός προβλήματος ευκολότερη, αλλά να την κάνει και καλύτερη. Ένα κριτήριο για το αν μια απόδειξη είναι καλύτερη από μια άλλη είναι το κατά πόσο βοηθάει στη βαθύτερη σύλληψη του προβλήματος, προσφέροντας όχι μόνο μια απόδειξη της αλήθειας, αλλά ανοίγοντας δρόμους στην πραγματική κατανόηση. Η αλήθεια αποτελεί μία μόνο (σπουδαία βέβαια) πλευρά της κατανόησης.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το πολύ γνωστό αποτέλεσμα ότι το άθροισμα των ν πρώτων περιττών φυσικών αριθμών ισούται με ν^2, δηλαδή $1 + 3 + 5 + ...+ (2\nu - 1) = \nu^2$. Μια αυστηρή απόδειξη με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής εξασφαλίζει ότι αυτή η παραπάνω ταυτότητα ισχύει για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Αλλά πού πήγε η βαθιά σύλληψη του πράγματος; Κατά ποιον τρόπο η απόδειξη αυτή αυξάνει την κατανόησή μας για το τι πράγματι συμβαίνει; Μπορεί η απόδειξη αυτή να είναι τέλεια, σύμφωνα με τους κανόνες της τυπικής λογικής˙ αλλά σε τι μας βοηθάει να συλλάβουμε την προέλευση των ιδεών που οδήγησαν στο αποτέλεσμα; Σε τι μας βοηθάει να κατανοήσουμε γιατί συμβαίνει κάτι τέτοιο ή πώς θα μπορούσε να ανακαλυφθεί η ταυτότητα αυτή; Όχι μόνο δεν βοηθάει αλλά καλλιεργεί την εντύπωση ότι η ταυτότητα είναι ένα ακόμη περίεργο και απροσδόκητο αποτέλεσμα, που οφείλεται σε ένα καπρίτσιο των φυσικών αριθμών.

Ας κοιτάξουμε τώρα στο παρακάτω σχήμα. Το διάγραμμα αυτό αποδεικνύει το αποτέλεσμα χωρίς σχεδόν να απαιτείται επιπρόσθετη εξήγηση. Το μάτι βλέπει μονομιάς τη διάταξη που δίνει το αποτέλεσμα. Το διαδοχικό άθροισμα των αριθμών στα τετραγωνάκια, συμπληρώνει κάθε φορά ένα τετράγωνο. Η απόδειξη γίνεται έτσι διαυγής και πολύ περισσότερο κατατοπιστική.



Μια οπτική απόδειξη του τύπου $1 + 3 + 5 + \ldots + (2\nu - 1) = \nu^2$

Μια άλλη εξέλιξη, αποτέλεσμα της επίδρασης της τεχνολογίας των ηλεκτρονικών υπολογιστών στη μαθηματική εκπαίδευση, παρατηρείται στη διδασκαλία της γεωμετρίας, ιδιαίτερα με την εμφάνιση των λογισμικών πακέτων γραφικών. Τα πακέτα αυτά προσφέρουν τη δυνατότητα σχηματισμού και χειρισμού σχημάτων με μεγάλη ευκολία. Τα λογισμικά Geometric Supposer (Schwartz and Yerushalmy, 1986), Geometer's Sketchpad (Jackiw,

1991) και Cabri Geometry (Laborde & Bellemain, 1994), για παράδειγμα, βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν τις γεωμετρικές αποδείξεις, προσφέροντάς τους τη δυνατότητα να κάνουν γεωμετρικές κατασκευές με υψηλό βαθμός ακρίβειας. Έτσι, είναι σε θέση να διαπιστώσουν τη σημασία των προτάσεων οι οποίες αποτελούν μέρος της απόδειξης ή εκείνων που απαρτίζουν το προς απόδειξη θεώρημα. Με τη βοήθεια, επίσης, αυτού του λογισμικού είναι σε θέση οι μαθητές να ελέγξουν εύκολα εικασίες ή ακόμη να ανακαλύψουν νέες ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων. Προσφέρεται, κατ' αυτόν τον τρόπο, η δυνατότητα στο δάσκαλο να διαμορφώσει μέσα στην τάξη ένα κλίμα αναζήτησης, εξερεύνησης, πειραματισμού και έντονου προβληματισμού, το οποίο φέρνει τη διδασκαλία των μαθηματικών πιο κοντά στη γνήσια μαθηματική δημιουργία και προσφέρει άφθονα κίνητρα μάθησης.

Ελλοχεύει, βέβαια, πάντα ο κίνδυνος να παρανοηθούν οι δυνατότητες αυτών των λογισμικών, με την έννοια ότι κάποιοι θα αμφισβητούσαν τη σκοπιμότητα των κλασικών αναλυτικών γεωμετρικών αποδείξεων, σε συνδυασμό και με τη δυσκολία που οι μαθητές συναντούν σ' αυτές (Senk, 1985). Μια τέτοια παρανόηση θα συνέβαλε στην απομάκρυνση ή τον εκφυλισμό της αναλυτικής απόδειξης και τη μελλοντική αντικατάστασή της με την πειραματική απόδειξη, η οποία θα βασίζονταν στη μελέτη μεγάλου αριθμού περιπτώσεων. Σε καμιά όμως περίπτωση μια τέτοια πρακτική δεν θα ήταν σε θέση να δείξει στους μαθητές γιατί ένα θεώρημα είναι αληθές, πολύ δε περισσότερο γιατί είναι πάντα αληθές. Οπωσδήποτε, μια τέτοια θεώρηση των σχολικών μαθηματικών όχι μόνο θα ήταν εντελώς ξένη προς την θεωρία και πρακτική της μαθηματικής επιστήμης, αλλά και σε καμιά περίπτωση δεν θα αντανακλούσε τη φύση και ουσία της.

Η βασική αποστολή του δασκάλου των μαθηματικών είναι να βοηθήσει τους μαθητές του να αγαπήσουν τα μαθηματικά και να τα κατανοήσουν ως ένα σημαντικό επίτευγμα του ανθρώπινου πολιτισμού. Η απόδειξη είναι ένα σημαντικό στοιχείο της μαθηματικής επιστήμης και επομένως και του ανθρώπινου πολιτισμού. Οπωσδήποτε, είναι σπουδαίο να γνωρίζουν τα παιδιά να σκέπτονται, να εξηγούν, να δικαιολογούν και να αποδεικνύουν τις ιδέες τους, αλλά αυτό που είναι ακόμα πιο σπουδαίο είναι η διαδικασία ανάπτυξης αυτών των δεξιοτήτων. Η ανάγκη για αυστηρότητα στην απόδειξη δεν πρέπει να αντιμετωπίζεται ως μια απλή, στατική έννοια. Ο Freudenthal (1973) ισχυρίζεται ότι στην ιστορία των μαθηματικών, η έννοια της αυστηρότητας δεν παρέμεινε αμετάβλητη, αλλά εξελίσσονταν συνεχώς. Στη συνέχεια, αναγνωρίζει την αξία της διαισθητικής σκέψης και θεωρεί ότι η εργασία που κάνει ένα παιδί 6 χρονών εκτελώντας έναν υπολογισμό με τα δάκτυλα του συνιστά, για το επίπεδό του, μια αυστηρή απόδειξη. Το όραμα και η μελλοντική πρόκληση για τους μαθηματικούς – παιδαγωγούς και τους δασκάλους των μαθηματικών βρίσκεται στο να επινοήσουν τεχνικές, οι οποίες θα αξιοποιούν το μαθηματικό εκπαιδευτικό λογισμικό, με απώτερο σκοπό τη διαμόρφωση πιο διαφωτιστικών, διαυγών και κατανοητών αποδείξεων.

ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ

Alibert, D. (1988). "Towards new customs in the classroom". For the learning of Mathematics, 8(2), 31 – 35.

Αναπολιτάνος, Δ. (1985). «Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών». Εκδ. Νεφέλη, Αθήνα.

Bell, E.T. (1945). "The development of Mathematics, 2nd edition". McGraw – Hill, New York.

Davis, P.J. (1972). "Fidelity in mathematical discourse: is one and one really two?". American Mathematical Monthly, 79, 252 – 262.

Davis, P.J. and Hersh, R. (1981). "The Mathematical Experience". Birkhauser, Boston.

Ernest, P. (1991). "The philosophy of Mathematics Education". The Falmer Press, London.

Eves, H. (1989). «Μεγάλες στιγμές των μαθηματικών έως το 1650». Εκδ. Τροχαλία, Αθήνα.

Fey, J.T. et al. (Eds) (1984). "Computing and Mathematics: The impact on Secondary School Curricula". National Council of Teachers of Mathematics.

Freudenthal, H. (1973). "Mathematics as an educational task", Reidel.

Hanna, G. (1998). "Proof as an explanation in Geometry". Focus on Learning Problems in Mathematics, 20(2, 3), 4 – 13.

Horgan, J. (1993). "The death of Proof". Scientific American, 269 (4), 93 – 103.

Jackiw, N. (1991). "The Geometer's Sketchpad". Berkley, Ca: Key Curriculum Press.

Kline, M. (xx). «Τα μαθηματικά στο Δυτικό πολιτισμό», τομ. Β' Εκδ. Κώδικας, Αθήνα.

Kline, M. (1972). "Mathematical Thought from Ancient to Modern Times". Oxford University Press, New York.

Kline, M. (1980). "Mathematics, The Loss of Certainty". Oxford University Press, New York.

Kolota, G. (1976). "Mathematical proofs: The genesis of reasonable doubt". Science 192, 989 – 990.

Kuhn, T.S. (1981). «Η δομή των επιστημονικών επαναστάσεων». Εκδ. Σύγχρονα θέματα, Θεσσαλονίκη.

Laborde, J.M. & Bellemain, F. (1994). "Cabri Geometry II". Texas Instruments, Dallas, Texas.

Lakatos, I. (1976). "Proofs and Refutations". Cambridge University Press, New York.

Lakatos, I. (1978). "Mathematics, science and epistemology", Philosophical papers, vol.2, Cambridge University Press, London.

Manin, Y.I. (1977). "A course in mathematical logic". New York, Springer – Verlag.

Manin, Y.I. (1979). "How convincing is a proof?" Mathematical Intelligencer, 2(1), 17- 18.

Moshovits – Hadar, N. (1998). "Stimulating presentation of theorems followed by responsive proofs". For the Learning of Mathematics, 8(2), 12 – 19.

Nagel, W. & Newman, J. (1991). "Το θεώρημα του Godel". Εκδ. Τροχαλία, Αθήνα.

Nilson, N. (1980). "Principles of Artificial Intelligence". Tioga Publishing, Palo Alto.

Pomerance, C. (1981). "Recent developments in primality testing". Mathematical Intelligencer 3(3), 97 – 105.

Rabin, M, (1976). "Probabilistic algorithms". In Algorithms and Complexity: New Directions and Resent Results, ed. By J.F. Traub. Academic Press, New York, 21 – 40.

Schwartz, J. & Yerushalmy, M. (1986). "The geometric supposer". Pleasantville, New York.

Senk, S.L. (1985). "How well students write geometric proofs". Mathematics Teacher, 6, 448 – 456.

Snapper, E. (1979). "The three crises in mathematics: logicism, intuitionism and formalism". Mathematics Magazine, 52, 207 – 216.

Steen, L.A. (1986). "Living with a New Mathematical Species". Mathematical Intelligencer, 8(2), 33 – 40.

Stockmeyer, L.J & Chandra, A.K. (1979). "Intrinsically difficult problems". Scientific American, 240, 140 – 159.

Τουμάσης, Μπ. (1984). «Το πρόβλημα των τεσσάρων χρωμάτων και οι φιλοσοφικές του διαστάσεις». Μαθηματική Επιθεώρηση, 26, 32 – 61.

Τουμάσης, Μπ. (1984). «Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών». Εκδ.

Gutenberg, Αθήνα.
Ulam, S.M. (1976). "Adventures of a Mathematician". Scribner, New York.
Wilder, R.L. (1967). "The role of the axiomatic method". American Mathematical Monthly, 74, 115 – 127.
Zeilberger, D. (1993). "Theorems for price: Tomorrow's semi-rigorous mathematical culture". Notices of the American Mathematical Society, 40(8), 978 – 981.