Author:

Title: Γεννήτορες τύποι κριτηρίων διαιρετότητας. Σχέση ισοτιμίας (Mod2)–ΥΠ:(a[x],δ)

Creator: HDML

Μαθηματική Επιθεώρηση, Τεύχος 58, 2002

# Γεννήτορες τύποι κριτηρίων διαιρετότητας Σχέση Ισοτιμίας (modδ) – ΥΠ: $\left(\underset{[x]}{a}, \delta\right)$

**Νικ. Δ. Ψαθάς**

Κάθε φυσικός αριθμός με (ν + 1) ψηφία γράφεται $\underset{[x]}{a} = \overline{\underset{[x]}{\alpha_0\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_\nu}}$ $= \alpha_0 x^\nu + \alpha_1 x^{\nu-1} + \alpha_2 x^{\nu-2} + \ldots + \alpha_{\nu-1} x + \alpha_\nu$ όπου x η βάση του συστήματος αρίθμησης και $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ μικρότεροι του x.

Αν x = 10 έχουμε το σε χρήση δεκαδικό σύστημα αρίθμησης και το σύμβολο [x] παραλείπεται.

Αν x = 2 έχουμε το δυαδικό σύστημα αρίθμησης που χρησιμοποιείται στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές.

Τον γεννήτορα τύπο του κριτηρίου διαιρετότητας του $\underset{[x]}{a}$ διά δ θα τον συμβολίζουμε με το σύμβολο $T(\underset{[x]}{a})$ και το κριτήριο διαιρετότητας με το σύμβολο $T_0(\underset{[x]}{a})$.

Ο γεννήτορας τύπος $T(\underset{[x]}{a})$ είναι παράσταση η οποία περιέχει ψηφία του αριθμού, τμήματα αυτού και γράμματα (παραμέτρους) που συνδέονται με τα σύμβολα των πράξεων, όπως

$T(\underset{[x]}{a}) = \alpha_\nu$, $T(\underset{[x]}{a}) = \Sigma =$ αθρ. ψηφίων του $\underset{[x]}{a}$, $T(\underset{[x]}{a}) = \underset{[x]}{\beta} =$ τμήμα των λ τελευταίων ψηφίων του $\underset{[x]}{a}$, $T(\underset{[x]}{a}) = 5\alpha_\nu + \overline{\underset{[x]}{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_{\nu-1}}}$,

$T(\frac{a}{[x]}) = u\alpha_\nu + \lambda\,\overline{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{\nu-1}}_{[x]}$, $T(\frac{a}{[x]}) = u\,\overline{\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu}_{[x]} + \lambda\,\overline{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{\nu-2}}_{[x]}$,

$T(\frac{a}{[x]}) = u\,\overline{\alpha_{\nu-2}\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu}_{[x]} + \lambda\,\overline{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{\nu-3}}_{[x]}$.

Οι τρεις τελευταίοι είναι παραμετρικοί με παραμέτρους u, λ (προσδιοριστέους) τα δε κριτήρια διαιρετότητας που παράγονται από αυτούς είναι αντίστοιχα

$T_0(\frac{a}{[x]}) = u_0\alpha\nu + \lambda_0\,\overline{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{\nu-1}}_{[x]}$, $T_0(\frac{a}{[x]}) = u_0\,\overline{\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu}_{[x]} + \lambda_0\,\overline{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{\nu-2}}_{[x]}$,

$T_0(\frac{a}{[x]}) = u_0\,\overline{\alpha_{\nu-2}\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu}_{[x]} + \lambda_0\,\overline{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{\nu-3}}_{[x]}$ όπου $(u_0, \lambda_0)$ είναι μία λύση των Διοφαντικών εξισώσεων $ux - \lambda =$ πολδ, $ux^2 - \lambda =$ πολδ, $ux^3 - \lambda =$ πολδ.

Στα επόμενα, για λόγους συντομογραφίας θα γράφουμε: αντί κριτήριο διαιρετότητας, «Κ.Δ.», αντί σχέση ισοδυναμίας, «Σ.Ι.» και αντί Διοφαντική εξίσωση, «Δ.ε.»

**Σημείωση:** Η σχέση ισοτιμίας του $\frac{a}{[x]}$ & $T_0(\frac{a}{[x]})$ (mod δ) σημαίνει ότι οι αριθμοί $\frac{a}{[x]}$ και $T_0(\frac{a}{[x]})$ είναι ισοϋπόλοιποι όταν διαιρεθούν δια δ ήτοι υπ: $\left(\frac{a}{[x]}, \delta\right) =$ υπ: $\left(T_0(\frac{a}{[x]}), \delta\right)$.

**Α΄ Εύρεση των «Κ.Δ», «Σ.Ι.», υπ: $\left(\frac{a}{[x]}, \delta\right)$**

**<u>Με τύπους μη παραμετρικούς</u> (Α' μορφής)**

**1. Με τύπο $T(\frac{a}{[x]}) = \alpha_\nu$**

**Θ1. «Αν δ | x τότε δ | $\frac{a}{[x]}$ ° δ | $\alpha_\nu$, $\frac{a}{[x]} = T\left(\frac{a}{[x]}\right)$ (modδ) ή υπ: $(\frac{a}{[x]}, \delta) =$**

**υπ: (Τ($\underset{[x]}{a}$), δ)»**

Αφού δ | x ↓ x = πολ. δ, $\underset{[x]}{a} = \alpha_0 x^{\nu} + \alpha_1 x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_{\nu-1} x + \alpha_\nu$

$= (\alpha_0 x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_{\nu-1})x + \alpha_\nu = (\pi o\lambda\delta) + \alpha_\nu = \pi o\lambda\ \delta + T\left(\underset{[x]}{a}\right)$

Από την $\underset{[x]}{a} = \pi o\lambda\delta + T\left(\underset{[x]}{a}\right)$ προκύπτει $\delta \,/\, \underset{[x]}{a} \circ \delta \,/\, T\left(\underset{[x]}{a}\right)$, $\underset{[x]}{a} - T\left(\underset{[x]}{a}\right) = \pi o\lambda\delta$

$\underset{[x]}{a}$ &$T\left(\underset{[x]}{a}\right)$(mod δ) ή υπ: $\left(\underset{[x]}{a}, \delta\right) =$ υπ: $\left(T\left(\underset{[x]}{a}\right), \delta\right)$.

**Σημείωση:** Επειδή ο γεννήτορας τύπος είναι μη παραμετρικός έπεται ότι $T\left(\underset{[x]}{a}\right) = T_0\left(\underset{[x]}{a}\right) = \alpha_\nu$ .

***Ώστε «Ένας αριθμός είναι διαιρετός με ένα διαιρέτη της βάσης του συστήματος αρίθμησης τότε και μόνο όταν διαιρεί το τελευταίο ψηφίο του αριθμού»***

π.χ. Αν $\underset{[x]}{a} = \underset{[14]}{3275}$ και δ = 7. Επειδή 7 | 14 έχουμε «Κ.Δ» $T_0\left(\underset{[14]}{3275}\right) = 5$ και «Σ.Ι.» $\underset{[14]}{3275}$ & 5(mod 7) και υπ: $\left(\underset{[14]}{3275}, 7\right) =$ υπ: $(5, 7) = 5$.

**2. Αν $T\left(\underset{[x]}{a}\right) = \underset{[x]}{\beta}$, όπου $\underset{[x]}{\beta}$ το τμήμα των λ τελευταίων ψηφίων του $\underset{[x]}{a}$.**

**Θ2. «Αν δ | x τότε $\delta^\lambda \mid \underset{[x]}{a} \circ \delta^\lambda \mid \underset{[x]}{\beta}$, $\underset{[x]}{a}$ & $\underset{[x]}{\beta}$ (mod $\delta^\lambda$ ),**

**υπ:( $\underset{[x]}{a}, \delta^\lambda$ ) = υπ: ( $\underset{[x]}{\beta}, \delta^\lambda$ )».**

Αφού δ | x ↓ $\delta^\lambda \mid x^\lambda$. Αλλά $\underset{[x]}{a} = \underset{[x]}{\overline{\alpha_0\,\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_{\nu-\lambda}}}\, x^\lambda + \underset{[x]}{\overline{\alpha_{\nu-(\lambda-1)}\,\alpha_{\nu-(\lambda-2)} \ldots \alpha_\nu}}$ ή

$\underset{[x]}{a} = \overline{\alpha_0\,\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_{\nu-\lambda}}\ \pi o\lambda\ (\delta^\lambda) + \underset{[x]}{\beta}$ ή $\underset{[x]}{a} = \pi o\lambda\ (\delta^\lambda) + \underset{[x]}{\beta}$ (1)

Από την (1) προκύπτει

$\delta^{\lambda} \mid \underset{[x]}{a} \circ \delta^{\lambda} \mid \underset{[x]}{\beta}$, $\underset{[x]}{a}$ & $\underset{[x]}{\beta}$ (mod $\delta^{\lambda}$), , υπ:( $\underset{[x]}{a}$, $\delta^{\lambda}$ ) = υπ: ( $\underset{[x]}{\beta}$, $\delta^{\lambda}$).

**Σημείωση:** $T(\underset{[x]}{a}) = T_0(\underset{[x]}{\beta}) = \underset{[x]}{\beta}$

***«Ένας αριθμός είναι διαιρετός με την λ δύναμη διαιρέτη της βάσης τότε και μόνο όταν αυτή διαιρεί το τμήμα των λ τελευταίων ψηφίων του αριθμού».***

π.χ. Αν $\underset{[x]}{a} = \underset{[9]}{56312}$ και δ = 3. Θα έχουμε για διαιρέτη $\Delta = 3^3$.

«Κ.Δ.» $T_0\left(\underset{[9]}{56312}\right) = \underset{[9]}{312} = 3{,}9^2 + 1{,}9 + 2 = 254$,

«Σ.Ι.» $\underset{[9]}{56312}$ & 254(mod27) και υπ: $\left(\underset{[9]}{56312}, 27\right)$ = υπ: $(254, 27) = 11$

**3. Αν $T(\underset{[x]}{a}) = \Sigma$, όπου Σ το άθροισμα των ψηφίων του $\underset{[x]}{a}$.**

**Θ3. «Αν δ = x - 1 τότε $\delta \mid \underset{[x]}{a} \circ \delta \mid \Sigma$, $\underset{[x]}{a}$ & Σ (mod δ),**

**υπ:( $\underset{[x]}{a}$, δ) = υπ: (Σ, δ)»**

Αφού $\delta = x - 1 \downarrow x = \delta + 1 \downarrow x^{\mu} = (\delta + 1)^{\mu} = \text{πολ}\ \delta + 1\ !\ \mu \varnothing N$

$$\underset{[x]}{a} = \alpha_0 x^{\nu} + \alpha_1 x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_{\nu-1} x + \alpha_{\nu}$$

$$= \alpha_0 (\text{πολ}\ \delta + 1) + \alpha_1 (\text{πολ}\ \delta + 1) + \ldots + \alpha_{\nu-1} (\text{πολ}\ \delta + 1) + \alpha_{\nu}$$

$$= \text{πολ}\ \delta + (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu}) \ \text{ή}\ \underset{[x]}{a} = \text{πολ}\delta + \Sigma \qquad (1)$$

Από την (1) προκύπτει:

«Κ.Δ.» $\delta \mid \underset{[x]}{a} \circ \delta \mid \Sigma$, «Σ.Ι.» $\underset{[x]}{a}$ & Σ (mod δ), υπ:( $\underset{[x]}{a}$, δ) = υπ: (Σ, δ)

***«Ένας αριθμός είναι διαιρετός με τον (x-1) τότε και μόνο όταν αυτός διαιρεί το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού».***

π.χ. Αν $\underset{[x]}{a} = \underset{[15]}{\overline{2\alpha_0 3\alpha_2}}$ και δ = 14. Επειδή δ = 14 | x - 1 ισχύουν

«ΚΔ» $14 \mid = \underset{[15]}{\overline{2\alpha_0 3\alpha_2}} \circ 14 \mid 2 + \alpha_0 + 3 + \alpha_2 = 2 + 10 + 3 + 12 = 27,$

«Σ.Ι» $\underset{[15]}{\overline{2\alpha_0 3\alpha_2}}$ & 27 (mod 14) και

$$\text{υπ:}\left(\underset{[15]}{\overline{2\alpha_0 3\alpha_2}}, 14\right) = \text{υπ: } (\Sigma, 14) = \text{υπ: } (27, 14) = 13.$$

**Σημείωση:** Επειδή $14 \dagger \Sigma = 27 \downarrow 14 \dagger \underset{[15]}{\overline{2\alpha_0 3\alpha_2}}$.

$$\left(\underset{[15]}{\overline{2\alpha_0 3\alpha_2}} = 9057 = 14\ ,\ 646 + 13\right)$$

**4. Αν $T\left(\underset{[x]}{a}\right) = \Sigma$, όπου Σ το άθροισμα των 2ψήφιων τμημάτων του $\underset{[x]}{a}$ (από δεξιά)**

**Θ4. «Αν $\delta = x + 1$ τότε $\delta \mid \underset{[x]}{a} \circ \delta \mid \Sigma\ ,\ \underset{[x]}{a}$ & Σ(modδ),**

**υπ: $\left(\underset{[x]}{a}, \delta\right)$ = υπ: (Σ, δ)»**

Αφού $\delta = x + 1 \circ x = \delta - 1 \downarrow x^2 = (\delta - 1)^2 \downarrow x^2 = \text{πολ}\delta + 1$

Ο $\underset{[x]}{a} = \underset{[x]}{\overline{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\nu}}$ χωριζόμενος σε 2ψήφια τμήματα γράφεται

Αν ν = περιττός:

$$\underset{[x]}{a} = \underset{[x]}{\overline{\alpha_0 \alpha_1}}\,(x^2)^{\frac{\nu-1}{2}-1} + \underset{[x]}{\overline{\alpha_2 \alpha_3}}\,(x^2)^{\frac{\nu-1}{2}-2} + \underset{[x]}{\overline{\alpha_4 \alpha_5}}\,(x^2)^{\frac{\nu-1}{2}-3}$$

$$+ \ldots + \underset{[x]}{\overline{\alpha_{\nu-3} \alpha_{\nu-2}}}\,(x^2)^1 + \underset{[x]}{\overline{\alpha_{\nu-1} \alpha_\nu}}$$

$$= \overline{\alpha_0\alpha_1}_{[x]}\,(\pi o\lambda\delta + 1) + \overline{\alpha_2\alpha_3}_{[x]}\,(\pi o\lambda\delta + 1) + \overline{\alpha_4\alpha_5}_{[x]}\,(\pi o\lambda\delta + 1)$$

$$+ \ldots + \overline{\alpha_{\nu-3}\alpha_{\nu-2}}_{[x]}\,(\pi o\lambda\delta + 1) + \overline{\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu}_{[x]}$$

$$= \pi o\lambda\delta + \Sigma \qquad (1)$$

Αν ν = άρτιος:

$$\underset{[x]}{a} = \alpha_0\,(x^2)^{\frac{\nu}{2}} + \overline{\alpha_1\alpha_2}_{[x]}\,(x^2)^{\frac{\nu}{2}-1} + \overline{\alpha_3\alpha_4}_{[x]}\,(x^2)^{\frac{\nu}{2}-2} + \ldots + \overline{\alpha_{\nu-3}\alpha_{\nu-2}}_{[x]}\,(x^2)^1 + \overline{\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu}_{[x]}$$

$$= \pi o\lambda\delta + \Sigma \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει :

«Κ.Δ» $\delta \mid \underset{[x]}{a} \circ \delta \mid \Sigma$, «Σ.Ι» $\underset{[x]}{a}$ & $\Sigma \ (\mathrm{mod}\ \delta)$, υπ: $\left(\underset{[x]}{a}, \delta\right)$ = υπ: $(\Sigma, \delta)$.

***«Ένας αριθμός είναι διαιρετός με τον (x + 1) τότε και μόνο όταν αυτός διαιρεί το άθροισμα των 2ψηφίων τμημάτων του αριθμού».***

π.χ. Αν $\underset{[x]}{a} = \overline{208\alpha_3 5}_{[14]}$ και δ = 15. Επειδή $\delta \mid x + 1$ και

$\Sigma = 2 + \overline{08}_{[14]} + \overline{\alpha_3 5}_{[x]} = 197$ έχουμε το $T_0\left(\overline{208\alpha_3 5}_{[14]}\right) = \Sigma = 197$,

«Σ.Ι.» $\overline{208\alpha_3 5}_{[14]} = \Sigma \ (\mathrm{mod} 15)$, υπ: $\left(\overline{208\alpha_3 5}_{[14]}, 15\right)$ = υπ: $(\Sigma, 15) = 2$.

**Συμπέρασμα:** Ισχύουν για τους τύπους Α. μορφής $T(\underset{[x]}{a}) = T_0(\underset{[x]}{a})$ και $\underset{[x]}{a}$ & $T(\underset{[x]}{a})$ (mod δ).

Υπάρχουν πάρα πολλά κριτήρια διαιρετότητας ενός αριθμού $\underset{[x]}{a}$ με κάθε διαιρέτη δ, αλλά δεν είναι εύκολο να τα μαντεύσουμε.

Για να βρίσκουμε το «Κ.Δ.» $T(\underset{[x]}{a})$, τη «Σ.Ι.» $\underset{[x]}{a}$ & $T_0(\underset{[x]}{a})$ (mod δ) και το υπ: $\left(\begin{smallmatrix} a \\ [x] \end{smallmatrix}, \delta\right)$, επινόησα τους παραμετρικούς γεννήτορες τύπους κριτηρίων διαιρετότητας με τις αντίστοιχες αυτών Διοφαντικές εξισώσεις που αναφέρονται στην εισαγωγή.

**Β. Εύρεση των «Κ.Δ.», «Σ.Ι.», υπ: $\left(\begin{smallmatrix} a \\ [x] \end{smallmatrix}, \delta\right)$**

<u>Με γεννήτορες τύπους παραμετρικούς</u> **(Β. μορφής)**

**1. Με τύπο $T(\begin{smallmatrix} a \\ [x] \end{smallmatrix}) = u\alpha_\nu + \lambda\, \overline{\alpha_0\,\alpha_1\ldots\alpha_{\nu-1}}_{[x]}$**

$$\begin{smallmatrix} a \\ [x] \end{smallmatrix} = \overline{\alpha_0\,\alpha_1\ldots\alpha_\nu}_{[x]} = \overline{\alpha_0\,\alpha_1\ldots\alpha_{\nu-1}}_{[x]}\,x + \alpha_\nu \downarrow u\begin{smallmatrix} a \\ [x] \end{smallmatrix} = ux\,\overline{\alpha_0\,\alpha_1\ldots\alpha_{\nu-1}}_{[x]} + u\alpha_\nu$$

$$\downarrow u\begin{smallmatrix} a \\ [x] \end{smallmatrix} = (ux - \lambda)\,\overline{\alpha_0\,\alpha_1\ldots\alpha_{\nu-1}}_{[x]} + u\alpha_\nu + \lambda\,\overline{\alpha_0\,\alpha_1\ldots\alpha_{\nu-1}}_{[x]}$$

$$\downarrow u\begin{smallmatrix} a \\ [x] \end{smallmatrix} = (ux - \lambda)\,\overline{\alpha_0\,\alpha_1\ldots\alpha_{\nu-1}}_{[x]} + T(\begin{smallmatrix} a \\ [x] \end{smallmatrix}) \qquad (1)$$

Η (1) μας υποδεικνύει να θέσουμε $ux - \lambda =$ πολ $\delta$ με $(u, \delta) = 1$ (2)
Αν $(u_0, \lambda_0)$ είναι μία λύση της «Δ.ε» (2) , ο γεννήτορας τύπος δίδει

$$T_0(\begin{smallmatrix} a \\ [x] \end{smallmatrix}) = u_0\,\alpha_\nu + \lambda_0\,\overline{\alpha_0\,\alpha_1\ldots\alpha_{\nu-1}}_{[x]}$$

Αν $(u_0, \lambda_0) = (1, \lambda_0) = (1, x - \text{πολ}\delta) = 1, x - \kappa\delta)$, ο γεννήτορας τύπος δίδει $T_0(\begin{smallmatrix} a \\ [x] \end{smallmatrix}) = \alpha_\nu + (x - \kappa\delta)\,\overline{\alpha_0\,\alpha_1\ldots\alpha_{\nu-1}}_{[x]}$ .

Η (1) γίνεται αντίστοιχα $u_0\begin{smallmatrix} a \\ [x] \end{smallmatrix} =$ πολ $\delta + T_0(\begin{smallmatrix} a \\ [x] \end{smallmatrix})$ (α) και $\begin{smallmatrix} a \\ [x] \end{smallmatrix} = \alpha_\nu + T_0(\begin{smallmatrix} a \\ [x] \end{smallmatrix})$ (β) (3)

Επειδή $(u, \delta) = 1$ και $(1, \delta) = 1$, από τις (3) λαμβάνουμε αντίστοιχα

α) «ΚΔ» $\boxed{\delta \mid \begin{smallmatrix} a \\ [x] \end{smallmatrix} \circ \delta \mid T_0(\begin{smallmatrix} a \\ [x] \end{smallmatrix})}$, «ΣΙ» $\boxed{u\begin{smallmatrix} a \\ [x] \end{smallmatrix} \,\&\, T_0(\begin{smallmatrix} a \\ [x] \end{smallmatrix})(\text{mod } \delta)}$

όταν $(u = u_0, \delta) = 1$ και $u_0$ ? 1

β) «ΚΔ» $\boxed{\delta \mid \underset{[x]}{a} \circ \delta \mid T_0(\underset{[x]}{a})}$, «ΣΙ» $\boxed{\underset{[x]}{a} \,\&\, T_0(\underset{[x]}{a})(\text{mod } \delta)}$

όταν $\boxed{u_0 = 1}$ και υπ: $\left(\underset{[x]}{a}, \delta\right) =$ υπ: $\left(T_0\left(\underset{[x]}{a}\right), \delta\right)$.

π.χ. Να βρεθεί ένα «Κ.Δ.» του a δια 13, όταν $a = \overline{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$.

Επειδή $x = 10$, $\delta = 13$ η αντίστοιχη του τύπου «Δ.ε» είναι $u, 10 - \lambda =$ πολ 13 με $(u, \delta) = 1$

Μία λύση αυτής είναι $(u_0, \lambda_0) = (4, 1)$. Επομένως

$$\boxed{T_0(a) = 4\alpha_\nu + 1\,, \overline{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{\nu-1}}}$$

Δια $\alpha = 25317$ έχουμε $T_0(25317) = 4{,}7 + 2531 = 2559 = \tau_1$ 1° βήμα

Επειδή ο αριθμός $\tau_1 = 2559$ είναι μεγάλος, εφαρμόζουμε το «Κ.Δ» δια 2ης 3η κ.λπ. φορά έως ότου βρούμε αριθμό μικρό ώστε να διαπιστώνουμε αν αυτός διαιρείται.

$T_0(\tau_1) = T_0(2559) = 4{,}9 + 255 = 291 = \tau_2$ 2° βήμα

$T_0(\tau_2) = T_0(291) = 4{,}1 + 29 = 33 = \tau_3$ 3° βήμα

Επειδή $13 \dagger 33 \downarrow 13 \dagger 25317$

**Σημείωση:** Όταν ο αριθμός a δεν είναι διαιρετός δια δ (όπως στο παράδειγμα) η «Σ.Ι» ισχύει μόνο για το 1° βήμα: Έτσι 4,25317 & 2559 (mod13)

## 2. Με τύπο $T(\underset{[x]}{a}) = u\,\underset{[x]}{\overline{\alpha_{\nu-1}\,\alpha_\nu}} + \lambda\,\underset{[x]}{\overline{\alpha_0\,\alpha_1 \ldots \alpha_{\nu-2}}}$

$$\underset{[x]}{a} = \underset{[x]}{\overline{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_\nu}} = \underset{[x]}{\overline{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{\nu-2}}}\,, x^2 + \underset{[x]}{\overline{\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu}} \downarrow u\,,\underset{[x]}{a} = ux^2\,\underset{[x]}{\overline{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{\nu-2}}} + u\,\underset{[x]}{\overline{\alpha_{\nu-1}\ldots\alpha_\nu}} \downarrow$$

$$u,\underset{[x]}{a} = (ux^2 - \lambda)\,\underset{[x]}{\overline{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{\nu-2}}} + u\,\underset{[x]}{\overline{\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu}} + \lambda\,\underset{[x]}{\overline{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{\nu-2}}} \downarrow$$

$$u\underset{[x]}{a} = (ux^2 - \lambda)\underset{[x]}{\overline{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{\nu-2}}} + T(\underset{[x]}{a}) \qquad (1)$$

Η (1) υποδεικνύει να θέσουμε $ux^2 - \lambda = \text{πολ}\ \delta$ με $(u, \delta) = 1$ (2)
Αν $(u_0, \lambda_0)$ είναι μία λύση της «Δ.ε» (2), ο γεννήτορας τύπος δίδει:

$$T_0(\underset{[x]}{a}) = u_0\underset{[x]}{\overline{\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu}} + \lambda_0\underset{[x]}{\overline{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{\nu-2}}}$$

Αν $(u_0, \lambda_0) = (1, \lambda_0) = (1, x^2 - \text{πολ}\delta)$, ο γεννήτορας τύπος δίδει:

$$T_0(\underset{[x]}{a}) = \underset{[x]}{\overline{\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu}} + (x^2 - \text{πολ}\delta)\underset{[x]}{\overline{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{\nu-2}}}$$

Η (1) γίνεται αντίστοιχα: $u_0,\underset{[x]}{a} = \text{πολ}\ \delta + T_0(\underset{[x]}{a})$ (α)

και $\underset{[x]}{a} = \text{πολ}\delta + T_0(\underset{[x]}{a})$ (β) (3)

Επειδή $(u, \delta) = 1$ και $(1, \delta) = 1$, από τις (α) και (β) της (3) λαμβάνουμε αντίστοιχα:

α) «Κ.Δ» $\boxed{\delta \mid \underset{[x]}{a} \circ \delta \mid T_0(\underset{[x]}{a})}$, «ΣΙ» $\boxed{u\underset{[x]}{a}\ \&\ T_0(\underset{[x]}{a}) \pmod{\delta}}$

όταν $(u = u_0, \delta) = 1$ και $u_0$ ?!

β) «Κ.Δ» $\boxed{\delta \mid \underset{[x]}{a} \circ \delta \mid T_0(\underset{[x]}{a})}$, «ΣΙ» $\boxed{\underset{[x]}{a}\ \&\ T_0(\underset{[x]}{a}) \pmod{\delta}}$

όταν $u = u_0 = 1$ και υπ: $\left(\underset{[x]}{a}, \delta\right)$ = υπ: $\left(T_0\underset{[x]}{a}, \delta\right)$.

**Παράδειγμα 1.**
Να βρεθεί ένα «Κ.Δ» του a δια 7, η «Σ.Ι» και υπ: (α, 7) όταν α = 8325.
Η αντίστοιχη του τύπου «Δ.ε» είναι: $u{,}10^2 - \lambda = \text{πολ}7$ με $(u, 7) = 1$.
Αυτή έχει λύση την $(u_0, \lambda_0) = (1, 2)$. Επειδή $u_0 = 1$ θα έχουμε

$T_0(a) = \overline{\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu} + 2\,\overline{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{\nu-2}}$, a = $T_0$(a)(mod 7), υπ: (a, 7) = υπ: ($T_0$(a), 7)

και $T_0$(8325) = 25 + 2,83 = 191, 8325 & 191(mod 7),
υπ: (8325, 7) = υπ: (191, 7) = 2

***Ώστε: «Ένας αριθμός του 10-δικού συστήματος αρίθμησης, είναι διαιρετός με τον 7 τότε και μόνο όταν ο 7 διαιρεί το άθροισμα του τελευταίου 2ψηφίου τμήματος του αριθμού και του 2πλασίου γινομένου των εκατοντάδων του αριθμού».***

**Παράδειγμα 2**

Να βρεθεί ένα «Κ.Δ» του $\underset{[5]}{a} = \underset{[5]}{240132}$ δια του 7, η «Σ.Ι» και το

υπ: $\left(\underset{[5]}{a}, 7\right)$.

Η αντίστοιχη του γεννήτορα τύπου «Δ.ε» είναι $u{,}5^2 - \lambda = \pi o\lambda 7$ με $(u, 7) = 1$ η οποία έχει τη λύση $(u_0, \lambda_0) = (1, 4)$.

Έτσι έχουμε $T_0\left(\underset{[5]}{240132}\right) = \underset{[5]}{32} + 4{,}\ \underset{[5]}{2401} = \underset{[5]}{32} + \underset{[5]}{21104} = \underset{[5]}{21141}$

Επειδή $u_0 = 1$, «Σ.Ι» (mod7) είναι $\underset{[5]}{240132}$ & $\underset{[5]}{21141}$ και

υπ: $\left(\underset{[5]}{a}, 7\right) =$ υπ: $\left(\underset{[5]}{21141}, 7\right) = 0$.

3. **Με τύπο $T\left(\underset{[x]}{a}\right) = u\, \underset{[x]}{\overline{\alpha_{\nu-2}\,\alpha_{\nu-1}\,\alpha_\nu}} + \lambda\, \underset{[x]}{\overline{\alpha_0\,\alpha_1 \ldots \alpha_{\nu-3}}}$**

$$\underset{[x]}{a} = \underset{[x]}{\overline{\alpha_0\,\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}} = \underset{[x]}{\overline{\alpha_0\,\alpha_1 \ldots \alpha_{\nu-3}}}\; x^3 + \underset{[x]}{\overline{\alpha_{\nu-2}\,\alpha_{\nu-1}\,\alpha_\nu}} \downarrow u\, \underset{[x]}{a} = ux^3{,}\ \underset{[x]}{\overline{\alpha_0\,\alpha_1 \ldots \alpha_{\nu-3}}} +$$

$$u\, \underset{[x]}{\overline{\alpha_{\nu-2}\,\alpha_{\nu-1}\,\alpha_\nu}} \downarrow$$

$$u\underset{[x]}{a} = (ux^3 - \lambda)\, \underset{[x]}{\overline{\alpha_0\,\alpha_1 \ldots \alpha_{\nu-3}}} + u\left(\underset{[x]}{\overline{\alpha_{\nu-2}\,\alpha_{\nu-1}\,\alpha_\nu}} + \lambda\, \underset{[x]}{\overline{\alpha_0\,\alpha_1 \ldots \alpha_{\nu-3}}}\right) \downarrow$$

$$u\underset{[x]}{a} = (ux^3 - \lambda)\, \underset{[x]}{\overline{\alpha_0\,\alpha_1 \ldots \alpha_{\nu-3}}} + T\left(\underset{[x]}{a}\right) \qquad (1)$$

Θέτουμε $ux^3 - \lambda = \pi o\lambda\ \delta$ με $(u, \delta) = 1$ (2)

Αν $(u_0, \lambda_0)$ είναι μία λύση της «Δ.ε» (2), τότε

$$T_0(\underset{[x]}{a}) = u_0\, \underset{[x]}{\overline{\alpha_{\nu-2}\, \alpha_{\nu-1}\, \alpha_\nu}} + \lambda_0\, \underset{[x]}{\overline{\alpha_0\, \alpha_1 \ldots \alpha_{\nu-3}}}$$

Αν $(u_0, \lambda_0) = (1, \lambda_0) = 1, x^3$ - πολδ) τότε

$$T_0(\underset{[x]}{a}) = \underset{[x]}{\overline{\alpha_{\nu-2}\, \alpha_{\nu-1}\, \alpha_\nu}} + (x^3 - \text{πολδ})\, \underset{[x]}{\overline{\alpha_0\, \alpha_1 \ldots \alpha_{\nu-3}}}$$

Η (1) γίνεται $u_0\, \underset{[x]}{a} = \text{πολ}\ \delta + T_0(\underset{[x]}{a})$ αν $u_0$ ? 1

και $\underset{[x]}{a} = \text{πολ}\ \delta + T_0(\underset{[x]}{a})$ αν $u_0 = 1$ (3)

Επειδή $(u_0, \delta) = 1$ από τις (3) λαμβάνουμε:

α) Αν $u_0$ ? 1: «Κ.Δ» $\boxed{\delta \mid \underset{[x]}{a} \circ \delta \mid T_0(\underset{[x]}{a})}$ , «Σ.Ι» $\boxed{u_{\prime}\underset{[x]}{a}\ \&\ T_0(\underset{[x]}{a})\ (\text{mod}\ \delta)}$

β) Αν $u_0 = 1$: «Κ.Δ» $\boxed{\delta \mid \underset{[x]}{a} \circ \delta \mid T_0(\underset{[x]}{a})}$ , «Σ.Ι» $\boxed{u_{\prime}\underset{[x]}{a}\ \&\ T_0(\underset{[x]}{a})\ (\text{mod}\ \delta)}$

και υπ: $\left(\underset{[x]}{a}, \delta\right) =$ υπ: $\left(T_0\, \underset{[x]}{a}, \delta\right)$

**Παράδειγμα**

Να βρεθεί το «Κ.Δ» δια 17 στο 10-δικό σύστημα και το υπ: (90451, 17).

Η αντίστοιχη του τύπου «Δ.ε» είναι $u, x^3 - \lambda = \text{πολ}\ \delta$ με $(u, \delta) = 1$.

Δια $x = 10$, $\delta = 17$ γίνεται $u, 10^3 - \lambda = \text{πολ}\ 17$.

Επειδή ζητείται το υπ: $(a, \delta)$, θα βρούμε τη λύση $(u_0, \lambda_0) = (1, \lambda_0)$. Αυτή είναι (1, 14).

$T_0(a) = 1,\overline{\alpha_{\nu-2}\, \alpha_{\nu-1}\, \alpha_\nu} + 14,\overline{\alpha_0\, \alpha_1 \ldots \alpha_{\nu-3}}$ ή $\boxed{T_0(a) = \overline{\alpha_{\nu-2}\, \alpha_{\nu-1}\, \alpha_\nu} + 14,\overline{\alpha_0\, \alpha_1 \ldots \alpha_{\nu-3}}}$

Επειδή «ΣΙ» είναι $a\ \&\ T_0(a)(\text{mod}\ \delta)$ όταν $u_0 = 1$ θα έχουμε υπ: $(a, \delta) =$ υπ: $(T_0(a), \delta)$.

Δια $a = 90451$ $\delta = 17$ και $(u_0, \lambda_0) = (1, 14)$ έχουμε $T_0(a) = 451 + 14{,}90 = 451 + 1260 = 1711$. Επειδή 17 † 1711 ↓ 17 † 90451 έχουμε υπ: (90451, 17) = υπ: (1711, 17) = 11.

**Συμπεράσματα**

**1°** Η εύρεση των «ΚΔ» ανάγεται στην επίλυση των Διοφαντικών εξισώσεων α΄ βαθμού $ux - \lambda$ = πολδ, $ux^2 - \lambda$ = πολδ, $ux^3 - \lambda$ = πολδ (με αγνώστους $u$, $\lambda$)

**2°** Επειδή οι εξισώσεις έχουν άπειρες λύσεις και τα «ΚΔ» του $\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{[x]}$ δια δ είναι άπειρα.

Από αυτά επιλέγουμε το απλούστερο κατά περίπτωση.

**3°** Οι γεννήτορες παραμετρικοί τύποι, μετά τον προσδιορισμό των παραμέτρων, δίδουν «Κ.Δ» της Α΄ μορφής (χωρίς παράμετρο).

**4°** Η ισοτιμία $\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{[x]}$ & $T_0(\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{[x]})$ αντιστοιχεί στη λύση $(u_0, \lambda_0) = (1, \lambda_0)$, της αντίστοιχης του τύπου «Δ.ε»

**5°** Ο γενικός τύπος του «Κ.Δ» φανερώνει αφ' ενός μεν τη μορφή του $T(\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{[x]})$, αφ' ετέρου δε τη λύση $(u_0, \lambda_0)$ της αντίστοιχης «Δ.ε» που πήραμε για την εύρεσή του.

| Γεννήτορες Τύποι | Διοφαντικές Εξισώσεις | Γενικοί τύποι «Κ.Δ» | «Σ.Ι» (mod δ) | |
|---|---|---|---|---|
| | | | $u_0$ ? 0 | $u_0 = 1$, $\delta \mid \genfrac{}{}{0pt}{}{a}{[x]}$ |
| $T(\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{[x]}) = u\alpha_\nu +$ $\lambda \genfrac{}{}{0pt}{}{\overline{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{\nu-1}}}{[x]}$ | $ux - \lambda$ = πολδ | $T_0(\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{[x]}) = u_0\alpha_\nu + \lambda \genfrac{}{}{0pt}{}{\overline{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{\nu-1}}}{[x]}$ | $u\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{[x]}$ & $T_0(\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{[x]})$ | $\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{[x]}$ & $T_0(\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{[x]})$ |
| $T(\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{[x]}) = u \genfrac{}{}{0pt}{}{\overline{\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu}}{[x]} +$ $\lambda \genfrac{}{}{0pt}{}{\overline{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{\nu-1}}}{[x]}$ | $ux^2 - \lambda$ = πολδ | $T_0(\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{[x]}) = u_0 \genfrac{}{}{0pt}{}{\overline{\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu}}{[x]} +$ $\lambda_0 \genfrac{}{}{0pt}{}{\overline{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{\nu-1}}}{[x]}$ | » | » |
| $T(\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{[x]}) = u \genfrac{}{}{0pt}{}{\overline{\alpha_{\nu-2}\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu}}{[x]}$ | $ux^3 - \lambda$ = πολδ | $T_0(\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{[x]}) = u_0 \genfrac{}{}{0pt}{}{\overline{\alpha_{\nu-2}\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu}}{[x]}$ + | » | » |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $+\lambda \underset{[x]}{\overline{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{\nu-3}}}$ | | $\lambda_0 \underset{[x]}{\overline{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{\nu-3}}}$ | | |
| Αν $u_0 = 1$ ή $\delta \mid \underset{[x]}{a}$ τότε υπ: $\left(\underset{[x]}{a}, \delta\right) =$ υπ: $\left(T_0(\underset{[x]}{a}), \delta\right)$ | | | | |

## Ειδικές σχέσεις ισοτιμίας (mod δ)

Αν $\underset{[x]}{a} = \underset{[x]}{\overline{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_\nu}}$ και $\underset{[x]}{\beta} = \underset{[x]}{\overline{\beta_0 \beta_1 \ldots \beta_\nu}}$ με «Κ.Δ» $T_0(\underset{[x]}{a})$, $T_0'(\underset{[x]}{\beta})$ τότε:

1. Αν $\delta \mid \underset{[x]}{a}$ και $\delta \mid \underset{[x]}{\beta}$, $\downarrow \underset{[x]}{a} + \underset{[x]}{\beta} \,\&\, T_0(\underset{[x]}{a}) + T_0'(\underset{[x]}{\beta})$

   και $\underset{[x]}{a} \cdot \underset{[x]}{\beta} \,\&\, T_0(\underset{[x]}{a}), T_0'(\underset{[x]}{\beta})$ (mod δ)

2. Αν $\delta \mid \underset{[x]}{a}$ και $\delta \dagger \underset{[x]}{\beta}$, $\downarrow \underset{[x]}{a} + u_0' \underset{[x]}{\beta} \,\&\, T_0(\underset{[x]}{a}) + T_0'(\underset{[x]}{\beta})$

   και $u_0' \underset{[x]}{a}\underset{[x]}{\beta} \,\&\, T_0(\underset{[x]}{a}), T_0'(\underset{[x]}{\beta})$(mod δ)

3. Αν $\delta \dagger \underset{[x]}{a}$ και $\delta \dagger \underset{[x]}{\beta}$, $\downarrow u_0 \underset{[x]}{a} + u_0' \underset{[x]}{\beta} \,\&\, T_0(\underset{[x]}{a}) + T_0'(\underset{[x]}{\beta})$

   και $u_0 u_0' \underset{[x]}{a}\underset{[x]}{\beta} \,\&\, T_0(\underset{[x]}{a}), T_0'(\underset{[x]}{\beta})$ (mod δ)

**Απόδειξη της 2**

Επειδή $\delta \mid \underset{[x]}{a}$ και $\delta \dagger \underset{[x]}{\beta} \downarrow \underset{[x]}{a} \,\&\, T_0(\underset{[x]}{a})$ και $u_0' \underset{[x]}{\beta} \,\&\, T_0'(\underset{[x]}{\beta})$ (mod δ)

Με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά μέλη λαμβάνουμε:
$\underset{[x]}{a} + u_0' \underset{[x]}{\beta} \,\&\, T_0(\underset{[x]}{a}) + T_0'(\underset{[x]}{\beta})$ και $u_0' \underset{[x]}{a}\underset{[x]}{\beta} \,\&\, T_0(\underset{[x]}{a}), T_0'(\underset{[x]}{\beta})$(mod δ)

4. Αν $\delta \dagger \underset{[x]}{a}$ τότε $u_0^{\mu} \underset{[x]}{a} \,\&\, \underset{[x]}{\tau_\mu}$(mod δ), όταν η διαπίστωση της διαιρετότητας του $\underset{[x]}{a} : \delta$, γίνεται κατά $\mu^{\eta}$ εφαρμογή του «Κ.Δ»

Έστωσαν οι μ διαδοχικές εφαρμογές του «Κ.Δ»

$$T_0\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{[x]}\right) = \genfrac{}{}{0pt}{}{\tau_1}{[x]},\ T_0\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{\tau_1}{[x]}\right) = \genfrac{}{}{0pt}{}{\tau_2}{[x]},\ \ldots,\ T_0\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{\tau_{\mu-1}}{[x]}\right) = \genfrac{}{}{0pt}{}{\tau_\mu}{[x]},\ T_0\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{\tau_\mu}{[x]}\right)$$

Επειδή $\delta \dagger \genfrac{}{}{0pt}{}{a}{[x]} \downarrow u_0 \genfrac{}{}{0pt}{}{a}{[x]} \,\&\, \genfrac{}{}{0pt}{}{\tau_1}{[x]} \pmod{\delta}$ και $\delta \dagger \genfrac{}{}{0pt}{}{\tau_1}{[x]}$ (1) φορά

Επειδή $\delta \dagger \genfrac{}{}{0pt}{}{\tau_1}{[x]} \downarrow u_0 \genfrac{}{}{0pt}{}{\tau_1}{[x]} \,\&\, \genfrac{}{}{0pt}{}{\tau_2}{[x]} \pmod{\delta}$ και $\delta \dagger \genfrac{}{}{0pt}{}{\tau_2}{[x]}$ (2) φορά

Επειδή $\delta \dagger \genfrac{}{}{0pt}{}{\tau_2}{[x]} \downarrow u_0 \genfrac{}{}{0pt}{}{\tau_2}{[x]} \,\&\, \genfrac{}{}{0pt}{}{\tau_3}{[x]} \pmod{\delta}$ και $\delta \dagger \genfrac{}{}{0pt}{}{\tau_3}{[x]}$ (3) φορά

... ... ...

Επειδή $\delta \dagger \genfrac{}{}{0pt}{}{\tau_{\mu-1}}{[x]} \downarrow u_0 \genfrac{}{}{0pt}{}{\tau_{\mu-1}}{[x]} \,\&\, \genfrac{}{}{0pt}{}{\tau_\mu}{[x]} \pmod{\delta}$ και $\delta \dagger \genfrac{}{}{0pt}{}{\tau_\mu}{[x]}$ (μ) φορά

---

$$u_0^{\mu} \genfrac{}{}{0pt}{}{a}{[x]}, \genfrac{}{}{0pt}{}{\tau_1}{[x]}, \genfrac{}{}{0pt}{}{\tau_2}{[x]}, \genfrac{}{}{0pt}{}{\tau_3}{[x]}, \ldots, \genfrac{}{}{0pt}{}{\tau_{\mu-1}}{[x]} \,\&\, \genfrac{}{}{0pt}{}{\tau_1}{[x]}, \genfrac{}{}{0pt}{}{\tau_2}{[x]}, \genfrac{}{}{0pt}{}{\tau_3}{[x]}, \ldots, \genfrac{}{}{0pt}{}{\tau_\mu}{[x]} \downarrow \boxed{u_0^{\mu} \genfrac{}{}{0pt}{}{a}{[x]} \,\&\, \genfrac{}{}{0pt}{}{\tau_\mu}{[x]} \pmod{\delta}}$$

**Σημείωση**

Αν $\delta \mid \genfrac{}{}{0pt}{}{a}{[x]}$ τότε $\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{[x]} \,\&\, \genfrac{}{}{0pt}{}{\tau_\mu}{[x]} \pmod{\delta}$ ! μ.