Authors: Γ. Δημάκος, Α. Δούναβης

Title: Η ανακάλυψη και ο ρόλος του φαινομένου της Ασσυμετρότητας. Στόχος και σκοπός του βιβλίου Χ των στοιχείων.

Abstract: Εξετάζεται η γεωμετρική υφή του βιβλίου Χ των στοιχείων και οι διάφορες αλγεβρικές ερμηνείες των μελετητών. Γίνεται αναφορά στην επέκταση της ταξινόμησης των αρρήτων του Θεαίτητου από τον Ευκλείδη, καθώς και στον επηρρεασμό του από την Πλατωνική θεωρία και διαλεκτική και τέλος εξετάζεται μια υπόθεση εργασίας για τη διαίρεση των αρρήτωναπό τον Θεαίτητο.

Creator: HDML

Μαθηματική Επιθεώρηση, Τεύχος 58, 2002

Η ανακάλυψη και ο Ρόλος του Φαινομένου της Ασυμμετρότητας. Στόχος και Σκοπός του Βιβλίου Χ των Στοιχείων

Δούναβης Αντώνης
Μαθηματικός

Δημάκος Γεώργιος
Επίκουρος καθηγητής Παν/μιου Αθηνών

Περίληψη

Εξετάζεται η γεωμετρική υφή του βιβλίου Χ των *Στοιχείων* και οι διάφορες αλγεβρικές ερμηνείες των μελετητών. Γίνεται αναφορά στην επέκταση της ταξινόμησης των αρρήτων του Θεαίτητου από τον Ευκλείδη, καθώς και στον επηρεασμό του από την Πλατωνική θεωρία και διαλεκτική και τέλος εξετάζεται μια υπόθεση εργασίας για τη διαίρεση των αρρήτων από τον Θεαίτητο.

Abstract

A study of geometric texture of book X is performed versus various algebraic interpretations by scholars. Therefore, a reference on the extension of classification of Theaetetus irrational lines is performed by Euclid, as well as its influence by Plato's theory and dialectic. Finally a supposition of elaboration on the classification of irrational lines by Theaetetus is studied.

Εισαγωγή

Η Ευκλείδεια θεωρία των ασύμμετρων μεγεθών όπως παρουσιάζεται στο βιβλίο Χ *των Στοιχείων* είναι μία συνθετική εργασία.

Υπάρχουν ακόμα ερωτήσεις για αυτή την εργασία, που προκύπτουν και από την ορολογία που χρησιμοποιείται και από τον σχολιασμό του νεοπλατωνικού Πρόκλου όσον αφορά την ιστορική της διαδρομή. Σίγουρο όμως είναι ότι η θεωρία αυτή δεν ήταν αποκομμένη από την Ελληνική γεωμετρία. Αντίθετα μάλιστα η γεωμετρία ήταν το βασικό σκαλοπάτι ανάπτυξης και θεμελίωσης αυτής της θεωρίας. Το βιβλίο Χ αφιερώνεται στη θεωρία των ασύμμετρων μεγεθών και χρησιμοποιείται και στα επόμενα βιβλία των *Στοιχείων*, όπως π.χ. στο βιβλίο XIII για την κατασκευή και ταξινόμηση των κανονικών πολυέδρων.

Οι περισσότεροι σχολιαστές του βιβλίου Χ των *Στοιχείων* περιγράφουν τι μελετά ο Ευκλείδης και οι προκάτοχοί του στο βιβλίο αυτό. Αναφέρουν το στόχο, που ο καθένας νομίζει, αυτού του βιβλίου και προσπαθούν να το ερμηνεύσουν και να ιδούν την χρησιμότητά του αλγεβρικά. Μετά το 1930 αρκετά λίγοι σχολιαστές βλέπουν το βιβλίο Χ των *Στοιχείων* με τα μάτια του Ευκλείδη και προσπαθούν να διατηρήσουν τη γεωμετρική του υφή.

Η σημαντική βαρύτητα αυτού του βιβλίου προκάλεσε το ενδιαφέρον πολλών μελετητών, μερικοί από τους οποίους είναι οι Stevin, Chasles, De Morgan, αλλά και νεότερων όπως Heiberg, Zeuthen, Szambo, van der Waerden, Heath, Dijksterhuis, Thaer, Σταμάτης, Frajese και πολύ πρόσφατων όπως Mueller, Knorr, Taisbak, Fowler και άλλων.

Πολλοί από αυτούς αφιέρωσαν πολλούς τόμους για την ερμηνεία αυτού του βιβλίου, ενώ δημοσίευσαν και άρθρα σε πολλά περιοδικά για τον ίδιο σκοπό και στόχο.

Με εξαίρεση όμως περισσότερο τον Taisbak και λιγότερο τους Mueller, Knorr και Fowler κανείς δεν προσπάθησε να οδηγήσει τον αναγνώστη σε μια αναλυτική μελέτη από γεωμετρική σκοπιά όλων των προτάσεων του βιβλίου, όπως έπραξε ο Ευκλείδης.

Η παραδοσιακή άποψη, ήδη γνωστή από τον S. Stevin στην Αναγέννηση (1585) και πιο πρόσφατα από τον Zeuthen και Heath στον αιώνα μας, προσπάθησε να ερμηνεύσει το πνεύμα του βιβλίου Χ των *Στοιχείων* με αλγεβρικούς όρους.

Ωστόσο, τελευταία έχουν γίνει προσπάθειες να ερμηνευθεί αυτό το βιβλίο μέσα από τη γεωμετρική σκοπιά που έδωσε ο Ευκλείδης στην ταξινόμηση των αρρήτων.

Στα σχόλιά τόυ ο Heath (1926) περιπλέκεται αλγεβρικά, ο Dijksterhuis (1929-30) προσπαθεί να αποφεύγει τις αλγεβρικές σχέσεις θεωρώντας αυτές ως ακατάλληλες για να συλλάβει τη γεωμετρική γραμμή σκέψης του Ευκλείδη, ο Frajese (1970) και ο Thaer (1933-37) περιλαμβάνουν αριθμητικές και αλγεβρικές μεταφορές από άλλους σχολιαστές στην προσπάθεια ερμηνείας του βιβλίου Χ .

Ο Mueller (1981) δέχεται την άποψη του Dijksterhuis ως κάποιου είδους μοντέλο για την έρευνά του στο βιβλίο Χ και εστιάζει τις προσπάθειές του στην κατασκευή του ελάσσονος άρρητου.

Ταξινόμηση των αρρήτων

Θεωρούμε απαραίτητο εδώ να ξεκαθαρίσουμε κάποιες έννοιες που κατέχουν θεμελιώδη θέση στην Ευκλείδεια θεωρία του βιβλίου Χ.

Κύριες έννοιες μεταξύ αυτών είναι οι ορισμοί των σύμμετρων και ασύμμετρων μεγεθών.

Δύο μεγέθη είναι σύμμετρα αν και μόνο αν έχουν κοινό μέτρο, που σημαίνει ότι, για τα σύμμετρα μεγέθη α, β υπάρχει ένα μέγεθος γ και θετικοί ακέραιοι μ, ν ώστε:

$$\alpha = \mu\gamma \qquad \text{και} \qquad \beta = \nu\gamma$$

Ισοδυνάμως, ο λόγος $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λόγος ακεραίων $\frac{\mu}{\nu}$.

Θεωρούμε οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα ε ως ρητή μονάδα. Τότε κάθε άλλο ευθύγραμμο τμήμα ε΄ είναι ρητό (ρητού μήκους) αν και μόνο αν τα τετράγωνα των ε΄ και ε είναι σύμμετρα μεταξύ τους.

Ένα εμβαδόν θα λέγεται ρητό όταν είναι σύμμετρο με το τετράγωνο της ρητής μονάδας ε.

Θα μπορούσε κάποιος να παρατηρήσει ότι η έννοια της συμμετρότητας του Ευκλείδη είναι το γεωμετρικό ανάλογο της σύγχρονης έννοιας του θετικού ρητού αριθμού. Έτσι, η τάξη των ρητών εμβαδών φαίνεται να συμπίπτει με τους δικούς μας θετικούς ρητούς αριθμούς. Αλλά ο όρος ρητός όταν εμφανίζεται στα *Στοιχεία* για να προσδιορίσει το μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων, περιλαμβάνει όχι μόνο ρητούς, αλλά και άρρητους αριθμούς επίσης.

Στα *Στοιχεία* συχνά αναφέρεται η έκφραση ρητού μήκους ευθύγραμμα τμήματα ασύμμετρα μεταξύ τους, δηλαδή σύμμετρα μόνο ως προς το τετράγωνο. [βλ. Ευκλείδη "Στοιχεία" Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ. Τόμος ΙΙ, σελ. 184-5].

Η έννοια των ρητών και αρρήτων στα *Στοιχεία* απέχει ελάχιστα από τη σύγχρονη. Σύμφωνα με τον τρίτο ορισμό, αν ε είναι ρητός αριθμός, τότε για κάθε ανάγωγο κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ που δεν τετράγωνο άλλου ανάγωγου κλάσματος, έχουμε ότι οι αριθμοί $\frac{\mu}{\nu}\varepsilon$ και $\sqrt{\frac{\mu}{\nu}}\varepsilon$ είναι επίσης ρητοί.

Επομένως, ευθύγραμμα τμήματα ρητού μήκους μπορεί να είναι μεταξύ τους σύμμετρα ως προς το μήκος (π.χ. $\sqrt{2}\,\varepsilon$ και $\sqrt{18}\,\varepsilon$, αφού $\frac{\sqrt{18}\varepsilon}{\sqrt{2}\varepsilon} = \frac{3}{1}$) ή ασύμμετρα ως προς το μήκος αλλά σύμμετρα ως προς το τετράγωνο (π.χ. $\sqrt{2}\,\varepsilon$ και $\sqrt{5}\,\varepsilon$, αφού $\frac{(\sqrt{2}\varepsilon)^2}{(\sqrt{5}\varepsilon)^2} = \frac{2}{5}$).

Οι Van der Waerden (1954), Knorr (1975), (1983α) και (1985), Taisbak (1982) και Fowler (1999) δίνουν έμφαση στη γεωμετρική ερμηνεία όσων προαναφέρθηκαν και στις λεπτές μαθηματικές έννοιες που τους αποδίδονται στα *Στοιχεία*, έτσι ώστε να μη δημιουργούνται παρερμηνείες σε σύγκριση με τις σύγχρονες έννοιες.

Όπως γράφει ανώνυμος σχολιαστής των *Στοιχείων* (Heiberg, V σελ. 414).

> *"Ο σκοπός του ι΄ βιβλίου τω Ευκλείδη διδάξαι περί συμμέτρων και ασυμμέτρων και περί ρητών και αλόγων· περί ρητών και αλόγων ου πασων αλλά των απλουστάτων ειδων, ων συντιθεμένων γίνονται απειροι αλογοι, ων τινας και ο Απολλώνιος αναγράφει".*

Από ένα σχόλιο προερχόμενο από πραγματεία του Πάππου (300 μ.Χ.) που διεσώθη σε αραβική διάλεκτο πληροφορούμαστε για τη συμβολή του Θεαίτητου στη δημιουργία του Χ βιβλίου.

Το σχόλιο αυτό βρέθηκε και δημοσιεύθηκε από τον Woepcke κατά το 1855.Ο Woepcke γεννήθηκε το 1826 στο Dessau της Γερμανίας και σπούδασε στο Βερολίνο. Αυτός πήρε τις πληροφορίες από τον καθηγητή της ιστορίας των Μαθηματικών στο πανεπιστήμιο του Μονάχου, Kurt Vogel. Κατά το σχόλιο αυτό:

> *"Ο σκοπός του Χ βιβλίου των Στοιχείων είναι η έρευνα των σύμμετρων και ασύμμετρων μεγεθών, των ρητών και των αρρήτων. Η θεωρία αυτή ξεκινά από τη Σχολή των Πυθαγορείων. Ανεπτύχθη σπουδαία από τον Θεαίτητο τον Αθηναίο, ο οποίος επέδειξε σε αυτό τον κλάδο, όπως και σε άλλους τομείς των μαθηματικών, τέτοια οξύνοια ώστε δικαίως να προκαλεί τον θαυμασμό.*
>
> *Εξ άλλου αυτός υπήρξε εξόχως προικισμένη διάνοια και αφοσιώθηκε με ιδιαίτερο ζήλο στην έρευνα της αλήθειας στις επιστήμες, όπως αυτό καταμαρτυρείται στο διάλογο του Πλάτωνος, "Θεαίτητος". Όσον αφορά στις διακρίσεις των ανωτέρω μεγεθών και στις αυστηρές αποδείξεις των θεωρημάτων αυτής της θεωρίας, πιστεύω ότι οφείλονται σ' αυτόν. Και αργότερα ο μέγας Απολλώνιος, του οποίου η μεγαλοφυΐα στα μαθηματικά θαυμάστηκε σε μεγάλο βαθμό, πρόσθεσε σε αυτές τις ανακαλύψεις θαυμάσιες θεωρίες ύστερα από πολλές προσπάθειες και εργασία.*

*Διότι ο Θεαίτητος διέκρινε τις δυνάμεις** *(τετραγωνικές ρίζες) σε σύμμετρες και ασύμμετρες ως προς το μήκος και διαίρεσε τα γνωστά άρρητα ευθύγραμμα τμήματα κατά τους διάφορους γνωστούς μέσους, αποδίδοντας την μέση στον γεωμετρικό μέσο, την διώνυμο στον αριθμητικό μέσο και την αποτομή στον αρμονικό, όπως γράφεται από τον Εύδημο τον περιπατητικό. Όσον αφορά τον Ευκλείδη αυτός προσέφερε κανόνες σχετικά με την συμμετρία και την ασυμμετρία.*
Διετύπωσε με ακρίβεια τους ορισμούς και τις διακρίσεις ρητών και αρρήτων μεγεθών, θέσπισε μια πληθώρα τάξεων αρρήτων και τέλος απέδειξε την σπουδαιότητά τους.
Τέλος ο Απολλώνιος διεχώρισε τα είδη των διατεταγμένων ασυμμετριών και ανεκάλυψε την επιστήμη των ατάκτων ασύμμετρων μεγεθών για τα οποία δημιούργησε μεγάλο αριθμό με ακριβείς μεθόδους".

Καθώς ο Ευκλείδης αποδεικνύει ότι υπάρχουν συνολικά δεκατρία άρρητα ευθύγραμμα τμήματα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η υποδιαίρεση των τριών ειδών των αρρήτων από τον Θεαίτητο σε δεκατρία οφείλεται στον ίδιο τον Ευκλείδη, ενώ τα τελευταία λόγια του αποσπάσματος φαίνεται να αναφέρονται στην πρόταση X.115 *των Στοιχείων*, όπου αποδεικνύεται ότι από τη μέση μπορεί να παραχθεί άπειρο πλήθος άλλων αρρήτων που διαφέρουν τόσο από την αρχική όσο και μεταξύ τους.

Αλγεβρικές ερμηνείες των μελετητών - Ο επηρεασμός του Ευκλείδη από την Πλατωνική θεωρία

Το βιβλίο X αποτελεί κυρίως ένα είδος Λογισμού αρρήτων. Ο Stevin

---

* Ο όρος στη μετάφραση του Woepcke είναι δυνάμεις, αλλά η δύναμη του ορισμού του Θεαίτητου είναι "τετραγωνική ρίζα" ενός μη τετράγωνου αριθμού δηλαδή άρρητου. Η διάκριση είναι ανάμεσα στις "τετραγωνικές ρίζες" σύμμετρες ως προς το μήκος και τις "τετραγωνικές ρίζες" σύμμετρες μόνο ως προς το τετράγωνο. Έτσι οι $\sqrt{3}$ και $\sqrt{12}$ είναι σύμμετρες ως προς το μήκος αφού $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=2$ ή καλύτερα $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ ενώ οι $\sqrt{3}$ και $\sqrt{7}$ είναι σύμμετρες μόνο ως προς το τετράγωνο αφού $\frac{(\sqrt{7})^2}{(\sqrt{3})^2}=\frac{7}{3}$, γράφει ο Heath σελ. 259 στην Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών, Τόμος 1, Έκδοση Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.

πρώτος πρότεινε την κατανόηση του βιβλίου με αριθμητική ερμηνεία. Μετά το 1637 με το έργο του Descartes "*Géométrie*" και μέχρι το 1858 με το έργο του *Dedekind "Stetigkeit und irrationale Zahlen"* δημιουργήθηκε το απαραίτητο υπόβαθρο για την αριθμητικοποίηση της Γεωμετρίας και πολλοί μελετητές προσπάθησαν να αποδώσουν αλγεβρικά τις έννοιες αυτού του βιβλίου.

Ένα πολύ έντονο παράδειγμα της καταστροφής κάθε γεωμετρικής ερμηνείας και σκέψης που υπάρχει πίσω από τις προτάσεις του βιβλίου Χ όταν παρουσιάζονται καθαρά αλγεβρικά αποτελούν οι έννοιες: α) ρητή γραμμή (ευθύγραμμο τμήμα), η οποία εκφράζεται είτε με ένα ρητό αριθμό, είτε με την τετραγωνική ρίζα ενός ρητού ο οποίος δεν είναι τέλειο τετράγωνο, β) ρητό χωρίο (εμβαδό), που εκφράζεται με ένα ρητό αριθμό και γ) μέσο εμβαδό, που εκφράζεται με την τετραγωνική ρίζα ενός ρητού αριθμού που δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Αλγεβρικά δεν μπορεί να υπάρξει διαχωρισμός των τριών αυτών εννοιών σε μια σχέση που να τις περιλαμβάνει.

Στα *Στοιχεία* ορίζονται τρεις βασικοί τύποι αρρήτων ευθυγράμμων τμημάτων: Αν δίνονται δύο ρητοί α, β ασύμμετροι μεταξύ τους, τότε το άθροισμά τους α+β λέγεται διώνυμος, η διαφορά τους α-β λέγεται αποτομή ενώ ο γεωμετρικός τους μέσος $\sqrt{\alpha\beta}$ λέγεται μέση. Καθένα από τα τρία αυτά ευθύγραμμα τμήματα αποδεικνύεται ότι είναι άρρητος.

Βασικός στόχος του βιβλίου Χ είναι η προέκταση της αρχικής αυτής ταξινόμησης σε δέκα επιπλέον κλάσεις ευθυγράμμων τμημάτων άρρητου μήκους, πέντε από τις οποίες δημιουργούνται με την πρόσθεση και πέντε με την αφαίρεση.

Το βασικό χαρακτηριστικό του βιβλίου Χ δεν είναι οι μέθοδοι απόδειξης που χρησιμοποιούνται, αλλά η πλήρης έλλειψη συντονισμού τους.

Αρκετές φορές δίνονται εναλλακτικές αποδείξεις θεμάτων που έχουν ήδη παρουσιασθεί. Μια τέτοια διαδικασία υποκρύπτει επίπεδα συγγραφής του βιβλίου Χ από διαφορετικούς συγγραφείς.

Τα αποτελέσματα των προγενέστερων του Ευκλείδη στην στοιχειώδη Γεωμετρία δημιούργησαν επεκτάσεις των αρχικών εννοιών, τεχνικές και μεθόδους παρουσίασης διάφορων αποτελεσμάτων.

Στην περίπτωση της θεωρίας των αρρήτων, οι ορισμοί των τριών αρχικών κλάσεων αρρήτων ευθυγράμμων τμημάτων, με διαφορετική διατύπωση από αυτή του βιβλίου Χ, είχαν ήδη εισαχθεί από τον Θεαίτητο ένα αιώνα πριν, ενώ ο Εύδοξος συνεισέφερε στην επέκταση αυτών των αποτελεσμάτων και η μελέτη τους συνεχίστηκε από τους μαθητές του [βλ. Knorr (1975) και (1983α)]. Είναι φανερό ότι ο Ευκλείδης συμβουλεύθηκε διάφορες πηγές, τις οποίες αναδιατύπωσε στα τελικά του γραπτά.

Μια διαφορετική άποψη διατυπώνεται από τον Taisbak (1982), ο οποίος συμφωνώντας με τον van der Waerden (1954), εκφράζει ότι ο Ευκλείδης εκούσια αποκρύπτει τις κεντρικές ιδέες της θεωρίας των αρρήτων για να μη θίξει την ελιτιστική στάση που έχει κληρονομηθεί από την αρχαία γεωμετρική παράδοση.

Τροποποιώντας αυτή την άποψη ο Knorr (1984) πιστεύει ότι η φορμαλιστική και πολλές φορές δυσάρεστη ανάπτυξη του βιβλίου Χ, θεωρήθηκε απαραίτητη από τον Ευκλείδη για την εξοικείωση του αναγνώστη με την γεωμετρική πειθαρχία.

Οι απόψεις αυτές είναι και οι δύο δυνατές. Έχει όμως διατυπωθεί και μία τρίτη άποψη από τον Fowler, ότι ο στόχος του Ευκλείδη για το βιβλίο Χ ήταν περισσότερο "εκδοτικός" παρά μαθηματικός, δηλαδή, ότι προτίμησε απλά να παραθέσει δύο ή περισσότερες αντιμετωπίσεις της θεωρίας των αρρήτων σε μία κατανοητή έκφραση, παρά να επιχειρήσει μία εκ νέου σύνθεση της συνολικής θεωρίας.

Ο Δανός μαθηματικός μελετητής Zeuthen διετύπωσε τη γνώμη ότι σκοπός του βιβλίου Χ ήταν η επίλυση ορισμένου τύπου αλγεβρικών εξισώσεων δευτέρου βαθμού καθώς και διτετράγωνων εξισώσεων, που ανάγονται σε δευτεροβάθμιες του τύπου:

$$\chi^2 \pm 2\mu\chi\rho \pm \nu\rho^2 = 0 \quad \text{και} \quad \chi^4 \pm 2\mu\chi^2\rho^2 \pm \nu\rho^4 = 0$$

όπου ρ ρητό ευθύγραμμο τμήμα και μ, ν συντελεστές, άποψη που ασπάστηκαν αρκετοί ερευνητές όπως ο T. L. Heath*.

Βέβαια οι 12 κύριοι άρρητοι, 6 αθροίσματα (Προτάσεις 36-41) και 6

---

* Η βασική πρόταση των *Στοιχείων* στην πρόσθεση παρουσιάζεται αριθμητικοποιημένη ως εξής:

"*Αν δίνεται ο* $\beta+\gamma$, *να γραφεί ο* $\sqrt{\beta+\gamma}$ *στη μορφή* $\xi+\eta$, *όπου* $\xi^2+\eta^2=\beta$ *και* $2\xi\eta=\gamma$".

Η γεωμετρική ερμηνεία της πρότασης είναι το πρόβλημα παραβολής χωρίων. Αριθμητικά είναι ένα ζεύγος εξισώσεων ως προς ξ και η. Όλα τα σύμβολα παριστάνουν αριθμούς, οπότε κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στην διτετράγωνη εξίσωση: $\xi^4 - \beta\xi^2 + \frac{\gamma^2}{4} = 0$ από την οποία υπολογίζουμε τις πραγματικές τιμές του $\xi+\eta$.

Ωστόσο, αυτή η διαδικασία επίλυσης δεν προσεγγίζει ούτε στο ελάχιστο τους λεπτούς χειρισμούς με τις έννοιες των ρητών και αρρήτων που παρουσιάζονται στα *Στοιχεία*.

Ο Heath διαφοροποιεί τη θέση του ενσωματώνοντας τα λεπτά αυτά σημεία στα σχόλιά του. Το προηγούμενο αλγεβρικό αποτέλεσμα δεν έχει καμιά συνάφεια με τα *Στοιχεία* και κανένα αυτόνομο μαθηματικό νόημα.

διαφορές (Προτάσεις 73-78), είναι ρίζες διτετράγωνων εξισώσεων, ενώ στις 12 αντίστροφες προτάσεις, 6 αθροίσματα (Προτάσεις 48-53) και 6 διαφορές (Προτάσεις 85-90), οι άρρητοι προκύπτουν κατασκευαστικά ως ρίζες δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Όμως αυτό δεν είναι αρκετό για να πεισθεί κανείς ότι όλη αυτή η δουλειά του βιβλίου Χ έγινε για να επιλυθούν γεωμετρικά αλγεβρικές εξισώσεις ορισμένου τύπου, γράφει ο Σταμάτης στις παρατηρήσεις του.

Σημειώνει επίσης ότι καθώς ο Ευκλείδης ήταν Πλατωνικός, (μη ξεχνάμε ότι τα *Στοιχεία* ουσιαστικά ως προς το περιεχόμενό τους συμπληρώθηκαν την εποχή που ο Πλάτων διηύθυνε την Ακαδημία) ήταν επηρεασμένος από τη θεωρία του και τη διαλεκτική του.

Ο Πλάτων ήταν γνώστης της κοσμολογικής Ορφικής και Πυθαγορείου θεωρίας, κατά την οποία ο Κόσμος δημιουργήθηκε από το χάος από το Δημιουργό δια του σχήματος και του μέτρου. Στον Φίληβο διακρίνουμε την Πλατωνική θεωρία, ότι το Όλον αποτελείται από το δίπολο μεγάλο-μικρό και ότι η αρχή που διαμορφώνεται το σχήμα είναι το μεγάλο και το μικρό, το άπειρο και το πεπερασμένο.

Έχουμε Πλατωνικό άπειρο όταν η σχέση μεγάλο-μικρό ανανεώνεται σε κάθε στάδιο και πεπερασμένο όταν η σχέση τελειώνει σε κάποιο στάδιο.

Είναι δε πεπερασμένο, αν κάθε στοιχείο του ζεύγους μεγάλο-μικρό είναι μία ποσότητα (ως προς κάποιο μέτρο), είτε αν τα στοιχεία του ζεύγους είναι όπως αριθμός προς αριθμόν (λόγος δηλαδή).

Είναι χαρακτηριστικό ότι στο βιβλίο Χ των *Στοιχείων* η πρόταση Χ.1 (που αποτελεί τη βάση της λεγόμενης "μεθόδου της εξάντλησης" που οφείλεται στον Εύδοξο), βάζει τα θεμέλια για να τεθεί η ασυμμετρία στην πρόταση Χ.2.

Σε αυτή μια άπειρη διαδικασία ανθυφαίρεσης χαρακτηρίζει τα ασύμμετρα μεγέθη, ενώ μια πεπερασμένη διαδικασία χαρακτηρίζει τα σύμμετρα.

Η συμμετρία και η ασυμμετρία είναι τα στοιχεία των όντων. Το δεύτερο στοιχείο το οποίο βρίσκουμε στο Σύμπαν είναι το άρρητο, κάτι που δεν υποτάσσεται σε ακριβή καθορισμό, που δεν μετριέται, αλλά αφήνει υπόλοιπο κατόπιν οποιουδήποτε προσδιορισμού.

Ύστερα από την επικράτηση της θεωρίας των λόγων του Εύδοξου επί της θεωρίας του Θεαίτητου που μείωσε το ενδιαφέρον για την ανθυφαίρεση, το βιβλίο Χ είναι ένα κλειδί απαραίτητο για την διαλεύκανση της διαλεκτικής του Πλάτωνα, και ο στόχος και σκοπός του δεν ήταν η επίλυση κάποιου τύπου εξισώσεων γεωμετρικά.

Ο Paul-Henri Michel το 1950 γράφει: "*στη βάση του οικοδομήματος του*

Χ βιβλίου βρίσκουμε τις τρεις πρώτες αναλογίες, γεωμετρική, αριθμητική και αρμονική, ως ένα ενθύμιο του Πυθαγορισμού και ως μια μαρτυρία πίστεως του Ευκλείδη προς το πνεύμα του Πλάτωνος".

Μία υπόθεση εργασίας του Θεαίτητου

Σε προηγούμενη σελίδα αυτής της παραγράφου αναφέραμε σχόλιο του Πάππου, στο οποίο γίνεται μνεία της μεγαλοφυΐας και οξύνοιας του Θεαίτητου που διαίρεσε τα γνωστά άρρητα ευθύγραμμα τμήματα αποδίδοντας τη μέση στη γεωμετρική αναλογία, τη διώνυμο στην αριθμητική και την αποτομή στην αρμονική αναλογία.

Είναι πιθανό η προσέγγιση που ακολούθησε ο Θεαίτητος να είναι η εξής: Ξεκινώντας από δύο ευθύγραμμα τμήματα σύμμετρα ως προς το τετράγωνο αλλά όχι ως προς το μήκος κατασκεύασε από αυτά το γεωμετρικό, αριθμητικό και αρμονικό τους μέσο και έδειξε ότι κάθε ένας από αυτούς είναι ένα άρρητο ευθύγραμμο τμήμα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η χρησιμοποίηση των δύο πρώτων από τα προαναφερόμενα άρρητα ευθύγραμμα τμήματα δεν ήταν ιδιαίτερα διαφορετική απ' ότι έκανε ο Ευκλείδης για τη μέση και τη διώνυμο.

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε α και β τα μήκη των αρρήτων ευθυγράμμων τμημάτων που είναι σύμμετρα ως προς το τετράγωνο, αλλά όχι ως προς το μήκος. Τότε $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ είναι λόγος ακεραίων ενώ $\frac{\alpha}{\beta}$ δεν είναι. Αν σημειώσουμε με γ τον γεωμετρικό τους μέσο ($\gamma^2 = \alpha\cdot\beta$) τότε ισχυριζόμαστε ότι το γ είναι άρρητος, δηλαδή το γ^2 είναι ασύμμετρο με το τετράγωνο οποιουδήποτε ρητού ευθύγραμμου τμήματος.

Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{\gamma^2}{\alpha^2}$ (ή $\frac{\gamma^2}{\beta^2}$) δεν μπορεί να ισούται με λόγο ακεραίων. Διότι αν συνέβαινε αυτό, τότε αφού $\frac{\gamma^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2} = \frac{\beta}{\alpha}$, τα ευθύγραμμα τμήματα β και α θα ήταν σύμμετρα ως προς το μήκος, που είναι άτοπο.

Αν κατόπιν θέσουμε $\delta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ τον αριθμητικό τους μέσο, προκύπτει ότι το δ είναι επίσης ένα άρρητο ευθύγραμμο τμήμα.

Διότι αν υποθέσουμε ότι δεν είναι, τότε προκύπτει ότι $\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha^2}$ είναι ένας λόγος ακεραίων.

Αφού $\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha^2} = \frac{(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\cdot\beta)}{\alpha^2}$, και από την υπόθεση ότι το β είναι σύμμετρο ως προς το τετράγωνο με το α, προκύπτει ότι το 2α.β είναι σύμμετρο με το α^2 ή το β είναι σύμμετρο με το α ως προς το μήκος, που είναι άτοπο.

Για την τρίτη περίπτωση του αρμονικού μέσου ε των δοσμένων ασύμμετρων ως προς το μήκος ευθυγράμμων τμημάτων α και β, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει τη σχέση $\frac{\alpha-\varepsilon}{\varepsilon-\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$, από την οποία καθορίζεται ο αρμονικός μέσος $\varepsilon = \frac{2\alpha\cdot\beta}{\alpha+\beta}$, που σημαίνει ότι $\frac{\varepsilon}{\beta} = \frac{\alpha}{\delta}$.

Τότε αν το ε ήταν ρητός το $\frac{\varepsilon^2}{\beta^2}$ θα ήταν λόγος ακεραίων, οπότε το δ θα ήταν ρητός, πράγμα που είναι άτοπο διότι αποδείξαμε παραπάνω ότι ο αριθμητικός μέσος δ είναι άρρητος.

Τώρα, μπορεί κάποιος να παρατηρήσει μια άλλη σχέση που προκύπτει από αυτή τη χρήση του αρμονικού μέσου ε.

Είναι $\frac{\varepsilon}{\alpha-\beta} = \frac{2\alpha\cdot\beta}{\alpha^2-\beta^2}$ και από αυτή μπορεί κανείς να βγάλει σχέσεις και συμπεράσματα για τον αρμονικό ε με τη διαφορά α-β.

Στην Ευκλείδεια θεωρία, η αποτομή καθορίζεται ως διαφορά αρρήτων α - β, και η αρρητότητά της αποδεικνύεται δια μέσου του λόγου $\frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha^2}$, παράλληλα με τον τρόπο που δόθηκε παραπάνω για τον αριθμητικό μέσο.

Ωστόσο ο Ευκλείδης συμβαίνει να χειρίζεται την αποτομή ανεξάρτητα της διωνύμου και παραπέμπει σε ένα υστερόγραφο την ιδιότητα ότι κάθε διώνυμος (α+β) και η αντίστοιχη αποτομή (α-β) έχουν ρητό γινόμενο (α^2-β^2), την πρόταση X.114.

Η ιδιότητα αυτή θα μπορούσε να ήταν το κύριο εργαλείο που θα περιόριζε σημαντικά την αρμονική απόδειξη στην αριθμητική περίπτωση με τη βοήθεια της θεωρίας των μέσων του Θεαίτητου.

Η απουσία όμως περισσότερων ντοκουμέντων δεν μας επιτρέπει να εισέλθουμε σε ιδιαίτερες λεπτομέρειες στη θεωρία του Θεαίτητου.

Ένα πράγμα όμως είναι τελικά ξεκάθαρο:

Ο Θεαίτητος δεν μπορούσε να πετύχει κανένα αποτέλεσμα στην αρρητότητα τέτοιων ευθυγράμμων τμημάτων χωρίς τη χρήση της συμμετρίας ως προς το τετράγωνο που θεμελιώθηκε στην Ευκλείδεια θεωρία. Ο σχολιαστής Πάππος αντιπαραθέτει την περιορισμένη Πλατωνική άποψη του όρου, με την γενικότερη Ευκλείδεια άποψη, παρατηρώντας για παράδειγμα ότι οι όροι $\sqrt{8}\varepsilon$ και $\sqrt{18}\varepsilon$, καθένας ασύμμετρος με μια υποτιθέμενη ρητή μονάδα ε, είναι σύμμετροι μεταξύ τους ως προς το μήκος ενώ οι $\sqrt{7}\varepsilon$ και $\sqrt{12}\varepsilon$ είναι σύμμετροι μεταξύ τους μόνο ως προς το τετράγωνο και όχι ως προς το μήκος.

Ο Πάππος φαίνεται να επισημαίνει την έλλειψη στον Πλατωνικό και Θεαιτήτιο ορισμό και να επιδοκιμάζει τον αντίστοιχο Ευκλείδειο.

Α. Βιβλιογραφία

1. Εξαρχάκος Θ. Γ. *Εισαγωγή στα Μαθηματικά, Τόμος Β΄.*
2. Fowler D. *The mathematics of Plato's Academy.*
3. Heath T. L. *Ιστορία Ελληνικών Μαθηματικών, Τόμοι I, II.*
4. Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης (Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.) *Ευκλείδη "Στοιχεία", Τόμοι I, II, III.*
5. Knorr W. R. *The evolution of the Euclidean Elements.*
6. Morrow G. R. *Proclus, A commentary on the first book of Euclid's Elements.*
7. Mueller I. *On mathematics. Essays on ancient maths and its later development*
8. Smith D. E. *A Source book in Mathematics.*
9. Szabo A. *Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών.*
10. Taisbak C. M. *Coloured Quadrangles.*

Β. Αρθρογραφία

1. Δημάκος Γ., Κεκές Ι., Μπαραλής Γ. *Τα Στοιχεία του Ευκλείδη και η μαθηματική εκπαίδευση. Μία διαρκώς ανανεούμενη σχέση.*
2. Fowler D. *An Invitation to Read Book X of Euclid's Elements.*
3. Fowler D. *Book II of Euclid's Elements and a pre-Eudoxean theory of ratio.*
4. Knorr W. *Euclid's Tenth Book : An Analytic Survey.*
5. Knorr W. *"La croix des mathématisiens": The Euclidean Theory of irrational lines.*
6. Νεγρεπόντης Σ. Η ανθυφαιρετική φύση της Διαλεκτικής του Πλάτωνος.