Author: Ιωάννης Καλογεράκης

Title: Μερικές Δυσκολίες στη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Abstract: Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται τέσσερις βασικές αιτίες, οι οποίες δημιουργούν δυσκολίες στη μαθητική διδασκαλία και ιδιαίτερα στη λύση των προβλημάτων. Δίδονται διδακτικές οδηγίες για την αντιμετώπιση τους, οι οποίες έχουν δοκιμαστεί στη σχολική πραγματικότητα.

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ γ΄, Τεύχος 58, 2002

Μερικές Δυσκολίες στη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Ιωάννης Γ. Καλογεράκης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται τέσσερις βασικές αιτίες, οι οποίες δημιουργούν δυσκολίες στην μαθηματική διδασκαλία και ιδιαίτερα στη λύση των προβλημάτων. Δίδονται διδακτικές οδηγίες για την αντιμετώπιση τους,οι οποίες έχουν δοκιμαστεί στην σχολική πραγματικότητα.

ABSTRACT

In this paper we present four reasons, which cause basic difficulties in mathematical teaching and particularly in problem solving. We give some didactic guidance to reduce the effect of these difficulties, which have been experienced in school class.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είναι γνωστό ότι οι μαθητές συναντούν δυσκολίες στη λύση των μαθηματικών προβλημάτων. Ακόμη και στην περίπτωση που λύνουν σωστά ένα πρόβλημα, τίθεται το ερώτημα αν συνειδητοποιούν τα μεγέθη που επεξεργάζονται. Ο προβληματισμός αυτός άμεσα παραπέμπει στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Σκοπός της εργασίας είναι να επισημάνουμε ορισμένες δυσκολίες στη διδασκαλία που επηρεάζουν την αδυναμία αυτή των μαθητών. Παράλληλα να προτείνουμε ορισμένους τρόπους αντιμετώπισής τους.

2. ΜΙΑ ΕΡΩΤΗΣΗ ΠΟΛΛΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Προσαρμόσαμε τη γνωστή ερώτηση professor – student[1] και τη δώσαμε στους μαθητές της Β΄ τάξης Γυμνασίων. Η ερώτηση εκφράστηκε ως εξής:

Χρησιμοποιώντας τα γράμματα α και κ να εκφράσετε την ακόλουθη πρόταση: «Σε μια τάξη υπάρχουν τριπλάσια αγόρια από κορίτσια»

Το δείγμα έδειξε μια ποικιλία από απαντήσεις, αρκετές από τις οποίες ήταν λανθασμένες. Ορισμένες από αυτές ήταν:
α = 3κ, κ = 3α, α = κ+3, 3α > κ, 3ακ, το ¼ είναι αγόρια και τα ¾ κορίτσια, κ.λ.π.

Τι δηλώνουν όλα αυτά; Αδυναμία να μεταφράσουν – αποκωδικοποιήσουν - το μήνυμα της πρότασης, αλλά και να αναγνωρίσουν το ρόλο των γραμμάτων ως συμβόλων διαφορετικών εννοιών.

Στη συνέχεια ρωτήσαμε ορισμένους μαθητές που έγραψαν σωστές απαντήσεις, να τις διαβάσουν. Να μερικές ενδεικτικές απαντήσεις: *τα αγόρια είναι τριπλάσια από τα κορίτσια,* ή *τα αγόρια είναι ίσα με τρία κορίτσια,* ή *τα αγόρια είναι τρεις φορές τα κορίτσια, ή το ένα αγόρι είναι τρία κορίτσια,* κ.λ.π. Αν και είναι, κατά βάση, σωστές, δηλώνουν μια αδυναμία εμβάθυνσης στη σχέση που έχουν γράψει, μια δυσκολία έκφρασης και επιβεβαιώνουν την υποψία μας ότι τα γράμματα α και κ δεν έχουν επαρκώς αναγνωριστεί στη σκέψη τους ως αριθμοί. Η ορθή, για τα μαθηματικά, απάντηση είναι: *«ο αριθμός των αγοριών είναι ίσος με τρεις φορές τον αριθμό των κοριτσιών»*

Τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε στις αλγεβρικές εκφράσεις δεν γίνονται αντιληπτά ως αριθμοί αλλά, μάλλον, ως αντικείμενα. Δηλαδή, τη σχέση που έγραψαν δεν τη θεωρούν αριθμητική ισότητα αλλά μια φυσική κατάσταση. Αυτό σημαίνει ότι δεν περικλείουν στη σχέση τους την πράξη του πολλαπλασιασμού.

Επαναλάβαμε την ερώτηση αλλάζοντας, λίγο, την εκφώνηση σε άλλα τμήματα των σχολείων. *Χρησιμοποιώντας τα γράμματα μ και κ να εκφράσετε την ακόλουθη πρόταση: «Σε ένα σχολείο υπάρχουν τριπλάσιοι μαθητές από καθηγητές».*

Το ποσοστό των λανθασμένων απαντήσεων υπήρξε μειωμένο σε σχέση με προηγούμενο ερώτημα. Ο λόγος, υποθέτουμε, είναι ότι οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να ελέγξουν την ορθότητα της απάντησής τους. Ενώ στην πρώτη περίπτωση δεν γνώριζαν αν τα αγόρια ή τα κορίτσια είναι περισσότερα σε ένα τμήμα, στη δεύτερη περίπτωση υπέθεταν – και είναι λογικό –

---

[1] Η ερώτηση αυτή είναι γνωστή από την βιβλιογραφία των Η.Π.Α. Στην περίπτωση μας δόθηκε σε Γυμνάσια της Κρήτης με ποσοστά επιτυχίας από 15 % έως 74 %.

πως οι μαθητές είναι περισσότεροι από τους καθηγητές. Έτσι, κάποιοι, θα έλεγξαν αριθμητικά τη σχέση που έγραψαν.

3. Η ΔΥΣΚΟΛΙΑ ΤΩΝ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

Τα σύμβολα, τα οποία συνήθως, παριστάνονται με γράμματα, είναι τα μέσα με τα οποία γράφουμε τα Μαθηματικά και κατανοούμε τις μαθηματικές έννοιες. Πολλές φορές στη διδασκαλία μας παραβλέπουμε τη δυσκολία που έχουν οι μαθητές να προφέρουν, να γράψουν και να κατανοήσουν τα σύμβολα. Ορισμένα από αυτά, που έχουν μακρά ιστορική πορεία, αντιπροσωπεύουν πολλές και διαφορετικές μεταξύ τους έννοιες. Το γράμμα ψ, για παράδειγμα, αντιπροσωπεύει οκτώ διαφορετικές έννοιες στα σχολικά βιβλία. Άλλα, πάλι, αντιπροσωπεύουν διαφορετικές αποχρώσεις εννοιών. Το σύμβολο της μεταβλητής, για παράδειγμα, άλλοτε έχει την έννοια της θέσης ενός αγνώστου, και άλλες φορές την έννοια ενός συνόλου δυνατών τιμών για ένα φαινόμενο. Άλλα δηλώνουν πράξεις ή επεκτείνουν μαθηματικές ιδέες. Παράδειγμα, τα σύμβολα 2^3, log5 κλπ. Ο συνδυασμός των γραμμάτων με άλλα σύμβολα δημιουργεί δυσκολίες, ιδιαίτερα όταν η ορολογία μας δεν είναι ακριβής. Τη σχέση $2\chi + 3\psi = 11$ την ονομάζουμε εξίσωση. Το σύμβολο = το χρησιμοποιούμε και για την ισότητα της καταχώρησης, $\ln x = 5$ και για τη λογική ισότητα $3 + 4 = 7$. Για την ισότητα των διανυσμάτων και για την ισότητα των ευθυγράμμων τμημάτων.

Πολλές από τις δυσκολίες των μαθητών στην λύση ενός προβλήματος πηγάζουν από την αδυναμία τους να ορίσουν τις συμβολικές παραστάσεις και τις έννοιές τους. Δηλαδή να κατανοήσουν και να μεταφράσουν το περιβάλλον του προβλήματος. Είναι γεγονός ότι το εννοιολογικό άλμα που καλούνται να κάνουν είναι μεγάλο. Δηλαδή να απεικονίσουν πραγματικές καταστάσεις σε αντικείμενα που υπάρχουν μόνο ως νοητές αφαιρέσεις. Η δυσκολία στη διδασκαλία έγκειται στο γεγονός ότι δεν μπορούμε, πέρα από ένα ορισμένο επίπεδο, να περιγράψουμε και να καταδείξουμε τα αντικείμενα αυτά που υπάρχουν μόνο ως γνωστικές οντότητες. Για την ακρίβεια στα μαθηματικά δεν υπάρχουν σημαινόμενα αντικείμενα.(Resnick L. B. 1998)

Στο επίπεδο της διδακτικής πρακτικής μπορούμε να αμβλύνουμε τις δυσκολίες με τις παρακάτω ενέργειες:

- Να διατυπώνουμε με γλωσσική επιμέλεια τα προβλήματα και να χρησιμοποιούμε τα σύμβολα και την ορολογία σχολικών βιβλίων.
- Να μετατρέπουμε τα σύμβολα των βοηθητικών πηγών που χρησιμοποιούμε σε σύμβολα των σχολικών βιβλίων. Ιδιαίτερα στο Γυμνάσιο, στα διανύσματα και στους μιγαδικούς αριθμούς.

- Να δίνουμε στους μαθητές του Γυμνασίου, ως δραστηριότητα, μια φωτοτυπία σε μια στήλη της οποίας θα υπάρχουν ορισμένα σύμβολα και δίπλα θα αναπτύσσουν την ερμηνεία τους.
- Να δίνουμε στους μαθητές έναν πίνακα με διάφορες χρήσεις των γραμμάτων-συμβόλων, όπως αυτόν που ακολουθεί.

ΟΝΟΜΑΣΙΑ	ΧΡΗΣΗ
• Θέση ετικέτας	• 1 m είναι 100 cm, 1 EURO είναι 100 CENT
• Σταθερές	• π, e, φ, το α στη $\chi^2 + \psi^2 = \alpha^2$
• Άγνωστοι	• το χ στη $\chi^2 - 5\chi + 6 = 0$
• Γενικοί αριθμοί	• τα α, β στην $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
• Μεταβλητές	• τα χ, ψ στην $\psi = 3\chi + 2$
• Παράμετροι	• τα λ, β στην $\psi = \lambda\chi + \beta$
• Τυχαία μεταβλητή	• το ψ στην εξίσωση $\psi = \alpha + \beta\chi$ της γραμμικής παλινδρόμησης

- Να δίνουμε φύλλα εργασίας στο Γυμνάσιο, αυξανόμενης δυσκολίας από τάξη σε τάξη, στα οποία οι μαθητές θα αναγράφουν ή θα ερμηνεύουν συμβολικές παραστάσεις μεταξύ μεταβλητών μεγεθών.
- Να προτείνουμε θέματα τα οποία θα αναδεικνύουν το ρόλο των συμβόλων.

Στην Α΄ Λυκείου μπορούμε, για παράδειγμα, να δώσουμε το παρακάτω πρόβλημα το οποίο αναδεικνύει τους διαφορετικούς τρόπους που χρησιμοποιούνται οι μεταβλητές.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Μια τεχνική εταιρεία κατασκευάζει πισίνες σχήματος ορθογωνίου με πλάτος ακέραιο αριθμό μέτρων και μήκος διπλάσιο του πλάτους. Γύρω από την πισίνα κατασκευάζεται διάδρομος με μια σειρά από τετραγωνικές πλάκες, πλευράς 1m. α) Ορίζοντας κατάλληλες μεταβλητές, να βρείτε τον τύπο μιας συνάρτησης που θα δίνει τον αριθμό των πλακών που χρειάζονται κάθε φορά. β) Αν το πλάτος της πισίνας είναι 10m, να βρεθεί πόσες πλάκες χρειάζονται. γ) Σε μια κατασκευή χρησιμοποιήθηκαν 76 πλάκες να βρείτε τις διαστάσεις της πισίνας;

Στο παραπάνω πρόβλημα οι μαθητές πρέπει να ορίσουν τις έννοιες και τα σύμβολα των μεταβλητών προκειμένου να διατυπώσουν τις ιδέες τους. Οι μεταβλητές αντιπροσωπεύουν το σύνολο των δυνατών τιμών των διαστάσεων της πισίνας και τον άγνωστο αριθμό των πλακών που χρειάζονται για ένα συγκεκριμένο μέγεθος πισίνας.

4. Η ΔΥΣΚΟΛΙΑ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Μια άλλη δυσκολία προέρχεται από το γεγονός ότι στα Μαθηματικά του σχολείου η διδασκαλία δεν εστιάζεται στην κατανόηση αλλά στην απόκτηση δεξιοτήτων. Αναφερόμαστε στη κατάσταση που επικρατεί στην τάξη, όχι σ' αυτήν που θα έπρεπε να έχουμε διαμορφώσει.

Ως δεξιότητα εννοείται η κατάκτηση της ικανότητας να απαντάει ο μαθητής σωστά σε ένα ειδικό τύπο άσκησης ή προβλήματος. Αυτό που συνάγεται από την εκφώνηση, είναι μια σειρά από χειρισμούς και υπολογισμούς αλγεβρικών παραστάσεων που υποστηρίζονται από θεωρήματα (Porter K. M 2000). Αρκετές φορές, στηριζόμενοι στο γεγονός ότι τα αλγεβρικά συστήματα μπορούν *να λειτουργούν από μόνα τους*, παρουσιάζουμε την όλη διαδικασία με μορφή μεθοδολογίας. Όμως, όταν κάποιος είναι ικανός να κάνει κάτι, δεν είναι βέβαιο ότι καταλαβαίνει και τι κάνει. Κάθε απόκλιση από το πλαίσιο των δεξιοτήτων, εκδηλώνεται με αδυναμία λύσης της άσκησης ή του προβλήματος.

Επιπλέον υπάρχουν διάφορα επίπεδα κατανόησης μιας έννοιας και δεν υπάρχει συμφωνία μεταξύ των παιδαγωγών τι ακριβώς εννοούμε με τον όρο *κατανόηση*. Μπορεί, για παράδειγμα, κανείς να αμφισβητήσει ότι η «*μεταφορική κατανόηση* » δηλαδή, η ικανότητα εύρεσης ενός τύπου, είναι πραγματική κατανόηση μιας έννοιας.

Για την περίπτωσή μας, θα θεωρήσουμε την κατανόηση ως την ικανότητα εμβάθυνσης σε μια μαθηματική έννοια (Hiebert J. 1992) Την κατάκτησή της ως *σύλληψης* (conceptually) και ως *ενέργειας* (procedurally) και ως έναν από τους βασικούς παράγοντες της μόρφωσης. Θυμούμαι κάτι, το κατανοώ και μπορώ να το εφαρμόζω.

Με την παραδοχή αυτήν, κατανόηση των συναρτήσεων σημαίνει όχι μόνο τη γνώση των θεωρημάτων αλλά και την απόκτηση της ικανότητας να σκεπτόμαστε τις έννοιες με διάφορους τρόπους και να δημιουργούμε συνδέσεις μεταξύ τους. Είναι γενικά παραδεκτό ότι η διδασκαλία με σκοπό την κατανόηση, όπως και αν την ορίσουμε, είναι δυσκολότερη – ως διδακτικός στόχος – από την διδασκαλία δεξιοτήτων. Υπάρχει, επίσης, μεγάλη δυσκολία να βρούμε έναν πρακτικό τρόπο να αξιολογούμε – μέσα στα σχολικά πλαίσια – το βαθμό κατανόησης μιας έννοιας. Η κατανόηση δεν είναι μετρήσιμη. Έτσι, στην τάξη, η μεγαλύτερη δραστηριότητα κατευθύνεται στην απόκτηση δεξιοτήτων μέσα από ένα μεγάλο αριθμό όμοιων ασκήσεων. Δηλαδή, γυμνασμάτων. Για τις δεξιότητες κανείς δεν λεει πως είναι ασήμαντες, αλλά είναι σίγουρα ελλιπείς καθώς δεν είναι παρά ένα, μόνο, μέρος της μαθηματικής παιδείας.

Στα σχολικά πλαίσια, οι παρακάτω διδακτικές ενέργειες θα μπορούσαν να βοηθήσουν προς την κατεύθυνση της κατανόησης.

- Να δημιουργούμε ευκαιρίες να λύνουν, ατομικά ή ομαδικά, προσεκτικά επιλεγμένες ασκήσεις και προβλήματα που προάγουν τους μαθητές εκείνους που διαθέτουν ευφυία και αντίληψη στις μεγάλες μαθηματικές έννοιες.
- Να παρουσιάζουμε μια έννοια με πολλούς τρόπους, μεταξύ των οποίων περιλαμβάνονται και σύγχρονα εποπτικά μέσα, όπως οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές και τα πολυμέσα.
- Να επιδιώκεται η εφαρμογή των εννοιών σε διάφορες καταστάσεις και ποικίλα προβλήματα για να δημιουργούνται αλληλεπιδράσεις.
- Να ενθαρρύνουμε τους μαθητές να γράφουν γιατί το γράψιμο είναι ένας αποτελεσματικός τρόπος να αναπτύξουν την κριτική ικανότητα κατανόησης των εννοιών που διδάσκουμε.
- Να παρουσιάζουμε τις μαθηματικές σχέσεις με ευθύ και με αντίστροφο τρόπο και όπου είναι δυνατόν να αναπτύσσουμε την γεωμετρική τους ερμηνεία.
- Να δημιουργούμε στην τάξη ατμόσφαιρα υποστηρικτική των ερωτήσεων και να συζητούμε τις μαθηματικές έννοιες γιατί η κατανόηση έχει μια κοινωνική διάσταση (Φουρναράκης Φ . 2001).

5. Η ΔΥΣΚΟΛΙΑ ΤΗΣ ΣΥΜΒΑΤΟΤΗΤΑΣ

Μια άλλη δυσκολία στη διδασκαλία των Μαθηματικών σχετίζεται με τη διάκριση που υπάρχει ανάμεσα στα Μαθηματικά και τις εφαρμογές τους στην κοινωνία και στα σχολικά Μαθηματικά. Η συζήτηση για το θέμα αυτό απαιτεί χρόνο και η στιγμή δεν είναι κατάλληλη. Θα προσπαθήσουμε όμως να σκιαγραφήσουμε τις συνέπειές της στη διδασκαλία.

Σε κάθε εργαστήριο χημείας οι μαθητές μελετούν πειραματικά τις χημικές ιδιότητες των ενώσεων χωρίς σημαντικές διαφορές από την εργασία που κάνει ένας χημικός σε κάποιο εργοστάσιο. Όταν ένας φιλόλογος αναλύει ένα λογοτεχνικό κείμενο, δεν διαφέρει σημαντικά από τον κριτικό μιας εφημερίδας ή από τον ίδιο το λογοτέχνη που δημιούργησε το συγκεκριμένο κείμενο. Τι συμβαίνει, όμως, με τη διδασκαλία των Μαθηματικών; Εμείς, στην πράξη, δεν μεταφέρουμε μια ομοιότητα με τη δραστηριότητα των μαθηματικών στην κοινωνία. Η κατάσταση αυτή, που είναι σχετικά πρόσφατη, μαζί με την αδυναμία μας να παρουσιάσουμε πειστικές εφαρμογές των εννοιών, δημιουργεί στους μαθητές αμφιβολίες για την αναγκαιότητα των μαθηματικών (Romberg T. 2000). Άρα, μείωση των προσωπικών τους ενδιαφερόντων για τα Μαθηματικά.

Πώς θα πείσουμε για τη χρησιμότητα των Μιγαδικών Αριθμών; Η ανάγκη της ενοποίησης του Αλγεβρικού Λογισμού δεν είναι πειστικό επιχείρημα για τους μαθητές. Τη Γεωμετρία μόνο παρεπιπτόντως την συνδέουμε με τον φυσικό κόσμο. Πόσο συχνά χρησιμοποιούμε την μαθηματική γλώσσα; Μόνο οριακά. Ακόμη, η δικαιολογία που συχνά αναφέρουμε, ότι τα Μαθηματικά τα χρησιμοποιούμε να λύνουμε προβλήματα, είναι σωστή. Αλλά τι είδους προβλήματα. Υποθέτουμε του πραγματικού κόσμου αλλά και αυτά που είναι στα βιβλία στο τέλος κάθε ενότητας. Όταν πρόκειται για την πρώτη περίπτωση, θα πρέπει να αποκτήσουμε ένα απόθεμα σοβαρών παραδειγμάτων ικανών να στηρίξουν την θεωρία που διδάσκουμε. Για την δεύτερη περίπτωση θα πρέπει τα προβλήματα που λύνουμε να είναι ελκυστικά, ρεαλιστικά και συμβατά με την πραγματικότητα (Δ. Καραγιώργος, 2000). Αρκετές ασκήσεις σχολικών βιβλίων είναι τύπου puzzle και δεν συναντώνται έξω από την τάξη. Η διαπίστωση αυτή δεν πρέπει να παρουσιάζεται και στα προβλήματα.

Ο λόγος της ύπαρξης των προβλημάτων δεν θα πρέπει να είναι η εξάσκηση στη θεωρία - αυτή γίνεται με τις ασκήσεις - αλλά μέσα από το πρόβλημα, να αναδεικνύουμε την αναγκαιότητα της δημιουργίας της θεωρίας που διδάξαμε. Αυτό είναι που προκαλεί αίσθηση στους μαθητές και παράλληλα αναδεικνύει την αναγκαιότητα των Μαθηματικών στη κοινωνία. Οι εφημερίδες τα περιοδικά, η τηλεόραση το internet, αποτελούν πηγές υλικού με το οποίο μπορούμε να δομήσουμε τέτοια επίκαιρα προβλήματα. (Τουμάσης Μπ., 1999)

Ένα παράδειγμα για την Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου που προσεγγίζει τις παραπάνω θέσεις .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στο δίκτυο ύδρευσης το νερό είναι κατάλληλο για χρήση όταν η συγκέντρωση των βακτηρίων είναι μικρότερη από 720 βακτήρια ανά cm^3 . Ένας βιολόγος για την μείωση τους χρησιμοποιεί ένα φάρμακο και εκτιμά με τη συνάρτηση $f(t) = 40t^2 - 320t + 1000$, τον αριθμό των βακτηρίων ανά cm^3, όπου t είναι ο χρόνος σε ημέρες μετά την επέμβαση. Να βρείτε: α) Μετά πόσες μέρες το νερό θα είναι κατάλληλο για χρήση. β) Μετά πόσες μέρες η συγκέντρωση θα είναι ελάχιστη. γ) Αν δεν γίνει άλλη επέμβαση, πόσες μέρες το νερό θα παραμείνει κατάλληλο για χρήση.

Το πρόβλημα έχει στοιχεία ρεαλισμού και σύγχρονης τεχνολογίας, αναδεικνύει την αναγκαιότητα του πρόσημου τριωνύμου, της μονοτονίας, του ακρότατου και της συμμετρίας της παραβολής ως προς μια ευθεία.

6. Η ΔΥΣΚΟΛΙΑ ΤΗΣ ΓΛΩΣΣΑΣ

Η ιδέα ότι τα Μαθηματικά είναι μια γλώσσα,δεν είναι νέα, αν και στο θέμα αυτό δεν ταυτίζονται οι απόψεις τις μαθηματικής κοινότητας. Για τον σκοπό μας είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι τα Μαθηματικά είναι μια γλώσσα με την μεταφορική έννοια του όρου. Με την παραδοχή αυτή παράλληλα με τις έννοιες πρέπει να διδάξουμε και μια γλώσσα. Ο πρώτος προβληματισμός απορρέει από τον τρόπο προσέγγισης της. Αν θα πρέπει να γίνει αναλυτικά με την αυστηρή διατύπωση των ορισμών, της ορολογίας, της μαθηματικής σύνταξης, ή αν θα πρέπει να γίνει λειτουργικά με τη σταδιακή εξοικείωση των μαθητών στη μαθηματική γλώσσα με διάφορους τρόπους, εννοιολογικά, οπτικά, ακουστικά, γραπτά, προφορικά. Οι περισσότεροι ερευνητές προτείνουν μια μεικτή προσέγγιση (Krussel L. 1998). Αν επιμείνουμε μόνο σε μια αναλυτική, αυστηρή γλώσσα, οι μαθητές καταγράφουν τα σύμβολα που χρησιμοποιούν αλλά όχι τις λέξεις που δίνουν νόημα σε αυτά. Το αποτέλεσμα είναι η δημιουργία ασθενών συνδέσεων μεταξύ των εννοιών και η απώλεια του νοήματος. Παρουσιάζονται, δηλαδή, τα μαθηματικά ως μια παράθεση ασύνδετων γεγονότων. Ως μεμονωμένες νησίδες γνώσης. (Cramer K. 1995)

Αν παρουσιάσουμε τη Γεωμετρία με τον τρόπο αυτό, αφήνουμε στους μαθητές μικρά περιθώρια για δημιουργία και ατομική σκέψη. Αν, για παράδειγμα, διδάξουμε την ομοιότητα των πολυγώνων, μόνον ως μια τυπική, αφηρημένη διαδικασία αναλογιών, την έχουμε, πλέον, αποσυνδέσει από τις προηγούμενες γνώσεις, και το αποτέλεσμα είναι οι μαθητές να μην αντιλαμβάνονται την ομοιότητα ως σύγκριση μεγεθών. Έτσι, δυσκολεύονται στις ασκήσεις να αναγνωρίσουν τα σχήματα και να εφαρμόσουν τα κατάλληλα θεωρήματα. Παράδειγμα .

Δίδεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές τις ΑΓ και ΒΓ κατασκευάζουμε στο εξωτερικό του τετράγωνα ΑΓΔΕ και ΒΓΖΗ.[2] Να αποδείξετε ότι (ΑΒΓ) = (ΓΔΖ)

Την άσκηση αυτή, οι μαθητές που έχουν αποσπασματικές γνώσεις, τη θεωρούν ως τυπική άσκηση των εμβαδών. Έχουν δυσκολία να αναγνωρίσουν στο σχήμα τις παραπληρωματικές γωνίες που θα τους οδηγήσουν να εφαρμόσουν το σχετικό θεώρημα της ομοιότητας.

[2] Το τρίγωνο ΓΔΖ ονομάζεται σημαιοτρίγωνο του ΑΒΓ και έχει σημαντικές ιδιότητες.

Παράλληλα δεν πρέπει να υποτιμούμε το γεγονός ότι η απόδοση στα Μαθηματικά εξαρτάται και από την εξειδικευμένη τυπική γλώσσα η οποία δίνει μια ασυνήθιστη δύναμη στη Λογική. Τι πρέπει να κάνουμε:

- Ο λόγος μας, τόσο ο προφορικός όσο και ο γραπτός, να είναι προσεκτικά δουλεμένος, η άρθρωση μας καθαρή, η παράδοση των σύνθετων μαθηματικών εννοιών, να γίνεται χωρίς την πίεση του χρόνου (Zazkis R. 2000).
- Να παρουσιάζουμε μια έννοια λαμβάνοντας υπόψη την ιστορική της εξέλιξη και την χρήση της, κατόπιν, μέσα από ένα πλούσιο λεξιλόγιο με διάλογο, να δημιουργούμε ιδέες. Δηλαδή, να παρουσιάσουμε την ομοιότητα, ακόμη και με τη βοήθεια ενός λεξικού και να τη συνδέσουμε με τις έννοιες της ταυτότητας, της ομοιομορφίας, της ισότητας και του εμβαδού.
- Να αφήνουμε χρόνο, κατά την παράδοση, στους μαθητές να σκέφτονται και με κατάλληλες ασκήσεις να δημιουργούν γέφυρες ανάμεσα στις νέες και τις παλιότερες γνώσεις.
- Να ετυμολογούμε και να αναφέρουμε την ιστορική προέλευση των μαθηματικών όρων. Οι μαθητές δεν γνωρίζουν ότι οι μαθηματικές λέξεις έχουν ιστορία και βαθιές ρίζες: Αριθμητής, ασύμπτωτος, παραβολή, συνημίτονο κλπ. Τις λέξεις αυτές μπορούμε να τις αναλύσουμε ετυμολογικά και να τις συνδέσουμε με τις έννοιές τους. Παράδειγμα. Το συνημίτονο προέρχεται από το ημίτονο. Είναι σύνθεση των λέξεων συμπληρωματικό και ημίτονο και δημιουργήθηκε από την γνωστή ισότητα που συνδέει δύο συμπληρωματικές γωνίες.

Με τη μαθηματική γλώσσα συνδέεται και η δυσκολία που έχουν οι μαθητές να κατανοήσουν ένα μαθηματικό κείμενο ή ένα πρόβλημα. Τα μαθηματικά έχουν μια ειδική λογική και σύνταξη. Για την κατανόηση τους είναι απαραίτητη η δημιουργική φαντασία σε συνδυασμό με την προσεκτική, συστηματική μελέτη της θεωρίας μέσα από το σχολικό βιβλίο. Το προσωπικό διάβασμα θα βοηθήσει τους μαθητές να αποκτήσουν μια οικειότητα με την ορολογία και τη μαθηματική σύνταξη. Να διακρίνουν ότι, ως έννοιες, δεν ταυτίζονται, *η πρόσθεση, το συν, το και, το άθροισμα, το πρόσημο των θετικών αριθμών*.

Είναι χρήσιμο στο Γυμνάσιο να αφιερώνουμε περιοδικά χρόνο για την ανάγνωση μιας ενότητας που έχουμε ήδη παρουσιάσει. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής:

- Να διαβάζει ένας μαθητής το κείμενο και σε επιλεγμένα σημεία να σταματά και να γίνεται συζήτηση με ερωτήσεις και σχόλια μεταξύ των μαθητών.
- Να εργάζονται οι μαθητές σε ομάδες με ανοιχτά βιβλία στη διαπραγμάτευση μιας δραστηριότητας και να παρεμβαίνουμε στη γλωσσική διατύπωση των απόψεών τους.

Σε κάθε περίπτωση το κύριο μέλημά μας είναι να βοηθήσουμε τους μαθητές να αντιλαμβάνονται τι απαιτείται να συμπληρώσουν σε ένα μαθηματικό κείμενο για να το κατανοήσουν πλήρως. Μόνο όταν το διάβασμα συνοδεύεται από εμβάθυνση στο κείμενο, καταγράφονται οι έννοιες και παραμένουν ως γνώσεις στους μαθητές.

Οι μαθητές συχνά δεν θέλουν να γράφουν . Ένας λόγος είναι ότι το μαθηματικό κείμενο είναι πάντα μια νέα εμπειρία. Είναι δύσκολο να εκφράσουν σε γραπτό λόγο ιδέες και έννοιες τις οποίες λίγο πριν έχουμε διδάξει και δεν έχουν γίνει πλήρως κατανοητές. Όμως το γράψιμο είναι μια κατ' εξοχή δημιουργική δραστηριότητα, γιατί μαθαίνουμε να σκεπτόμαστε καλύτερα. Θα έχουμε παρατηρήσει ότι σημεία σύγχυσης γίνονται συχνά αιτίες μιας γραπτής δημιουργίας. Αυτό είναι μέρος μιας γενικότερης φιλοσοφίας της διδασκαλίας. *Αν δεν μπορείς να σταθεροποιήσεις μια έννοια τότε παρουσίασε την με εντυπωσιακό τρόπο* (Thompson R. D. 2000). Ακόμη οι περισσότερες αξιολογήσεις γίνονται σε γραπτές αποδείξεις ασκήσεων.

Δεν είναι μόνο σημαντικό να γράφουν οι μαθητές, είναι σημαντικότερο το τι γράφουν. Για τον λόγο αυτό πρέπει να σχολιάζουμε στα τετράδια τις λύσεις των ασκήσεων. Σπάνια μια λύση είναι μια ολοκληρωμένη διαδικασία. Μια οριστική γραφή. Σταδιακά θα αναπτύξουν τις λογικές ικανότητες να εξηγούν στη μαθηματική γλώσσα αυτά που σκέπτονται.

Ορισμένες πρακτικές συμβουλές στις οποίες μπορούμε να επιμείνουμε είναι.

- Οι προτάσεις που γράφουμε στις αποδείξεις να μην είναι ελλειπτικές
- Σε κάθε σχέση να δικαιολογούμε με απλές και σαφείς προτάσεις πως φθάσαμε σε αυτή.
- Να μην αρχίζουμε τις προτάσεις με σύμβολα, αλλά με λέξεις.
- Να χρησιμοποιούμε πληθυντικό αριθμό, αντί του ενικού. π.χ. *Έχουμε ότι . . . θα αποδείξουμε ότι . . .*
- Να χρησιμοποιούμε φιλικές εκφράσεις και προτάσεις των σχολικών βι-

βλίων. Για παράδειγμα: *Από την υπόθεση έχουμε . . .Από την σχέση αυτή παίρνουμε . . .*

- Να αποφεύγουμε στο Λύκειο τις λέξεις *βλέπουμε, παρατηρούμε, έτσι.*
- Να μην αναμειγνύουμε, στις προτάσεις που γράφουμε, τις λέξεις με τα μαθηματικά σύμβολα.

Ως διδακτικές ενέργειες μπορούμε:

- Να δίνουμε σε φωτοτυπία στην Α Λυκείου μια κατάλληλη δική μας απόδειξη.
- Να δίνουμε σε φωτοτυπία ένα επιλεγμένο διαγώνισμα ενός μαθητή προηγούμενου έτους.
- Να συντάσσουν οι μαθητές ένα δικό τους πρόβλημα το οποίο στη συνέχεια να λύνουν. Για παράδειγμα να δομήσουν ένα πρόβλημα με τις εξισώσεις. $\chi + \psi = 42$ και $20\chi + 31\psi = 975$.
- Ως δραστηριότητα να περιγράψουν μια περίπτωση στην οποία χρησιμοποίησαν ή μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν Μαθηματικά. Να θέσουν μια ερώτηση και να απαντήσουν με διαφορετικούς τρόπους.

Γενικά το γράψιμο δεν είναι μόνο ένας τρόπος να εκφράζουμε αυτά που γνωρίζουμε, είναι κυρίως μια θεμελιώδης μέθοδος για την μάθηση των Μαθηματικών και την διανοητική ανάπτυξη των μαθητών.

7. ΣΥΝΟΨΗ

Ο τρόπος μάθηση των Μαθηματικών είναι διαφορετικός από τον τρόπο μάθησης των άλλων αντικειμένων. Ο σκοπός μας στην εργασία αυτή ήταν να επισημάνουμε ορισμένες δυσκολίες που συναντούμε στη διδασκαλία με αιτία την διαφορετικότητα αυτή. Να προτείνουμε ορισμένους τρόπους αντιμετώπισης τους και, κυρίως, να ενθαρρύνουμε μια συζήτηση πάνω στις δυσκολίες αυτές. Με στόχο πάντα να μην τυποποιούμε την διδασκαλία μας αλλά συνεχώς να την βελτιώνουμε.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Καραγιώργος Δ. Το πρόβλημα και η επίλυση του. Εκδ.Σαββάλας, 2000

Resnick L. B. . Cauzinille – Marmeche E. and Mathieu J.(1998). Κατανόηση της Άλγεβρας. Η Ψυχολογία των Μαθηματικών, επιμέλεια Στέλλα Βασνιάδου. Gutenberg – Αθήνα .

Τσυμάσης Μπ. (1999). Πώς να ενεργοποιήσουμε τα παιδιά στο μάθημα των Μαθηματικών . Εκδ. Κωστόγιαννος, Χαλκίδα .

Φουρναράκης Φ. Σούρλας Κ. Κοντογιάννης Γ. (2001). Ιντεραξιονισμός. Μαθηματική Επιθεώρηση, τ. 55 .

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Cramer K and Kamowski L .(1995 February). The Importance of Informal Language in Representing Mathematical Ideas . Teaching Children Mathematics.

Hiebart James and Carpender Thomas (1992). Leaning and Teaching with Understanding. In Hadbook of Research of Mathematics Teaching and Learning. Macmillan Publishing Co.

Krussel Libbby (1998). Teaching the Language of Mathematics. The Mathematics Teacher. V. 91, No 5.

Porter M. – Masingila I. (2000). Effects of Writing on Conceptual and Procedural Knowledge, Educational Studies in Mathematics. 42, Kluwer Academic Publishers .

Romberg A. T. (2000). Changing The Teaching and Learning of Mathematics. The Australian Mathematics Teacher 56, 4.

Thompson R. D. Rubenstein N. R. (2000). Learning Mathematical Vocabulary . Mathematics Teacher,. Vol. 93, No 7.

Zazkis Rina (2000, November). Using Code – Switching as a Tool for Learning Mathematical Language. For the Learning of Mathematics 20 . 3 . FLM Publishers Association Canada.

Το συνάδελφο Φραγκάκο Γεώργιο ευχαριστώ θερμά για τις χρήσιμες φιλολογικές παρατηρήσεις.

ΙΩΑΝΝΗΣ Γ ΚΑΛΟΓΕΡΑΚΗΣ, ΣΣ ΚΡΗΤΗΣ, γραφειο 08210 20214, φαξ 08210 20216