Author: Th. Leontiadis

Title: Konvergenzsaetze fur ein voll Daniell-integral

Creator: HDML

BULLETIN THE
GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
VOLUME 30, 1989

KONVERGENZSÄTZE FÜR EIN VOLL DANIELL-INTEGRAL

BY
TH. LEONTIADIS

Wiederholung, aus [4], der drei Schritten der Erweiterung des verallgemeinerten Daniell-Integrals $I: E \subset \hat{E} \to G$.

1. Auf der isotone Hülle $E^{\sigma} := \{x \in \hat{E} \mid x_n \uparrow x,\ x_n \in E$ und die Folge $(I(x_n))_{n\in N}$ nach oben beschränkt$\}$ des Unterverbandes E, definieren wir die Abbildung $I^1: E^{\sigma} \to G$ mit $I^1(x) := \bigvee_n I(x_n)$, $(x_n \in E)$, welche eine Fortsetzung des Integrals I ist und dieselben Eigenschaften hat wie I, ausser die 3te Eigenschaft. Ebenfals die Abbildung $I_1: E_{\sigma} \to G$ mit $I_1(x) = \bigwedge_n I(x_n)$, $(x_n \in E)$ hat alle Eigenschaften von I, ausser der 3te. Hier $E_{\sigma} := \{x \in E \mid x_n \downarrow x,\ x_n \in E$ und $(I(x_n)_{n\in N}$ nach unten beschränkt$\}$.

2. Die Abbildung $I^*(x) := \bigwedge_{x\leq y} I^1(y)$, $x \in \hat{E}$ und $y \in E^{\sigma}$ hat alle Eigenschaften der Abbildung I^1, ausser die 2te, welche nur als Ungleichung gilt. I^* ist eine Erweiterung von I^1. Das gleiche gilt für die Abbildung $I_*(x) = \bigvee_{x\geq y} I_1(z)$, $x \in \hat{E}$ und $y \in E_{\sigma}$.

3. Die Abbildung $\hat{I}: S(E) \to G$ ist die gesuchte Fortsetzung von I und ist ebenfals, wie I, ein verallgemeinertes Daniell-Integral auf dem Unterverband $S(E) := \{x \in \hat{E} \mid I_*(x) = I^*(x) =: \hat{I}(x)\}$ des gegebenen Verbandes $\hat{E}$.

In der Arbeit [4] wurde das Problem der Erweiterung eines verallgemeinerten ($\equiv$voll) Daniell-integrals I auf einem O-topologischen σ-Berband mit Werten in einer "schwach σ-distributiv" (Vgl. [5]) Verbandsgruppe G untersucht, d.h. einer Abbildung $I: E \subset \hat{E} \to G$ mit folgenden Eigenschaften (Vgl. [1] und [3]):

1. Aus $x \leqslant y$, $x, y \in E$ folgt $I(x) \leqslant I(y)$.
2. $I(x \vee y) + I(x \wedge y) = I(x) + I(y)$, $x, y \in E$.
3. Wenn $E \ni x_n \uparrow$ und die Folge $\{I(x_n)\}_{n\in N}$ nach oben beschränkt in G ist dann $\bigvee_n x_n \in E$ und dual.
4. Wenn $E \ni x_n \uparrow x$ bzw. $E \ni y_n \downarrow y$ dann $I(x_n) \uparrow I(x)$ bzw. $I(y_n) \downarrow I(y)$.

E ist ein Unterverband des O-topologischen σ-Verbandes $\hat{E}$. Mit S(E)

bezeichnen wir die Menge $\{x \in \hat{E} \mid I_*(x) = I^*(x) =: \hat{I}(x)\}$, welche ein Unterverband von $\hat{E}$ ist (s. [4], 68-69).

In dieser Arbeit werden wir einige grundlegende Konvergenzsätze beweisen, welche Verallgemeinerungen (in unserem Fall) der Konvergenzsätze der klassischen Integrationstheorie von Lebesgue sind.

Satz 1. (Von der monotonen Konvergenz: B. Levi): Es sei $\{x_n\}_{n=1,2,...}$ eine Folge von Elementen x_n aus $S(E)$ mit $x_n \uparrow x \in \hat{E}$ und es sei die Folge $\{\hat{I}(x_n)\}_{n \in N}$ der Integralen $\hat{I}(x_n)$ nach oben beschränkt in G, dann ist: (i) $x \in S(E)$ und ii) $\hat{I}(x_n) \uparrow \hat{I}(x)$.

Es gilt auch das duale.

Der Beweis ist eine unmittelbare Folge des Satzes 4/(iii) in [4].

Satz 2: Es sei $\bigwedge_{m \geq m_0} \bigvee_{n \geq m} x_n =: q$ und $\bigvee_{m \geq m_0} \bigwedge_{n \geq m} x_n =: r$, mit $x_n \in S(E)$, $n \in N$.

(a) Wenn ein $z \in S(E)$ mit $x_n \leqslant z$, $\forall n = 1,2,...$, existiert und wenn die Folge $\{\hat{I}(x_n)\}_{n \in N}$ nach unten beschränkt in G ist d.h. $\exists g \in G$: $g \leqslant \hat{I}(x_n)$, $\forall n = 1,2,...$, dann ist: (i) $q \in S(E)$ und (ii) $g \leqslant \hat{I}(q)$.

(b) (Lemma-Fatou's): Wenn ein $y \in S(E)$ mit $y \leqslant x_n$, $\forall n = 1,2,...$ existiert und wenn die Folge $\{\hat{I}(x_n)\}_{n \in N}$ nach oben beschränkt in G ist d.h. existiert ein $g \in G$: $\hat{I}(x_n) \leqslant g$, $\forall n = 1,2,...$, dann ist: (i) $r \in S(E)$, (ii) $\hat{I}(r) \leqslant g$.

Beweis. Es sei $u_{nj} := x_n \vee x_{n+1} \vee ... \vee x_{n+j}$ und $u_n := \bigvee_{i \geq n} x_i$.

Es ist $u_{nj} \in S(E)$, da $x_n \in S(E)$ und $S(E)$ ein Unterverband von E ist.

Für n konstant und j veränderlich haben wir $u_{nj} \uparrow u_n$ d.h. $u_{nj} \leqslant u_{n(j+1)}$ und $\bigvee_{k \geq 1} u_{nk} = u_n$.

Per Definitionem von u_{nj} haben wir die folgenden Ungleichungen: $u_{nj} \leqslant y$ und $\hat{I}(u_{nj}) \leqslant \hat{I}(y) =: g' \in G$, da $\hat{I}$ isoton ist. Nun, aus $u_{nj} \uparrow u_n$, $(u_{nj} \in S(E))$, die Folge $\{\hat{I}(u_{nj})\}$ nach oben beschränkt in G ist, und dem Satz 1, haben wir $u_n \in S(E)$.

Aus der Definition von u_n, haben wir $u_n \downarrow q$ und $x_n \leqslant u_n$. Daraus folgt $\hat{I}(x_n) \leqslant \hat{I}(u_n)$ und weiter $g \leqslant \hat{I}(u_n)$.

Nun, aus $u_n \downarrow q$, $\{\hat{I}(u_n)\}_{n \in N}$ nach unten beschränkt und das duale zum Satz 1, bekommen wir $q \in S(E)$ und $\hat{I}(u_n) \downarrow \hat{I}(q)$.

Schliesslich, aus der Ungleichung $g \leqslant \hat{I}(x_n) \leqslant \hat{I}(u_n)$ ergibt das gewünschte: $g \leqslant \hat{I}(q)$.

(b) Ähnlich wie in (a) zeigen wir dass die Folge $\{U_n\}_{n=1,2,...}$ mit $U_n :=$ $= \bigwedge_{i \geq n} x_i$, ist zunehmend und $\bigvee_{n \geq 1} U_n = r$; dabei die Folge $\{\hat{I}(U_n)\}_{n \in N}$ der

Integralen $\hat{I}(U_n)$ ist nach oben beschränkt:

Es sei $U_{nj} := x_n \wedge x_{n+1} \wedge \ldots \wedge x_{n+j} (\in S(E))$.

Fur n konstant ist $U_{nj} \downarrow U_n$ und die Folge $\{\hat{I}(U_{nj})\}$ nach unten beschränkt, da $g_o \leqslant \hat{I}(U_{nj})$ mit $\hat{I}(y) =: g_o \in G$.

So nach dem dualen des Satzes 1 haben wir $U_n \in S(E)$.

Aus der Definition von U_n ergibt es $U_n \uparrow x$ und $U_n \leqslant x_n$. Unter Heranziehung der Monotonie ($\equiv$Isotonie) von $\hat{I}$, bekommen wir $\hat{I}(U_n) \leqslant g \in G$.

Schliesslich nach dem Satz 1 haben wir $r \in S(E)$ und $\hat{I}(U_n) \uparrow \hat{I}(x)$. Daraus folgt $\hat{I}(r) \leqslant g$, da $\hat{I}(U_n) \leqslant \hat{I}(x_n) \leqslant g \in G$.

Satz 3. (Von der majorierten Konvergenz; Lebesque): Wenn die Folge $\{x_n\}_{n \in N}$, $x_n \in S(E)$ beschränkt ist d.h. existieren zwei Elemente $y, z \in S(E)$ so dass $y \leqslant x_n \leqslant z$ und wenn $O\text{-}\lim x_n = x \in \hat{E}$, dann ist: (i) $x \in S(E)$, (ii) $O\text{-}\lim \hat{I}(x_n) = \hat{I}(x)$.

Beweis: Es ist leicht zu beweisen dass aus, E ist O-topologischer σ-Berband und $O\text{-}\lim x_n = x$, folgt $\bigwedge_{m \geq m_0} \bigvee_{n \geq m} x_n = \bigvee_{m \geq m_0} \bigwedge_{n \geq m} x_n = x$, (Vgl. [2] oder [1]).

Also nach dem Satz 2 haben wir $q = r = x \in S(E)$.

Aus dem Satz 2 haben wir die Existenz zweier Folgen $\{v_n\}$ und $\{u_n\}$: $v_n \leqslant x_n \leqslant u_n, \hat{I}(u_n) \uparrow \hat{I}(x)$ und $\hat{I}(u_n) \downarrow \hat{I}(x)$.

Da die Berbands-gruppe G O-topologisch Vorausgesetzt wird, haben wir aus der Definition der O-Konvergenz dass $O\text{-}\lim_n \hat{I}(x_n) = \hat{I}(x)$.

LITERATUR

[1] **E.M. ALFSEN:** On a general theory of integration based on order. Math. Scand. 6(1958), 67-79.

[2] **G. BIRKHOFF:** Lattice theory. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 25. Third Edition. New York, 1970.

[3] **D.A. KAPPOS - A. MALLIOS:** Der Integrallbegriff in O-topologischen Verbänden. Bull. Soc. Math. Greece, 1(1960), 98-105.

[4] **TH. LEONTIADIS:** Fortsetzung eines verallgemeinerten Daniell-integrals aus einem O-topologischen σ-verband mit Werten in einer Verbandsgruppe. Bull. Soc. Math. Greece, 27(1986), 60-71.

[5] **B. RIEČAN:** On measures and integrals with values in ordered groups. Math. Slovaca 33(1983), 153-163.