Author: N. Ζαφειρόπουλος

Title: Προσεγγιστικός υπολογισμός του τελεστή ανταλλαγής δύο αδιακρίτων σωματιδίων που ακολουθούν την συμμετρία SU(3).

Abstract: Στην παρούσα εργασία αναλύεται η εξαγωγή από τον Dirac του τελεστή ανταλλαγής του σπιν μεταξύ δυο αδιακρίτων σωματιδίων SU(2). Έπειτα, με βάση την περίπτωση του τελεστή ανταλλαγής για την SU(2), εξάγεται μια προσεγγιστική μορφή για τον τελεστή ανταλλαγής μεταξύ δυο αδιακρίτων σωματιδίων για την SU(3) και αναλύονται οι ιδιότητες των αριθμητικών συντελεστών της μορφής αυτής.

Creator: HDML

Μαθηματική Επιθεώρηση, Τεύχος 58, 2002

Προσεγγιστικός υπολογισμός του τελεστή ανταλλαγής δύο αδιακρίτων σωματιδίων που ακολουθούν την συμμετρία SU(3).

Ζαφειρόπουλος Νικόλαος,
Διδάκτωρ Μηχανολόγος ΕΜΠ, Μέλος ΕΜΕ.

ABSTRACT

In the present paper, the discovery from Dirac of the permutation operator of spin between two identical particles – which is the permutation operator for the Lie group SU(2) – is analysed. It is emphasized that the given form of the permutation operator does not introduce any restrictions on the measurable physical quantities that are connected with spin. Then, an approximate form of the permutation operator between two identical particles for the Lie group SU(3), is deduced based on the form of the permutation operator for SU(2). The properties of the numerical coefficients of this form of the permutation operator for SU(3) are analysed. Then the equations, that these coefficients should obey, are given and these coefficients are found numerically with the help of a computer program. From all the solutions found from the computer, only one is kept, this which does not imposes restrictions on the measurable physical quantities that are connected with the Lie group SU(3).

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία αναλύεται η εξαγωγή απο τον Dirac του τελεστή ανταλλαγής του σπιν μεταξύ δύο αδιακρίτων σωματιδίων – ο οποίος είναι ο τελεστής ανταλλαγής για την ομάδα του Lie SU(2). Τονίζεται ακόμα ότι η δεδομένη μορφή του τελεστή δεν εισάγει κανένα περιορισμό στα μετρήσιμα φυσικά μεγέθη που σχετίζονται με το σπιν. Επειτα, με βάση την περίπτωση του τελεστή ανταλλαγής για την SU(2), εξάγεται μιά προσεγγιστική μορφή για τον τελεστή ανταλλαγής μεταξύ δύο αδιακρίτων σωματιδίων για την

SU(3) και αναλύονται οι ιδιότητες των αριθμητικών συντελεστών της μορφής αυτής. Κατόπιν δίδονται οι εξισώσεις που πρέπει να ικανοποιούν οι συντελεστές αυτοί και με τη βοήθεια υπολογιστού βρίσκονται οι αριθμητικές τιμές αυτών των συντελεστών. Απο όλες τις λύσεις που βρέθηκαν μέσω υπολογιστού μόνο μία θεωρείται ώς φυσικά παραδεκτή αυτή δηλαδή που δεν εισάγει κανένα περιορισμό στα μετρούμενα φυσικά μεγέθη που σχετίζονται με την ομάδα Lie SU(3).

Ο Dirac στο περίφημο πλέον σύγγραμά του (παραπομπή [2] κεφάλαιο IX) ορίζει τον τελεστή ανταλλαγής μεταξύ δύο ηλεκτρονίων ως $P_{AB} = P^{\chi}_{AB} P^{\sigma}_{AB}$ όπου P_{AB} ο τελεστής ανταλλαγής μεταξύ των ηλεκτρονίων A και B, P^{χ}_{AB} ο τελεστής ανταλλαγής μεταξύ μόνο των συντεταγμένων x,y,z των A και B και P^{σ}_{AB} ο τελεστής ανταλλαγής μόνο των σπιν των A και B (ο Dirac χρησιμοποιεί σαν A και B τους αριθμούς 1 και 2 αντίστοιχα αλλά θα δούμε ότι ο δικός μας συμβολισμός βοηθάει στην εργασία αυτή). Ο τελεστής παραδείγματος χάριν P^{χ}_{AB} ανταλλάσει τις συντεταγμένες των A και B μεταξύ των και αντίστοιχα ο τελεστής P^{σ}_{AB} ανταλλάσει τα σπιν των A και B μεταξύ των. Ακόμα οι τελεστές P^{χ}_{AB} και P^{σ}_{AB} μετατίθενται μεταξύ τους διότι αναφέρονται σε διαφορετικούς βαθμούς ελευθερίας. Περαιτέρω αποδεικνύει ότι ισχύει :

$$P^{\sigma}_{AB} = \tfrac{1}{2}\,(1 + \boldsymbol{\sigma}_A\, \boldsymbol{\sigma}_B\,) = \tfrac{1}{2}\,(1 + \sigma_{Aj}\, \sigma_{Bj}\,) \qquad (1)$$

οπου $\boldsymbol{\sigma}_A$ και $\boldsymbol{\sigma}_B$ τα μητρώα των σπιν για τα σωματίδια A και B αντίστοιχα και $\boldsymbol{\sigma}_A\, \boldsymbol{\sigma}_B$ συμβολίζει το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων $\boldsymbol{\sigma}_A$ και $\boldsymbol{\sigma}_B$. Δηλαδή ισχύει:

$$\boldsymbol{\sigma}_A\, \boldsymbol{\sigma}_B = \sigma_{Aj}\,\sigma_{Bj} = \sigma_{Ax}\,\sigma_{Bx} + \sigma_{Ay}\,\sigma_{By} + \sigma_{Az}\,\sigma_{Bz} \qquad (2)$$

οπου σ_{Ax} , σ_{Ay} , σ_{Az} τα μητρώα του Pauli για το σωματίδιο A και αντίστοιχα με τον δείκτη B για το σωματίδιο B. Τα μητρώα του Pauli είναι οι γεννήτορες της ομάδας του Lie SU(2) στην αναπαράσταση μικρότερης διάστασης. Ισχύουν δε οι παρακάτω γνωστές σχέσεις (3α,3β) για τα μητρώα του Pauli για τα σωματίδια A και B (παραπομπή [3] σελίδα 44, παραπομπή [4] σελίδα 25 – το i δηλώνει την φανταστική μονάδα και δεν πρέπει να συγχέεται με τον δείκτη i):

$$\sigma_{Ai}\,\sigma_{Aj} = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\,\sigma_{Ak} \qquad (3\alpha)$$

$$\sigma_{Bi}\,\sigma_{Bj} = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\,\sigma_{Bk} \qquad (3\beta)$$

Τα σύμβολα δ_{ij} και ε_{ijk} ορίζονται στην παραπομπή [3] σελίδα 36 και ονομάζονται το μεν δ_{ij} τανυστής-σύμβολο του Kronecker το δε ε_{ijk} πλήρως αντισυμμετρικό σύμβολο τριών δεικτών ή τανυστής των Levi-Civita και είναι οι σταθερές δομής (structure constants) για την ομάδα Lie SU(2). Ισχύει δε ακόμα η σχέση :

$$[\sigma_{Ai}, \sigma_{Bj}] \equiv \sigma_{Ai}\sigma_{Bj} - \sigma_{Bj}\sigma_{Ai} = 0 \qquad (4)$$

διότι τα σ_{Ai} και σ_{Bj} αναφέρονται σε διαφορετικά σωματίδια άρα μετατίθενται. Στην σχέση (4) ορίσαμε και τον μεταθέτη δύο τελεστών A και B ως [A,B]. Η σχέση (1) αποδεικνύεται ως ακολούθως (την αποδεικνύουμε διότι βοηθάει στην δική μας εργασία). Καταρχάς θα πρέπει να ισχύει:

$$P_{AB}P_{BA} = 1\ ,\quad P^{x}_{AB}P^{x}_{BA} = 1\ ,\ P^{\sigma}_{AB}P^{\sigma}_{BA} = 1 \qquad (5)$$

διότι το P^{σ}_{AB} παραδείγματος χάριν φέρνει το σπίν του σωματιδίου A στο B και το P^{σ}_{BA} φέρνει το σπίν του σωματιδίου B στο A άρα το γινόμενό τους δεν αλλάζει τίποτε άρα ισούται με μονάδα. Ομοια αποδεικνύονται και οι άλλες ισότητες στην σχέση (5). Τώρα κάνουμε μια βασική σκέψη η οποία είναι η παρακάτω. Επειδή κανένα από τα δύο σωματίδια A και B δεν είναι προνομιούχο γιά την περιγραφή της φύσης πρέπει να ισχύει:

$$P_{AB} = P_{BA}\ ,\ P^{x}_{AB} = P^{x}_{BA}\ ,\ P^{\sigma}_{AB} = P^{\sigma}_{BA} \qquad (6)$$

Για τον ίδιο λόγο έχουμε βάλει και στον τελεστή P^{σ}_{AB} τα $\boldsymbol{\sigma}_A$ και $\boldsymbol{\sigma}_B$ με την ίδια "βαρύτητα" δηλαδή σαν εσωτερικό γινόμενο η γενικά σαν μια συμμετρική συνάρτηση των A και B. Ετσι η σχέση (5) με βάση την σχέση (6) γίνεται:

$$P_{AB}^{\ 2} = 1\ ,\qquad P^{x\ 2}_{AB} = 1\ ,\ P^{\sigma\ 2}_{AB} = 1 \qquad (7)$$

Ενδιαφερόμαστε μόνο για το μέρος $P^{\sigma\ 2}_{AB}$ και το αναπτύσσουμε (στην ανάπτυξη αυτή και στις παρακάτω αποδείξεις στα δεξιά γράφουμε με συνεπαγωγή την σχέση που κάθε φορά χρησιμοποιείται και φυσικά ο επαναλαμβανόμενος δείκτης σημαίνει άθροιση κάτι που αναφέρεται σαν σύμβαση άθροισης του Einstein) :

$$P^{\sigma\ 2}_{AB} = \tfrac{1}{2}(1 + \sigma_{Ai}\sigma_{Bi})\,\tfrac{1}{2}(1 + \sigma_{Aj}\sigma_{Bj}) =$$

$$= \tfrac{1}{4}(1 + 2\sigma_{Ai}\sigma_{Bi} + \sigma_{Ai}\sigma_{Bi}\sigma_{Aj}\sigma_{Bj}) =$$

$$(4)\Rightarrow\ = \tfrac{1}{4}(1 + 2\sigma_{Ai}\sigma_{Bi} + \sigma_{Ai}\sigma_{Aj}\sigma_{Bi}\sigma_{Bj}) =$$

$$(3\alpha,3\beta)\Rightarrow = \tfrac{1}{4}(1 + 2\sigma_{Ai}\sigma_{Bi} + (\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijs}\sigma_{As})(\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijl}\sigma_{Bl})) =$$

$$(8)\Rightarrow = \tfrac{1}{4}(1 + 2\sigma_{Ai}\sigma_{Bi} + \delta_{ij}\delta_{ij} + i\delta_{ij}\varepsilon_{ijs}\sigma_{As} + i\delta_{ij}\varepsilon_{ijl}\sigma_{Bl} - \varepsilon_{ijs}\varepsilon_{ijl}\sigma_{As}\sigma_{Bl}) =$$

$$= \tfrac{1}{4}(1 + 2\sigma_{Ai}\sigma_{Bi} + 3 - 2\delta_{sl}\sigma_{As}\sigma_{Bl}) =$$

$$= \tfrac{1}{4}(4 + 2\sigma_{Ai}\sigma_{Bi} - 2\sigma_{Al}\sigma_{Bl}) = 1$$

Στην αντιπροτελευταία γραμμή θέσαμε $\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{ii} = 3$ διότι δ_{ij} είναι ο τανυστής του Kronecker για τον τρισδιάστατο χώρο και $\delta_{ij}\, \varepsilon_{ijs} = 0$ για κάθε s διότι είναι γινόμενο ενός τανυστή συμμετρικού ως προς τους δείκτες i και j (του δ_{ij}) και ενός αντισυμμετρικού ως προς τους δείκτες i και j (του ε_{ijs}) με άθροιση ως προς τους ιδίους δείκτες. Η σχέση (8) που χρησιμοποιούμε στην αντιπροτελευταία γραμμή κατά τρόπο πρωθύστερο είναι η ακόλουθη:

$$\varepsilon_{ijs}\, \varepsilon_{ijl} = 2\delta_{sl} \qquad (8)$$

και αποδεικνύεται βάσει της παρακάτω σχέσης (9) (παραπομπή [3] σελίδα 37):

$$\varepsilon_{ijs}\, \varepsilon_{kls} = -\, \delta_{li}\, \delta_{kj} + \delta_{ki}\, \delta_{jl} \qquad (9)$$

Σημειώνουμε δε ότι η απλή μορφή της σχέσης (9) – όπου εμπλέκονται οι αριθμητικές σταθερές δομής της SU(2) – είναι βασική για την απλότητα της μορφής του τελεστή ανταλλαγής της SU(2), η δε απουσία μιας ανάλογης σχέσης για τις αριθμητικές σταθερές f_{ijk} και d_{ijk} της SU(3) – θα τις συναντήσουμε παρακάτω – ήταν το ερέθισμα για τον συγγραφέα να ερευνήσει την ύπαρξη του τελεστή ανταλλαγής της SU(3). Η απόδειξη της σχέσης (8) είναι η παρακάτω (θεωρούνται γνωστές οι ιδιότητες κυκλικότητας και συμμετρίας των συμβόλων ε_{ijk} και δ_{ij} οι οποίες αναφέρονται στην παραπομπή [3]):

$$\varepsilon_{ijs}\, \varepsilon_{ijl} = \varepsilon_{sij}\, \varepsilon_{lij} =$$

$$(9) \Rightarrow = -\, \delta_{si}\, \delta_{li} + \delta_{ls}\, \delta_{ii} = -\, \delta_{sl} + 3\, \delta_{ls} = 2\, \delta_{sl}$$

Η απόδειξη της ${P^{\sigma}_{AB}}^2 = 1$ του τελεστή ανταλλαγής των σπιν δύο ηλεκτρονίων -στην πραγματικότητα αυτός ο τελεστής είναι τελεστής ανταλλαγής δύο αδιακρίτων σωματιδίων που ακολουθούν την ομάδα Lie SU(2) - μας δελεάζει να κάνουμε την γενίκευση σε άλλες ομάδες Lie που χρησιμοποιούνται στην φυσική. Η πιό φυσική γενίκευση είναι να βρούμε τον τελεστή ανταλλαγής για την ομάδα SU(3) η οποία χρησιμοποιείται π.χ. στην Κβαντική Χρωμοδυναμική (QCD-Quantum Chromodynamics) τη τοπική θεωρία βαθμίδας (local gauge theory) για τα ισχυρώς αλληλεπιδρώντα θεμελιώδη σωματίδια κουάρκ και αντικουάρκ (quark και antiquark) και σαν συμμετρία γεύσης (flavor) των κουάρκ. Ετσι στην αριθμητική ανάλυση των κβαντικών θεωριών βαθμίδας (lattice gauge theories) μια κατάσταση κουάρκ ή αντικουάρκ (παραπομπή [1] σελ.389) συμβολίζεται σαν $|n,a,l,\sigma\rangle$ (χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό bra και ket του Dirac ο οποίος αναλύεται παρακάτω) όπου *n* είναι ενας δείκτης που δηλώνει συντεταγμένες, *α* ένας δείκτης γεύσης (flavor) (επάνω up, κατω down, παράξενος strange, χαριτωμένος charmed, ομορφιάς beaty ή πυθμένα bottom και αλήθειας ή κορυφής truth ή top), *l* ένας δείκτης που ορίζει το χρώμα (color) συνήθως κόκκινο, μπλέ ή πράσινο (red, blue ή green) και σ ένας δείκτης που σχετίζεται με το σπιν. Φυσικά οι λέξεις γεύση και χρώμα που χρησιμοποιούνται είναι κβαντικά μεγέθη και η σημασία τους είναι τελείως διαφορετική απο τις συνήθεις έννοιες της καθημερινής ζωής. Για δε το τι σημαίνει γεύση (flavor) και χρώμα (color) των κουάρκ και αντικουάρκ ο αναγνώστης παραπέμπεται στις παραπομπές [1] και [6] ή σε κάθε σύγχρονο βιβλίο στοιχειωδών σωματιδίων ή κβαντικής θεωρίας πεδίου.

Οι ορισμοί των διανυσμάτων ket και bra βρίσκονται στην παραπομπή [2] σελίδες 18-22. Στην ουσία ένα διάνυσμα ket δηλώνει ένα διάνυσμα στήλης με κάπως πιό αφηρημένο τρόπο και συμβολίζεται με $|A\rangle$ και το αντίστοιχο διάνυσμα bra δηλώνει το αντίστοιχο συζυγές διάνυσμα γραμμής και συμβολίζεται με $\langle A|$. Οι δε ονομασίες bra και ket έχουν βγεί απο την λέξη braket που δηλώνει το εσωτερικό γινόμενο $\langle A|B\rangle$ των διανυσμάτων $\langle A|$ και $|B\rangle$. Θα χρησιμοποιήσουμε δε παρακάτω τους συμβολισμούς των διανυσμάτων bra και ket. Ετσι ο τελεστής εναλλαγής μεταξύ δύο καταστάσεων κουάρκ ή αντικουάρκ θα γραφεί:

$$P_{AB} = P^{x}{}_{AB}\, P^{flavor}{}_{AB}\, P^{color}{}_{AB}\, P^{\sigma}{}_{AB} \qquad (10)$$

οπου το νόημα των συμβόλων είναι προφανές. Από την προηγούμενη ανάλυση του Dirac ξέρουμε ότι οι τελεστές $P^{x}{}_{AB}$ και $P^{\sigma}{}_{AB}$ υπάρχουν. Ο τελεστής $P^{flavor}{}_{AB}$ δεν θα μας απασχολήσει διότι μπορούμε να κάνουμε την παραδοχή ότι έχουμε μιά μόνο γεύση (flavour) κουάρκ άρα $P^{flavor}{}_{AB} = 1$. Θα ασχοληθούμε λοιπόν μόνο με τον τελεστή $P^{color}{}_{AB}$. Αυτόν τον γράφουμε γενικά ως εξής:

$$P^{color}{}_{AB} = a + \mu_\chi \lambda_{A\chi} + \rho_\pi \lambda_{B\pi} + c_{pq} \lambda_{Ap}\, \lambda_{Bq} \qquad (11)$$

οπου λ_{Ap} και λ_{Bq} τα μητρώα της SU(3) για τα σωματίδια A και B αντίστοιχα. Τα μητρώα αυτά αποτελούν τους γεννήτορες της SU(3) έχουν κανονικοποιηθεί απο τούς Gell-Mann και Neeman και βρίσκονται σχεδόν σε κάθε βιβλίο που αναφέρεται σε στοιχειώδη σωματίδια (βλέπε παραπομπή [1] σελ.181 - δεν αναφέραμε την πρωτότυπη παραπομπή των Gell-Mann και Neeman διότι είναι κάπως παλιά). Οι ιδιότητες των μητρώων αυτών είναι οι ακόλουθες (παραπομπή [1] σελ.182 και πάλι το i δηλώνει την φανταστική μονάδα):

$$[\lambda_{Ai}, \lambda_{Aj}] = \lambda_{Ai}\, \lambda_{Aj} - \lambda_{Aj}\, \lambda_{Ai} = 2\, i\, f_{ijk}\, \lambda_{Ak} \qquad (12\alpha)$$

$$[\lambda_{Bi}, \lambda_{Bj}] = \lambda_{Bi}\, \lambda_{Bj} - \lambda_{Bj}\, \lambda_{Bi} = 2\, i\, f_{ijk}\, \lambda_{Bk} \qquad (12\beta)$$

$$\{\lambda_{Ai}, \lambda_{Aj}\} = \lambda_{Ai}\, \lambda_{Aj} + \lambda_{Aj}\, \lambda_{Ai} = 4/3\, \delta_{ij} + 2\, d_{ijk}\, \lambda_{Ak} \qquad (12\gamma)$$

$$\{\lambda_{Bi}, \lambda_{Bj}\} = \lambda_{Bi}\lambda_{Bj} + \lambda_{Bj}\lambda_{Bi} = 4/3\,\delta_{ij} + 2\,d_{ijk}\lambda_{Bk} \quad (12\delta)$$

$$[\lambda_{Ak}, \lambda_{Bj}] = 0 \quad (12\varepsilon)$$

$$\lambda_{Ai}\lambda_{Aj} = 2/3\,\delta_{ij} + (d_{ijk} + if_{ijk})\lambda_{Ak} = 2/3\,\delta_{ij} + E_{ijk}\lambda_{Ak} \quad (12\zeta)$$

$$\lambda_{Bi}\lambda_{Bj} = 2/3\,\delta_{ij} + (d_{ijk} + if_{ijk})\lambda_{Bk} = 2/3\,\delta_{ij} + E_{ijk}\lambda_{Bk} \quad (12\eta)$$

$$E_{ijk} = i\,f_{ijk} + d_{ijk} \quad (12\theta)$$

Ορίσαμε και ως αντιμεταθέτη δύο τελεστών Α και Β το σύμβολο {Α,Β} στις (12γ) και (12δ). Οι αριθμοί f_{ijk} και d_{ijk} είναι γνωστοί και βρίσκονται και αυτοί στην παραπομπή [1] σελ.182 (οι f_{ijk} είναι οι σταθερές δομής της άλγεβρας su(3) – structure constants). Σημειώνουμε ότι τα f_{ijk} είναι αντισυμμετρικά σε κάθε αντιμετάθεση και τα d_{ijk} συμμετρικά κάτι που θα μας χρειαστεί (βλ.[1] σελ.182). Η ιδιότητα (12ε) είναι αντίστοιχη της σχέσης (4) και σημαίνει ότι τα μητρώα λ_{Ak} και λ_{Bj} μετατίθενται για κάθε k και j διότι αναφέρονται σε διαφορετικά σωματίδια άρα αναφέρονται σε διαφορετικούς βαθμούς ελευθερίας. Οι σχέσεις (12ζ) και (12η) παράγονται με πρόσθεση των (12α) έως (12δ), απο αυτές δε τις σχέσεις (12ζ) και (12η) αποδεικνύεται ότι η γενική μορφή του τελεστή $P^{color}{}_{AB}$ είναι αυτή της σχέσης (11) διότι ένα πολλαπλό γινόμενο της μορφής π.χ. $\lambda_{Ap}\lambda_{Am}\lambda_{Bq}$ θα διασπαστεί λόγω της (12ζ) σε γινόμενα της μορφών $\lambda_{As}\lambda_{Bq}$ και $\delta_{mp}\lambda_{Bq}$. Ομοια ισχύουν και για ένα πολλαπλό γινόμενο της μορφής $\lambda_{Bp}\lambda_{Bm}\lambda_{Aq}$ το οποίο θα διασπαστεί σε γινόμενα των μορφών $\lambda_{Bs}\lambda_{Aq}$ και $\delta_{mp}\lambda_{Aq}$ λόγω της (12η). Κατά πλείονα λόγο πολλαπλά γινόμενα με περισσότερους όρους θα διασπαστούν σε όρους της σχέσης (11).

Λόγω δε του ότι κανένα σωματίδιο δεν είναι προνομιούχο για την περιγραφή της φύσης θα ισχύει $c_{qp}=c_{pq}$ για κάθε p και q και ακόμα ότι $\mu_\chi = \rho_\chi$ για κάθε χ. Αυτή η ιδιότητα είναι ανάλογη της σχέσης (6) και σημαίνει ότι μόνο συμμετρικές συναρτήσεις των Α και Β είναι δεκτές στον τελεστή. Τότε θα ισχύουν σε αντιστοιχία με τις σχέσεις (5) έως (7):

$$P^{color}{}_{AB}\,P^{color}{}_{BA} = 1 \quad (13\alpha)$$

$$P^{color}{}_{AB} = P^{color}{}_{BA} \quad (13\beta)$$

$$(P^{color}{}_{AB})^2 = 1 \quad (13\gamma)$$

Τώρα θα αποδείξουμε μια βασική ιδιότητα για τον τελεστή $P^{color}{}_{AB}$. Έστω ένα διάνυσμα ket |Α,Β> δηλαδή διάνυσμα στήλης μιας κατάστασης δύο σωματιδίων κουάρκ Α και Β, και <Β,Α| το αντίστοιχο bra δηλαδή το αντίστοιχο συζυγές διάνυσμα γραμμής. Ακόμα ορίζουμε σαν |Β,Α> το ket μετά την επίδραση του τελεστή $P^{color}{}_{AB}$ και <Α,Β| το αντίστοιχο bra δηλαδή ισχύει $|B,A\rangle = P^{color}{}_{AB}\,|A,B\rangle$ και άρα $\langle A,B| = \langle B,A|\,(P^{color}{}_{AB})^{+}$ όπου το $(P^{color}{}_{AB})^{+}$ δηλώνει τον Ερμιτιανό συζυγή (Hermitian conjugate) του $P^{color}{}_{AB}$. Επειδή τίποτε δεν αλλάζει στην φυσική αφού τα σωματίδια είναι αδιάκριτα το μέτρο του διανύσματος $|A,B\rangle$ πριν και μετά την επιβολή του τελεστή μεταξύ των δύο σωματιδίων πρέπει να είναι το ίδιο. Αρα θα πρέπει να ισχύει (στην σχέση (14) το $\langle B,A|A,B\rangle$ δηλώνει το μέτρο του $|A,B\rangle$):

$$\langle B,A \mid A,B\rangle = \langle A,B|\,B,A\rangle \tag{14}$$

και έτσι αντικαθιστώντας τα $\langle A,B|$ και $|B,A\rangle$ (αφού η σχέση (14) πρέπει να ισχύει για όλα τα $|A,B\rangle$) έχουμε ότι $P^{color}{}_{AB}\,(P^{color}{}_{AB})^{+} = 1$ (δηλαδή είναι μοναδιαίος – unitary) επειδή δε ισχύει η σχέση (13γ) δηλαδή $(P^{color}{}_{AB})^{2} = 1$ ισχύει τελικά ότι $P^{color}{}_{AB} = (P^{color}{}_{AB})^{+}$ δηλαδή ο τελεστής είναι και Ερμιτιανός. Επειδή δε τα μητρώα λ_{Ap} και λ_{Bq} είναι Ερμιτιανά και μετατίθενται μεταξύ τους (σχέση (12ε)) οι αριθμοί a, ρ_χ και c_{pq} πρέπει να είναι πραγματικοί.

Με βάση τις σχέσεις (11),(12) και (13γ) και τις βασικές ιδιότητες του τελεστή $P^{color}{}_{AB}$ μπορούμε να προσδιορίσουμε τις σχέσεις τις οποίες πρέπει να ικανοποιούν οι αριθμοί a, ρ_χ και c_{pq} και τελικά να τους προσδιορίσουμε. Στην πλήρη γενικότητά του το πρόβλημα είναι πολύ δύσκολο. Πρόκειται για ένα σύστημα 45 εξισώσεων (θα εξηγηθεί παρακάτω γιατί είναι οι εξισώσεις 45) μή γραμμικών (τετραγωνικών ακριβέστερα) με 45 αγνώστους (είναι $8*(8+1)/2 = 36$ για τα $c_{\kappa\lambda}$ – επειδή είναι συμμετρικά – 8 για τα β_q και 1 το a σύνολο 45) το οποίο είναι πιθανόν να έχει πλέον της μιάς μη τετριμμένης λύσεως (η τετριμμένη είναι η $a = \pm 1$, $\rho_\chi = 0$ και $c_{pq} = 0$). Εδώ θα ασχοληθούμε με μιά ειδική μορφή της οποίας θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε τους συντελεστές. Αυτή είναι η παρακάτω:

$$P^{color}{}_{AB} = a + \beta_q \lambda_{Aq}\,\lambda_{Bq} \tag{15}$$

Δηλαδή θέτουμε $\rho_\chi = \mu_\chi = 0$ και διαγωνιοποιούμε τα c_{pq}. Σε αυτό μας οδηγεί και η αντίστοιχη μορφή για την ομάδα SU(2) (βλέπε σχέση 1). Με βάση την σχέση (13γ) και τις σχέσεις (12ζ) και (12η) έχουμε:

$$(P^{color}{}_{AB})^2 = 1 = (a + \beta_i \lambda_{Ai}\,\lambda_{Bqi})(a + \beta_j \lambda_{Aj}\,\lambda_{Bj}) =$$

$$= a^2 + 2a\beta_i \lambda_{Ai}\,\lambda_{Bi} + \beta_i\beta_j \lambda_{Ai}\,\lambda_{Bi}\,\lambda_{Aj}\,\lambda_{Bj} =$$

$$(12\varepsilon) \Rightarrow = a^2 + 2a\beta_i \lambda_{Ai}\,\lambda_{Bi} + \beta_i\beta_j \lambda_{Ai}\,\lambda_{Aj}\,\lambda_{Bi}\,\lambda_{Bj} =$$

$$= a^2 + 2a\beta_i \lambda_{Ai}\,\lambda_{Bi} + \underset{i>j}{\beta_i\beta_j\,\lambda_{Ai}\,\lambda_{Aj}\,\lambda_{Bi}\,\lambda_{Bj}} + \underset{i<j}{\beta_i\beta_j\,\lambda_{Ai}\,\lambda_{Aj}\,\lambda_{Bi}\,\lambda_{Bj}} +$$

$$+ \beta_i\beta_i\,\lambda_{Ai}\,\lambda_{Ai}\,\lambda_{Bi}\,\lambda_{Bi} =$$

$$(12\zeta),(12\eta) \Rightarrow = a^2 + 2a\beta_i\lambda_{Ai}\,\lambda_{Bi} + \underset{i>j}{\beta_i\beta_j}\,(E_{ijk}\,\lambda_{Ak})(E_{ijm}\,\lambda_{Bm}) +$$

$$+ \underset{j>i}{\beta_i\beta_j}\,(E_{ijk}\,\lambda_{Ak})(E_{ijm}\,\lambda_{Bm}) +$$

$$+ (\beta_i)^2\,(2/3 + E_{iik}\,\lambda_{Ak})(2/3 + E_{iim}\,\lambda_{Bm}) =$$

$$= a^2 + 2a\beta_i\lambda_{Ai}\,\lambda_{Bi} + \underset{i>j}{\beta_i\beta_j}\,(E_{ijk}\,\lambda_{Ak})(E_{ijm}\,\lambda_{Bm}) +$$

$$+ \underset{i>j}{\beta_i\beta_j}\,(E_{jik}\,\lambda_{Ak})(E_{jim}\,\lambda_{Bm}) +$$

$$+ (\beta_i)^2\,(4/9 + 2/3\,E_{iik}\,\lambda_{Ak} + 2/3\,E_{iim}\,\lambda_{Bm} + E_{iik}\,E_{iim}\,\lambda_{Ak}\,\lambda_{Bm}) =$$

$$= a^2 + 4/9(\beta_i)^2 + 2/3\,(\beta_i)^2 E_{iik}\,\lambda_{Ak} + 2/3\,(\beta_i)^2 E_{iim}\,\lambda_{Bm} +$$

$$2a\beta_i\lambda_{Ai}\,\lambda_{Bi} + (\beta_i)^2 E_{iik}\,E_{iim}\,\lambda_{Ak}\,\lambda_{Bm} +$$

$$\underset{i>j}{\beta_i\beta_j}\,(E_{ijk}\,E_{ijm} + E_{jik}\,E_{jim})\lambda_{Ak}\,\lambda_{Bm} = 1$$

Στην προτελευταία σχέση εναλλάξαμε τους βωβούς δείκτες i και j κάτι που μπορούμε να κάνουμε αφού ισχύει η σύμβαση άθροισης του Einstein. Από την τελευταία σχέση εξισώνοντας τους σταθερούς όρους με 1 και τους συντελεστές των λ_{Ak}, λ_{Bm} και $\lambda_{Ak}\lambda_{Bm}$ με μηδέν έχουμε (στην σχέση (16γ) στον όρο $2a\beta_k\,\delta_{km}$ δεν υπονοείται άθροιση):

$$a^2 + 4/9(\beta_i)^2 = 1 \qquad (16\alpha)$$

$$(\beta_i)^2\,\varepsilon_{iik} = 0 \qquad \forall\, k \in \{1,2,\ldots,8\} \qquad (16\beta)$$

$$2a\beta_k\,\delta_{km} + (\beta_i)^2\,E_{iik}\,E_{iim} + \underset{i>j}{\beta_i\beta_j}\,(E_{ijk}\,E_{ijm} + E_{jik}\,E_{jim}) = 0$$

$$\forall\,(k,m) \in \{1,2,\ldots,8\}X\{1,2,\ldots,8\} \text{ και } k >= m \qquad (16\gamma)$$

Οι εξισώσεις (16γ) είναι 8*(8+1)/2 = 36 αφού k > = m, οι εξισώσεις (16β) είναι φανερά 8 και μιά η (16α) σύνολο 45. Ο περιορισμός k > = m στις εξισώσεις (16γ) δηλώνει ότι κανένα σωματίδιο δεν είναι προνομιούχο στην περιγραφή της φύσης δηλαδή αφού πρέπει να μηδενίζεται ο συντελεστής του όρου $\lambda_{Ak}\lambda_{Bm}$, αυτόματα μηδενίζεται και ο συντελεστής του αντίστοιχου όρου $\lambda_{Am}\lambda_{Bk}$. Σημειώνουμε ότι οι εξισώσεις (16β) και (16γ) είναι γενικά μιγαδικές αφού τα E_{ijk} είναι γενικά μιγαδικά (βλέπε σχέση (12θ)). Το σύστημα αυτών των 45 εξισώσεων και 9 αγνώστων πάλι είναι πολύ σύσκολο να λυθεί. Θα λύσουμε το σύστημα με υπολογιστή με την μέθοδο της ελαχιστοποίησης. Αναφέρουμε ότι οι υπολογισμοί έγιναν σε μικρουπολογιστή Pentium III στα 550MHz με λειτουργικό σύστημα Windows 98 και σε γλώσσα προγραμματισμού MS Fortran V.4.0. Οι απαιτήσεις σε μνήμη και σκληρό δίσκο είναι αμελητέες μόνο η ταχύτητα ενδιαφέρει. Οι υπολογισμοί έγιναν σε αριθμητική διπλής ακρίβειας – double precision.

Θα προσπαθήσουμε λοιπόν να βρούμε εκείνο τον συνδυασμό των a και β_i ο οποίος δίνει το τετράγωνο της απόλυτης τιμής της διαφοράς από τα δεύτερα μέλη των εξισώσεων (16α-16γ) πιό κοντά στο μηδέν. Και αυτό θα το κάνουμε με χρήση της ρουτίνας ελαχιστοποίησης BCLSF (ακριβέστερα DBCLSF για διπλή ακρίβεια) της μαθηματικής βιβλιοθήκης IMSL η οποία IMSL είναι ενσωματωμένη στην γλώσσα MS Fortran V.4.0. Σημειώνεται ότι οι ρουτίνες της IMSL καλούνται και από τις γλώσσες C/C++. Η ρουτίνα DBCLSF κάνει σε διπλή ακρίβεια εύρεση των τιμών των μεταβλητών (στην περίπτωσή μας a και β_i) τα οποία ελαχιστοποιούν το άθροισμα των τετραγώνων συναρτήσεων οι οποίες εκλήφθησαν ως οι απόλυτες τιμές των διαφορών των δεξιών από τα αριστερά μέλη των (16α) έως (16γ) μέσα σε κάποια όρια που κινούνται οι μεταβλητές και τα οποία πρέπει να δίνονται. Χρησιμοποιεί δε δια τούτο τον τροποποιημένο αλγόριθμο των Levenberg-Marquardt με Ιακωβιανή σχηματιζόμενη με πεπερασμένες διαφορές.

Από την σχέση (16α) έχουμε ότι $-3/2 \le \beta_i \le 3/2$ (στην χειρότερη περίπτωση που $a = 0$) και $-1 \le a \le 1$ (στην χειρότερη περίπτωση που $\beta_i = 0$ για όλα τα i). Εάν υπάρχει μιά λύση για τα β_1 έως β_8 και a τότε μιά άλλη λύση είναι ή $-\beta_1$ έως $-\beta_8$ και $-a$. Για να μην εξετάσουμε και την λύση με τα μείον (δηλαδή για να μην δουλέψει ο υπολογιστής περίπου διπλάσιο χρόνο) ξεχωρίζουμε μόνο τις λύσεις με $0 \le a \le 1$.

Η ρουτίνα DBCLSF απαιτεί μιά αρχική τιμή για τα a και β_i την οποία δίνουμε με ψευδοτυχαίους αριθμούς ομοιομόρφα κατανεμημένους μέσα στα πεδία μεταβολής των a και β_i. Οι ψευδοτυχαίοι αριθμοί δίνονται από την συνάρτηση DRNUNF της IMSL και εκλέγονται με βάση την ώρα του ηλεκτρονικού ρολογιού του υπολογιστή αφού θέσουμε τον 'σπόρο' (seed) της ακολουθίας ίσο με 0 στην ρουτίνα RNSET της IMSL. Ετσι κάθε φορά μας δίδεται μιά καινούργια λύση για τα a και β_i. Στις λύσεις που βρέθηκαν προσεγγιστικά, έγινε επεξεργασία και δίδονται στους πίνακες 1-5. Φυσικά σε κάθε λύση των πινάκων αντιστοιχεί και η αρνητική της όπως αναφέρθηκε. Ο χρόνος εύρεσης μιας λύσης είναι λίγα δευτερόλεπτα αλλά πρέπει να γίνουν πολλές δοκιμές για να ευρεθούν οι λύσεις. Η επεξεργασία που έγινε είναι η παρακάτω. Απο την μορφή των πινάκων βρίσκεται ότι οι απόλυτες τιμές των μεταβλητών είναι το πολύ 3. Μία για το a και το πολύ δύο για τα υπόλοιπα β_i. Εστω λοιπόν ότι εντοπίστηκε μια τιμή των a και β_i και έστω φ και χ οι απόλυτες τιμές για τα β_1 έως β_8 αντίστοιχα, τότε εξετάζονται ακόμα για τα β_1 έως β_8 όλοι οι συνδυασμοί $\pm\varphi$ και $\pm\chi$ για κάθε ένα από τα β_i.

Βρήκαμε λοιπόν αρκετές λύσεις του τελεστή εναλλαγής με την προσεγγιστική μορφή (15). Από αυτές θα επιλεγεί τελικά μόνο μία (στην ουσία 2 μαζί με την αρνητική της) η οποία δεν εισάγει περιορισμούς στα μετρήσιμα φυσικά μεγέθη της SU(3). Για να το κάνουμε αυτό ξαναγυρνάμε στον τελεστή ανταλλαγής του σπίν $P^{\sigma}{}_{AB}$ (στην ουσία τελεστή ανταλλαγής για την SU(2)) και βλέπουμε ότι περαιτέρω ο Dirac στο θεμελιώδες σύγγραμμά του (βλ.[2] σελ.222) θέτει:

$$\boldsymbol{\sigma}_B P^{\sigma}{}_{AB} = P^{\sigma}{}_{AB}\, \boldsymbol{\sigma}_A \qquad (17\alpha)$$

Ο τύπος (17α) χρήζει μιάς εξήγησης και μιας αποδείξεως. Θα δώσουμε πρώτα την εξήγηση. Παίρνουμε πρώτα το δεξιό μέλος και το εφαρμόζουμε έστω μόνο για την 1 συνιστώσα του τελεστή $\boldsymbol{\sigma}_A$ (ίδια ισχύουν για τις άλλες δύο συνιστώσες). Εάν επιδράσει σε μιά κυματοσυνάρτηση Ψ_{AB} των δύο σωματιδίων τότε δίνει πρώτα μιά τιμή έστω X_A ιδιοτιμή του $\sigma^1{}_A$ πάνω στο τμήμα της Ψ_{AB} που εξαρτάται από το Α σωματίδιο. Μετά εναλάσσουμε τα σωματίδια και το σωματίδιο Α βρίσκεται στην θέση του Β και το Β στο Α. Τώρα παίρνουμε το αριστερό μέλος. Εναλάσσουμε πρώτα τα σωματίδια και φέρνουμε το Α στο Β και το Β στο Α. Για να πάρουμε το αποτέλεσμα X_A είναι φανερό ότι πρέπει να επιδράσουμε στο Β σωματίδιο με τον τελεστή $\sigma^1{}_B$ πάνω στο μέρος της κυματοσυνάρτησης που εξαρτάται από το σωματίδιο Β το οποίο είναι στην ουσία το Α αφού προηγουμένως τα εναλλάξαμε. Επειδή αυτά ισχύουν γιά κάθε κυματοσυνάρτηση Ψ_{AB} και γιά κάθε τιμή X_A τότε ισχύει η ταυτότητα (17). Στην πραγματικότητα τα $\sigma^1{}_A$ και $\sigma^1{}_B$ είναι μορφές μετρησίμων φυσικών μεγεθών Q_A και Q_B τα οποία σχετίζονται με το σπιν στα χωροχρονικά σημεία Α και Β των σωματιδίων Α και Β αντίστοιχα. Ετσι βλέπουμε ότι η μορφή (1) του τελεστή ανταλλαγής του σπιν δεν εισάγει κανένα περιορισμό στα μετρήσιμα μεγέθη που σχετίζονται με το σπιν. Θα εισήγαγε περιορισμό εάν δεχόταν π.χ. σαν Q_A και Q_B μεγέθη της μορφής $\zeta_i\, \sigma_{Ai}$ και $\zeta_i\, \sigma_{Bi}$ αντίστοιχα όπου τα ζ_i δεν είναι οποιοιδήποτε αριθμοί (πραγματικοί αφού αναφερόμαστε σε φυσικά μεγέθη) αλλά συγκεκριμένοι έτσι ώστε να ισχύει:

$$Q_B P^{\sigma}{}_{AB} = P^{\sigma}{}_{AB}\, Q_A \qquad (17\beta)$$

Η απόδειξη της σχέσης (17α) θα γίνει για ένα ζεύγος $(\sigma_{Aj}, \sigma_{Bj})$ και είναι ως ακολούθως:

$\sigma_{Bj} P^{\sigma}{}_{AB} = \sigma_{Bj}\, \tfrac{1}{2}\,(1 + \sigma_{Ai}\, \sigma_{Bi}) = \tfrac{1}{2}\, \sigma_{Bj} + \tfrac{1}{2}\, \sigma_{Bj}\, \sigma_{Ai}\, \sigma_{Bi} =$

$(4) \Rightarrow = \frac{1}{2} \sigma_{Bj} + \frac{1}{2} \sigma_{Ai} \sigma_{Bj} \sigma_{Bi} =$

$(3\beta) \Rightarrow = \frac{1}{2} \sigma_{Bj} + \frac{1}{2} \sigma_{Ai} (\delta_{ij} + i\varepsilon_{ji\chi} \sigma_{B\chi}) =$

$= \frac{1}{2} \sigma_{Bj} + \frac{1}{2} \sigma_{Aj} + \frac{1}{2} i\varepsilon_{j\varphi\chi} \sigma_{A\varphi} \sigma_{B\chi} =$

$= \frac{1}{2} \sigma_{Bj} + \frac{1}{2} \sigma_{Aj} + \frac{1}{2} i\varepsilon_{\chi j\varphi} \sigma_{A\varphi} \sigma_{B\chi}$

$P^{\sigma}{}_{AB} \sigma_{Aj} = \frac{1}{2} (1 + \sigma_{Ai} \sigma_{Bi}) \sigma_{Aj} = \frac{1}{2} \sigma_{Aj} + \frac{1}{2} \sigma_{Ai} \sigma_{Bi} \sigma_{Aj} =$

$(4) \Rightarrow = \frac{1}{2} \sigma_{Aj} + \frac{1}{2} \sigma_{Ai} \sigma_{Aj} \sigma_{Bi} =$

$(3\alpha) \Rightarrow = \frac{1}{2} \sigma_{Aj} + \frac{1}{2} (\delta_{ij} + i\varepsilon_{ij\varphi} \sigma_{A\varphi}) \sigma_{Bi} =$

$= \frac{1}{2} \sigma_{Aj} + \frac{1}{2} \sigma_{Bj} + \frac{1}{2} i\varepsilon_{ij\varphi} \sigma_{A\varphi} \sigma_{Bi} =$

$= \frac{1}{2} \sigma_{Aj} + \frac{1}{2} \sigma_{Bj} + \frac{1}{2} i\varepsilon_{\chi j\varphi} \sigma_{A\varphi} \sigma_{B\chi} = \sigma_{Bj} P^{\sigma}{}_{AB}$

Στην απόδειξη χρησιμοποιήσαμε ιδιότητες κυκλικότητας του αντισυμμετρικού συμβόλου ε_{ijk} και απλές αλλαγές βωβού δείκτη. Τώρα για την περίπτωση του τελεστή της SU(3), $P^{color}{}_{AB}$ η αντίστοιχη σχέση θα είναι (θέτοντας για $Q_A = \lambda_{A\mu}$ και $Q_B = \lambda_{B\mu}$ και με συλλογιστική ανάλογη με αυτή που εξηγεί τις σχέσεις (17α) και (17β)):

$$\lambda_{B\mu} P^{color}{}_{AB} = P^{color}{}_{AB} \lambda_{A\mu} \qquad \forall \mu \in \{1,2,..,8\} \qquad (18)$$

Ετσι απαιτούμε ο τελεστής ανταλλαγής στη μορφή της σχέσης (15) να μην εισάγει κανένα περιορισμό στα φυσικά μεγέθη που σχετίζονται με την SU(3) δηλαδή να μπορούμε να μετρήσουμε οποιοδήποτε φυσικό μέγεθος της SU(3) σε δύο χωροχρονικά σημεία ασχέτως αν ανταλλάσσουμε τα σωματίδια A και B (αφού είναι αδιάκριτα άρα η Φυσική δεν αλλάζει) κατά τρόπο ανάλογο με την περίπτωση του τελεστή ανταλλαγής της SU(2). Θα δούμε ότι η φυσική απαίτηση της σχέσης (18) και η ειδική μορφή (15) του τελεστή με τους συντελεστές των πινάκων 1 – 5 εισάγουν περιορισμούς στις τιμές των συντελεστών a και β_i. Με βάση λοιπόν την σχέση (15) της μορφής του τελεστή αναπτύσσουμε το αριστερό μέλος της σχέσης (18) ως εξής:

$P^{color}{}_{AB} \lambda_{A\mu} =$

$(15) \Rightarrow = (a + \beta_q \lambda_{Aq} \lambda_{Bq}) \lambda_{A\mu} =$

$= a \lambda_{A\mu} + \beta_q \lambda_{Aq} \lambda_{Bq} \lambda_{A\mu} =$

$(12\varepsilon) \Rightarrow = a \lambda_{A\mu} + \beta_q \lambda_{Aq} \lambda_{A\mu} \lambda_{Bq} =$

$(12\zeta) \Rightarrow = a \lambda_{A\mu} + \beta_q (2/3\, \delta_{\mu q} + E_{q\mu\sigma} \lambda_{A\sigma}) \lambda_{Bq} =$

$$= a \lambda_{A\mu} + 2/3\, \beta_\mu \lambda_{B\mu} + \beta_q E_{q\mu\sigma} \lambda_{A\sigma} \lambda_{Bq} \qquad (19\alpha)$$

Με αντίστοιχο τρόπο αναλύουμε το αριστερό μέλος ως εξής:

$\lambda_{B\mu} P^{color}{}_{AB} = a \lambda_{B\mu} + 2/3\, \beta_\mu \lambda_{A\mu} + \beta_q E_{\mu q f} \lambda_{Aq} \lambda_{Bf} =$

$$= a \lambda_{B\mu} + 2/3\, \beta_\mu \lambda_{A\mu} + \beta_\sigma E_{\mu\sigma q} \lambda_{A\sigma} \lambda_{Bq} \qquad (19\beta)$$

Την τελευταία γραμμή στην σχέση (19β) την γράψαμε με επανεγγραφή των βωβάν δεικτών που αθροίζονται. Εξισώνοντας τις (19α) και (19β) λόγω της (18) έχουμε τις παρακάτω σχέσεις που πρέπει να ικανοποιούνται:

$$a = 2/3\ \beta_\mu \qquad (20\alpha)$$

$$\beta_q\ E_{q\mu\sigma} = \beta_\sigma\ E_{\mu\sigma q} \qquad (20\beta)$$

Αμέσως από την (12θ) βλέπουμε ότι $E_{q\mu\sigma} = E_{\mu\sigma q}$ αφού η μετάθεση (qμσ) προκύπτει από την (μσq) με άρτιο αριθμό μεταθέσεων (συγκεκριμένα δύο) και έτσι και τα σύμβολα $f_{q\mu\sigma}$ και $d_{q\mu\sigma}$ δεν αλλάζουν από την μετάθεση. Αυτό διότι το $f_{q\mu\sigma}$ δεν αλλάζει σε άρτιες μεταθέσεις (μόνο σε περιττές αλλάζει πρόσημο) και το $d_{q\mu\sigma}$ δεν αλλάζει σε οποιαδήποτε μετάθεση. Ετσι άν $E_{\mu\sigma q} = 0$ δεν υπάρχει πρόβλημα η (20β) ικανοποιείται. Εάν $E_{\mu\sigma q} \neq 0$ τότε $\beta_q = \beta_\sigma$ για όσα q, σ και μ ισχύει $E_{\mu\sigma q} \neq 0$. Διαλέγουμε την λύση εκείνη που ισχύουν οι (20α) και (20β) γιά όλα τα μ. Αυτή είναι μόνο μία η παρακάτω (την οποία σημειώνουμε με ζωηρά γράμματα στον Πίνακα 2):

$$a = 1/3\ ,\ \beta_q = 0.5 \text{ για κάθε } q \in \{1,2,\ldots,8\}$$

Από τι φαίνεται μπορούσαμε να βρούμε τον τελεστή ανταλλαγής από τις (20α) και (20β) μόνο με την (16α). Κάναμε όμως όλο αυτόν τον κόπο για να αποκλείσουμε άλλες πιθανές μορφές. Πρέπει να ειπωθεί τέλος ότι με κάποιες υποθέσεις (θεωρήθηκε ότι $\beta_1=\beta_2$, $\beta_4 = \beta_5$ και $\beta_6 = \beta_7$ για να μειωθεί σε λογικά επίπεδα ο χρόνος υπολογισμού – τελικά 5 ώρες) σαρώθηκε με βήμα 0.1 όλο το πεδίο μεταβολής των αγνώστων και εντοπίστηκαν τα ελάχιστα της αντικειμενικής συνάρτησης του προβλήματος ελαχιστοποίησης πράγμα το οποίο έδωσε μερικές λύσεις του πίνακα 2 απο τον οποίο προέκυψε και η τελική λύση. Στην ουσία ο υπέρογκος απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος του πλήρους προβλήματος με σάρωση (πάνω απο 260 ώρες) μας ώθησε στην λύση μέσω της ρουτίνας DBCLSF.

Πιθανόν βέβαια να υπάρχουν και άλλες μορφές του τελεστή εναλλαγής στην πιό περίπλοκη μορφή της σχέσης (11). Οι αλγεβρικοί υπολογισμοί για αυτές τις περιπτώσεις έχουν γίνει από τον γράφοντα αλλά δεν θεωρήθηκε ότι η αλγεβρική πολυπλοκότητα πρέπει να επισκιάσει τις βασικές ιδέες και έτσι οι σχέσεις δεν γράφτηκαν. Ερευνήθηκαν δύο περιπτώσεις στην μορφή της σχέσης (11). Η πρώτη με τα ρ_χ ίσα με τα μ_χ για κάθε χ (όπως αναφέρθηκε) και γενικά όχι ίσα με μηδέν και διαγώνιο τον πίνακα c_{pq} και η δεύτερη με $\rho_\chi = \mu_\chi$ και τα c_{pq} όχι απαραίτητα διαγώνια. Ερεύθησαν λύσεις, με την βοήθεια της ρουτίνας DBCLSF, και στις δύο περιπτώσεις τέτοιες που ικανοποιούν τον περιορισμό $P_{AB}^2 = 1$ αλλά δεν διερευνήθηκαν κατά πόσο ικανοποιούν τους περιορισμούς της σχέσης (18). Πάντως οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι συντελεστές για να ισχύει η σχέση (18) (αντίστοιχες των σχέσεων (20α) και (20β)) είναι τόσο περιοριστικές που κατά την γνώμη μου δεν θα ικανοποιούνται. Ετσι μάλλον δεν υπάρχουν λύσεις στις δύο περιπτώσεις της γενικής μορφής (11) χωρίς βέβαια να είμαστε και κατηγορηματικοί διά τούτο.

Ανακεφαλαιώνοντας λέμε ότι βρήκαμε μια προσεγγιστική μορφή του τελεστή ανταλλαγής για την SU(3). Είναι πεποίθηση του γράφοντος ότι τουλάχιστο στην μορφή (15) δεν υπάρχουν άλλες λύσεις των συντελεστών. Ετσι μάλλον πρέπει να διερευνηθούν εάν τυχόν υπάρχουν λύσεις σε άλλες μορφές του τελεστή γενικότερες π.χ. σχέση (11). Επίσης η ίδια εργασία πρέπει να γίνει για άλλες ομάδες Lie (π.χ. SU(5)) με εφαρμογές στην Φυσική. Η εργασία αυτή αφιερώνεται στους φίλους μου Δημήτρη Αλεξόπουλο, Ιωνα Κουμπαρέλη και Ευάγγελο Καρβούνη καθώς και στο προσωπικό του 301 Εργοστασίου Βάσεως του Ελληνικού Στρατού.

Βιβλιογραφία

[1] M. Guidry "Gauge Field Theories : An introduction with applications" Wiley Science Paperback Edition 1999.

[2] P.A.M. Dirac "The principles of Quantum Mechanics" 4^{th} edition paperback 1981 Oxfod Universty Press.

[3] Ν.Ζαφειρόπουλος "Εφαρμογές μιας βασικής σχέσης της τανυστικής άλγεβρας" Μαθηματική Επιθεώρηση 44, σελ.36-50 1995.

[4] A.O.Barut "Electrodynamics and classical theory of fields and particles" Dover Publications.

[5] Ι.Δ.Βέργαδος "Μαθηματικές μέθοδοι Φυσικής ΙΙΙ Μέρος Α" Εκδόσεις Συμεών 1991.

[6] Ι.Δ.Βέργαδος "Μαθηματικές μέθοδοι Φυσικής ΙΙΙ Μέρος Β" Εκδόσεις Συμεών 1991.