Authors: Γεώργιος Ωραιόπουλος, Κουρκουρής Ν., Θ. Καραμάνου

Title: Ά Τάξη Γυμνασίου

Abstract: Άλγεβρα, ασκήσεις, Γεωμετρία, λυμένες ασκήσεις από τα προηγούμενα τεύχη.

Creator: HDML

ΓΙΑ ΤΗΝ Α' ΤΑΞΗ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

1. Δίνονται τὰ σύνολα:

$$A=\{3,\ 4,\ 5\},\ B=\{4,\ 5,\ 7\}$$

καὶ τὸ βασικὸ σύνολο: $U=\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7\}$.

Νὰ βρεθεῖ: α) $A\cap B$, A', B', β) $(A'\cup B')'$. γ) Ποιὰ ἀπὸ τὶς σχέσεις $A\in U$, $A\subseteq U$, $A\subset U$ εἶναι ψευδής;

Λύση. α) $A\cap B=\{3,\ 4,\ 5\}\cap\{4,\ 5,\ 7\}=\{4,\ 5\}$,

$A'=\{3,\ 4,\ 5\}'=\{1,\ 7\}$, $B'=\{4,\ 5,\ 7\}'=\{1,\ 3\}$.

β) $A'\cup B'=\{1,\ 7\}\cup\{1,\ 3\}=\{1,\ 3,\ 7\}\ \Rightarrow$

$(A'\cup B')'=\{1,\ 3,\ 7\}'=\{4,\ 5\}$.

γ) Ψευδὴς εἶναι μόνο ἡ σχέση $A\in U$ διότι τὸ $\in$ δηλ. το «ἀνήκει» συνδέει στοιχεῖο μὲ σύνολο καὶ ὄχι σύνολο μὲ σύνολο, ἐκτὸς ἂν τὸ πρῶτο σύνολο A ἦταν στοιχεῖο τοῦ U.

2. Νὰ βρεῖτε μὲ δυὸ τρόπους τὰ ἐξαγόμενα:

α) $70-(30-5)$, β) $80:(10\cdot 2)$

Λύση. α) 1ος τρόπος χωρὶς ἰδιότητα:

$$70-(30-5)=70-25=45.$$

2ος τρόπος μὲ τὴν ἰδιότητα:

$$\alpha-(\beta-\gamma)=(\alpha-\beta)+\gamma.$$

Εἶναι: $70-(30-5)=(70-30)+5=40+5=45.$

β) 1ος τρόπος χωρὶς ἰδιότητα:

$$80:(10\cdot 2)=80:20=4.$$

2ος τρόπος μὲ τὴν ἰδιότητα:

$$\alpha:(\beta\cdot\gamma)=(\alpha:\beta):\gamma.$$

Εἶναι: $80:(10\cdot 2)=(80:10):2=8:2=4.$

3. Νὰ λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $8(x+2)+7(x-1)=159$

β) $3\frac{1}{2}-x=1\frac{1}{3}$

γ) $\frac{3}{3}:x=7$

δ) $3x=2(x+1)+x.$

Λύση. α) $8(x+2)+7(x-1)=159\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8x+8\cdot 2+7x-7\cdot 1=159\Leftrightarrow 8x+16+7x-7=159$

$\Leftrightarrow 8x+7x+16-7=159\Leftrightarrow 15x+9=159$

$\Leftrightarrow 15x=159-9\Leftrightarrow 15x=150$

$\Leftrightarrow\ x=150:15\Leftrightarrow x=10.$

β) $3\frac{1}{2}-x=1\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=3\frac{1}{2}-1\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow x=\frac{7}{2}-\frac{4}{3}\Leftrightarrow x=\frac{21}{6}-\frac{8}{6}$

$\Leftrightarrow x=\frac{13}{6}\Leftrightarrow x=2\frac{1}{6}.$

γ) $\frac{3}{4}:x=7\Leftrightarrow x=\frac{3}{4}:7\Leftrightarrow x=\frac{3}{4}:\frac{7}{1}$

$\Leftrightarrow x=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}\Leftrightarrow x=\frac{3}{28}.$

δ) $3x=2(x+1)+x\Leftrightarrow 3x=2x+2+x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x=3x+2\Leftrightarrow 3x-3x=2$

$\Leftrightarrow 0x=2$ ἐξίσωση ἀδύνατη.

4. Ἀφοῦ ἀναλυθοῦν οἱ ἀριθμοὶ $A=576$, $B=240$ σὲ γινόμενο πρώτων παραγόντων.

α) Νὰ βρεθεῖ Μ.Κ.Δ καὶ Ε.Κ.Π.

β) Νὰ ἐπαληθευτεῖ $A\times B=$ Μ.Κ.Δ × Ε.Κ.Π.

γ) Νὰ ὑπολογιστεῖ $(A^3\cdot B)^3:(A^2\cdot B)^2$.

Λύση. α) Εἶναι $A=2^6\cdot 3^2$, $B=2^4\cdot 3\cdot 5$.

Εἶναι Μ.Κ.Δ $=2^4\cdot 3$ (μόνον οἱ κοινοὶ παράγοντες μὲ τὸν μικρότερο ἐκθέτη) καὶ Ε.Κ.Π $=2^6\cdot 3^2\cdot 5$ (ὅλοι οἱ παράγοντες μὲ τὸν μεγαλύτερο ἐκθέτη).

β) Εἶναι $A\times B=2^6\cdot 3^2\cdot 2^4\cdot 3\cdot 5=2^6\cdot 2^4\cdot 3^2\cdot 3^1\cdot 5=$

$=2^{10}\cdot 3^3\cdot 5.$

Εἶναι Μ.Κ.Δ × Ε.Κ.Π $=2^4\cdot 3\cdot 2^6\cdot 3^2\cdot 5=$

$=2^4\cdot 2^6\cdot 3^1\cdot 3^2\cdot 5=2^{10}\cdot 3^3\cdot 5.$

Ἄρα $A\times B=$ Μ.Κ.Δ × Ε.Κ.Π.

γ) Εἶναι $(A^3\cdot B)^3:(A^2\cdot B)^2=[(A^3)^3\cdot B^3]:[(A^2)^2\cdot B^2]$

$=(A^9\cdot B^3):(A^4\cdot B^2)=(A^9:A^4)(B^3:B^2)=A^{9-4}\cdot B^{3-2}$

$=A^5\cdot B^1=A^5\cdot B=(2^6\cdot 3^2)^5(2^4\cdot 3\cdot 5)$

$=(2^6)^5(3^2)^5(2^4\cdot 3\cdot 5)=2^{30}\cdot 3^{10}\cdot 2^4\cdot 3\cdot 5$

$=2^{30}\cdot 2^4\cdot 3^{10}\cdot 3^1\cdot 5=2^{34}\cdot 3^{11}\cdot 5.$

5. Νὰ συγκριθοῦν μὲ δυὸ τρόπους τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{10}$.

Λύση. 1ος τρόπος. Κάνω τὰ κλάσματα ὁμώνυμα Ε.Κ.Π$(4,\ 5,\ 10)=20$. Εἶναι:

$$\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5},\ \frac{2\cdot 4}{5\cdot 4},\ \frac{7\cdot 2}{10\cdot 2}\ \text{ἢ}\ \frac{15}{20},\ \frac{8}{20},\ \frac{14}{20}.$$

Εἶναι: $\frac{8}{20} < \frac{14}{20} < \frac{15}{20} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < \frac{7}{10} < \frac{3}{4}$.

2ος τρόπος. Συγκρίνω τὰ κλάσματα ἀνὰ δυό:

Εἶναι $3\cdot5>4\cdot2 \Leftrightarrow \frac{3}{4} > \frac{2}{5}$.

Εἶναι $3\cdot10>4\cdot7 \Leftrightarrow \frac{3}{4} > \frac{7}{10}$.

Εἶναι $2\cdot10<5\cdot7 \Leftrightarrow \frac{2}{5} < \frac{7}{10}$.

Ἄρα: $\frac{2}{5} < \frac{9}{10} < \frac{3}{4}$.

6. Νὰ βρεθεῖ μὲ δυὸ τρόπους τὸ ἐξαγόμενο:

$$\left(3\frac{2}{5}-1\frac{1}{2}\right):2\frac{1}{3}.$$

Λύση. 1ος τρόπος χωρὶς ἰδιότητα:

$$\left(3\frac{2}{5}-1\frac{1}{2}\right):2\frac{1}{3}=\left(\frac{17}{5}-\frac{3}{2}\right):\frac{7}{3}=$$

$$=\left(\frac{34}{10}-\frac{15}{10}\right):\frac{7}{3}=\frac{19}{10}:\frac{7}{3}=$$

$$=\frac{19}{10}\cdot\frac{3}{7}=\frac{57}{70}.$$

2ος τρόπος μὲ τὴν ἰδιότητα $(\alpha-\beta):\gamma=\alpha:\gamma-\beta:\gamma$

$$\left(3\frac{2}{5}-1\frac{1}{2}\right):2\frac{1}{3}=3\frac{2}{5}:2\frac{1}{3}-1\frac{1}{2}:2\frac{1}{3}=$$

$$=\frac{17}{5}:\frac{7}{3}-\frac{3}{2}:\frac{7}{3}=\frac{17}{5}\cdot\frac{3}{7}-\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{7}=$$

$$=\frac{51}{35}-\frac{9}{14}=\frac{102}{70}-\frac{45}{70}=\frac{57}{70}.$$

7. Ἂν $\alpha=\left(\frac{2}{3}\right)^2$, $\beta=\left(1\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)^2$ νὰ ἁπλοποιηθεῖ τὸ κλάσμα $A=\frac{3\alpha-2\beta}{9\alpha^2+32\beta^2}$.

Λύση. Εἶναι $\alpha=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2^2}{3^2}=\frac{4}{9}$,

$$\beta=\left(1\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)^2=\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{6}{4}-\frac{3}{4}\right)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3^2}{4^2}=\frac{9}{16}.$$

Ἄρα

$$A=\frac{3\alpha-2\beta}{9\alpha^2+32\beta^2}=\frac{3\cdot\frac{4}{9}-2\cdot\frac{9}{16}}{9\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2+32\cdot\left(\frac{9}{16}\right)^2}=$$

$$=\frac{\frac{4}{3}-\frac{9}{8}}{9\cdot\frac{16}{81}+32\cdot\frac{81}{256}}=\frac{\frac{4}{3}-\frac{9}{8}}{\frac{16}{9}+\frac{81}{8}}=$$

$$=\frac{\frac{32}{24}-\frac{27}{24}}{\frac{128}{72}+\frac{728}{72}}=\frac{\frac{5}{24}}{\frac{857}{72}}=$$

$$=\frac{5\cdot72}{24\cdot857}=\frac{5\cdot3}{1\cdot857}=\frac{15}{857}.$$

8. Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $\frac{3}{2x-5}=\frac{4}{7}$.

Λύση. $4(2x-5)=3\cdot7 \Leftrightarrow 8x-20=21 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 8x=21+20 \Leftrightarrow 8x=41 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{41}{8} \Leftrightarrow x=5\frac{1}{8}.$$

9. Νὰ βρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα:

$$A=0{,}4:0{,}2^3,\ B=0{,}3^2\cdot1{,}1,\ \Gamma=(100A):\frac{B}{10}.$$

Λύση.

$A=0{,}4:0{,}2^3=0{,}4:0{,}08=0{,}40:0{,}08=40:8=5.$

$B=0{,}3^2\cdot1{,}1=0{,}09\cdot1{,}1=0{,}099.$

$$\Gamma=(100A):\frac{B}{10}=100\cdot5:\frac{0{,}099}{10}=500:0{,}0099=$$

$$=\frac{500}{0{,}0099}=\frac{5000000}{99}=50505\frac{50}{99}.$$

10. Ἔμπορος ἀγόρασε 225 m ὕφασμα πρὸς 75,5 δρχ./m. Πουλᾶ τὰ $\frac{3}{5}$ πρὸς 82,5 δρχ./m. Πρὸς πόσες δρχ. πρέπει νὰ πουλήσει κάθε μέτρο ἀπὸ τὰ ὑπόλοιπα γιὰ νὰ κερδίσει συνολικὰ 2340 δρχ.;

Λύση. Εἶναι $75{,}5\cdot225=16987{,}5$ δρχ. ἀγόρασε τὸ ὕφασμα.

Πούλησε πρῶτα

$$\frac{3}{5}\cdot225=\frac{3\cdot225}{5}=\frac{3\cdot45}{1}=135\text{ m}$$

ὁπότε τοῦ ἔμειναν $225-135=90$ m.

Ἀπὸ τὴν πώληση τῶν 135 m πῆρε:

$$82{,}5\cdot135=11137{,}5\text{ δρχ.}$$

Γιὰ νὰ κερδίσει 2340 δρχ. πρέπει νὰ εἰσπράξει συνολικὰ $16987{,}5+2340=19327{,}5$ δρχ.

Ἐπειδὴ ἀπὸ τὰ 135 m πῆρε 11137,5 δρχ. συμπεραίνουμε ὅτι ἀπὸ τὰ ὑπόλοιπα 90 m πρέπει νὰ εἰσπράξει 19327,5—11137,5 = 8190 δρχ.

Ἄρα κάθε μέτρο ἀπὸ τὰ 90 πρέπει νὰ τὸ πουλήσει 8190 : 90 = 91 δρχ.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Λυμένες ἀσκήσεις ἀπὸ τὰ προηγούμενα τεύχη

Α.18 Μία τεθλασμένη γραμμὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ 3 εὐθύγραμμα τμήματα. Τὸ πρῶτο εἶναι διπλάσιο τοῦ δευτέρου καὶ τὸ δεύτερο διπλάσιο τοῦ τρίτου. Ἂν τὸ μῆκος τῆς γραμμῆς εἶναι 49 dm νὰ βρεθοῦν σὲ dm τὰ μήκη τῶν τριῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, ποὺ ἀποτελοῦν τὴν τεθλασμένη γραμμή.

Ἀπόδειξη.

Ἂν x dm τὸ τρίτο τμῆμα, τὸ δεύτερο σὰν διπλάσιο του θὰ εἶναι 2x dm καὶ τὸ πρῶτο σὰν διπλάσιο τοῦ δευτέρου θὰ εἶναι 2·2x dm = 4x dm.

Ἐπειδὴ τὸ μῆκος τῆς τεθλασμένης γραμμῆς, δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν τριῶν πλευρῶν της εἶναι 49 dm ἔχουμε τὴν ἐξίσωση :

$$x+2x+4x=49 \Leftrightarrow 7x=49 \Leftrightarrow x=49:7 \Leftrightarrow x=7$$

Ἄρα τὸ μῆκος τοῦ τρίτου τμήματος εἶναι 7 dm, τοῦ δευτέρου 2·7 dm = 14 dm καὶ τοῦ πρώτου 2·14 dm = 28 dm.

Α.27 Ἀπὸ ἕνα σημεῖο Ο μιᾶς εὐθείας (ε) σχεδιάζουμε πρὸς τὸ ἴδιο μέρος τοῦ ἐπιπέδου δυὸ ἡμιευθεῖες ΟΑ καὶ ΟΒ. Ἀπὸ τὶς τρεῖς διαδοχικὲς γωνίες ποὺ σχηματίζονται εἶναι ἡ $\widehat{\alpha}=\frac{3}{5}$ ὀρθ. καὶ ἡ $\widehat{\beta}$ κατὰ 30° μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ $\widehat{\gamma}$. Νὰ βρεθοῦν τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν.

Ἀπόδειξη.

Ἡ $\widehat{\alpha}=\frac{3}{5}$ ὀρθ. $=\frac{3}{5}\cdot 90^\circ=\frac{3\cdot 90^\circ}{5}=\frac{3\cdot 18^\circ}{1}=54^\circ$.

Ἡ $\widehat{\gamma}=x^\circ$ καὶ ἡ $\widehat{\beta}=x+30^\circ$. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν αὐτῶν γωνιῶν ποὺ βρίσκονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας εἶναι μιὰ εὐθεία γωνία, δηλαδὴ 180°, πρέπει $\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}+\widehat{\gamma}=180^\circ$ ἢ

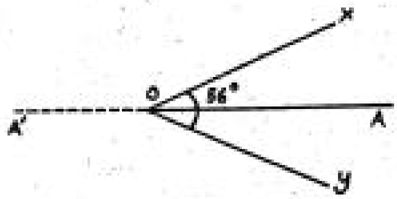
$$54^\circ+x+30^\circ+x=180^\circ \Leftrightarrow 84^\circ+2x=180^\circ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x=180^\circ-84^\circ \Leftrightarrow 2x=96^\circ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=96^\circ:2 \Leftrightarrow x=48^\circ.$$

Ὥστε $\widehat{\alpha}=54^\circ=\frac{3}{5}$ ὀρθῆς,

$$\widehat{\beta}=48^\circ+30^\circ=78^\circ=\frac{78}{90}\text{ ὀρθ.}=\frac{13}{15}\text{ ὀρθῆς},$$

$$\widehat{\gamma}=48^\circ=\frac{48}{90}\text{ ὀρθ.}=\frac{8}{15}\text{ ὀρθῆς}.$$

Α.28 Δίνεται γωνία $x\widehat{O}y=56^\circ$. Νὰ προεκτείνετε τὴ διχοτόμο ΟΑ τῆς γωνίας μέσα στὴ μὴ κυρτὴ καὶ νὰ βρεῖτε τὶς γωνίες $A'\widehat{O}x$ καὶ $A'\widehat{O}y$ ποὺ σχηματίζονται ἀπὸ τὴν προέκταση ΟΑ' καὶ ΟΑ.



Ἀπόδειξη.

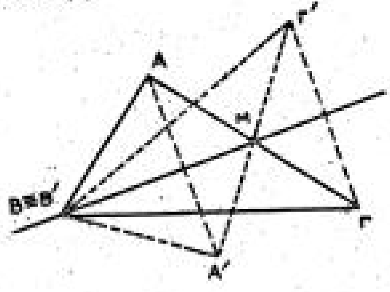
$A'\widehat{O}A=180^\circ$, $x\widehat{O}A=56^\circ:2=28^\circ$

$x\widehat{O}A'=180^\circ-28^\circ=152^\circ$.

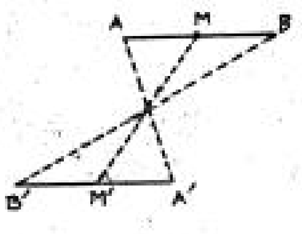
Ὅμοια καὶ ἡ $y\widehat{O}A'=152^\circ$.

Α.29 Νὰ σχεδιάσετε ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ μὲ κάθετες πλευρὲς ΑΒ=4 cm καὶ ΒΓ=6 cm. Ἂν Μ εἶναι τὸ μέσο τῆς ΑΓ νὰ βρεῖτε τὸ συμμετρικὸ τοῦ ΑΒΓ ὡς πρὸς τὴν εὐθεία ΒΜ.

Ἀπόδειξη.



Α.36 Δίνονται δύο συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ σημεῖο Ο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ Α'Β'. Νὰ δείξετε ὅτι τὰ μέσα τῶν ΑΒ καὶ Α'Β' εἶναι συμμετρικά.



Ἑνὸς κυρτοῦ πολυγώνου μία γωνία εἶναι ὀρθὴ καὶ οἱ λοιπὲς εἶναι ἴσες μεταξύ των. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι 810^0 νὰ βρεθεῖ α) πόσες πλευρὲς ἔχει τὸ πολύγωνο καὶ β) ἡ τιμὴ κάθε μιᾶς τῶν ἴσων γωνιῶν.

Ἀπόδειξη.

Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου θὰ εἶναι $810^0+90^0=900^0$ ἢ $900^0:90^0=10$ ὀρθ.

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν πολυγώνου δίνεται ἀπὸ τὸ τύπο $\Sigma=2\nu-4$ ὀρθ. ἔχουμε τὴν ἐξίσωση:

$$2\nu-4=10 \Leftrightarrow 2\nu=10+4 \Leftrightarrow 2\nu=14$$
$$\Leftrightarrow \nu=14:2 \Leftrightarrow \nu=7.$$

α) Ὥστε τὸ πολύγωνο εἶναι ἑπτάγωνο.

β) Κάθε μιὰ ἀπὸ τὶς 6 ἴσες γωνίες θὰ εἶναι:

$$810^0:6=135^0.$$

Α.43 Εἶναι δυνατὸ ἕνα τρίγωνο νὰ εἶναι συγχρόνως στοιχεῖο τοῦ συνόλου Α={ὀξυγώνιο, ὀρθογώνιο, ἀμβλυγώνιο} καὶ τοῦ συνόλου Β={ἰσόπλευρο, ἰσοσκελές, σκαληνό}. (7 δυνατὲς περιπτώσεις).

Ἀπόδειξη.

α)	Ἕνα	ὀξυγώνιο	τρίγ.	μπορεῖ	νὰ	εἶναι	ἰσόπλευρο
β)	»	»	»	»	»	»	ἰσοσκελὲς
γ)	»	»	»	»	»	»	σκαληνὸ
δ)	»	ὀρθογώνιο	»	»	»	»	ἰσοσκελὲς
ε)	»	»	»	»	»	»	σκαληνὸ
στ)	»	ἀμβλυγώνιο	»	»	»	»	»
ζ)	»	»	»	»	»	»	ἰσοσκελὲς

Α.44 Σὲ τρίγωνο ΑΒΓ ἡ γωνία $\widehat{A}$ εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ $\widehat{B}$ κατὰ 20^0 καὶ ἀπὸ τὴ $\widehat{\Gamma}$ κατὰ 40^0. Νὰ βρεθοῦν τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν σὲ μοῖρες καὶ μέρη ὀρθῆς.

Ἀπόδειξη.

Ἂν ἡ $\widehat{A}$ εἶναι x^0 ἡ $\widehat{B}$ θὰ εἶναι x^0-20^0 καὶ ἡ $\widehat{\Gamma}$ x^0-40^0. Ἐπειδὴ σὲ κάθε τρίγωνο $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=180^0$ ἔχουμε τὴν ἐξίσωση:

$$x^0+x^0-20^0+x^0-40^0=180^0 \Leftrightarrow 3x^0-60^0=180^0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x^0=180^0+60^0 \Leftrightarrow 3x^0=240^0 \Leftrightarrow x=240^0:3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=80^0.$$

Ὥστε $\widehat{A}=80^0$ ἢ $\frac{80}{90}$ ὀρθ. $=\frac{8}{9}$ ὀρθ.

$\widehat{B}=80^0-20^0=60^0$ ἢ $\frac{60}{90}$ ὀρθ. $=\frac{2}{4}$ ὀρθ.

$\widehat{\Gamma}=80^0-40^0=40^0$ ἢ $\frac{40}{90}$ ὀρθ. $=\frac{4}{9}$ ὀρθ.

Α.45 Τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $\widehat{A}=70^0$ καὶ ἡ $\widehat{B}$ κατὰ 30^0 μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ $\widehat{\Gamma}$. Νὰ βρεθοῦν οἱ ἐξωτερικὲς γωνίες τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἀπόδειξη.

Ἂν ἡ $\widehat{\Gamma}$ εἶναι x^0 ἡ $\widehat{B}=x^0+30^0$.

Πάλι ἔχουμε τὴν ἐξίσωση $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=180^0$ ἢ

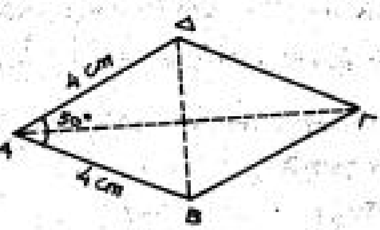
$$70^0+x^0+30^0+x^0=180^0 \Leftrightarrow 2x^0+100^0=180^0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^0=180^0-100^0 \Leftrightarrow 2x^0=80^0 \Leftrightarrow x=80:2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=40^0.$$

Ὥστε $\widehat{\Gamma}=40^0$, $\widehat{B}=40^0+30^0=70^0$. Ἐπειδὴ ἡ ἐξωτερικὴ γωνία εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἀντίστοιχης ἐξωτερικῆς θὰ εἶναι:

ἐξωτ.$\widehat{A}=180^0-70^0=110^0$, ἐξωτ.$\widehat{B}=180^0-70^0=110^0$

καὶ ἐξωτ.$\widehat{\Gamma}=180^0-40^0=140^0$.

Α.46 Νὰ κατασκευάσετε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ἂν ξέρετε πὼς $\widehat{A}=50^0$, ΑΒ=4cm, ΒΓ=4cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὶς γωνίες ποὺ σχηματίζουν οἱ διαγώνιες μὲ τὶς πλευρές του.



Ἀπόδειξη.

Ἐπειδὴ οἱ δυὸ διαδοχικὲς πλευρὲς τοῦ παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ εἶναι ἴσες θὰ εἶναι ὅλες ἴσες καὶ τὸ σχῆμα θὰ εἶναι ρόμβος.

Γιὰ νὰ τὸ κατασκευάσουμε σχεδιάζουμε μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο μιὰ γωνία $xAy=50^0$. Πάνω στὶς πλευρὲς τῆς γωνίας παίρνουμε τμήματα ΑΒ=4 cm καὶ ΑΔ=4 cm. Μὲ κέντρα τὰ Β καὶ Δ καὶ ἀκτίνα 4 cm γράφουμε δυὸ κύκλους ποὺ τέμνονται στὸ Γ. Μὲ τὸν κανόνα χαράσσουμε τὰ τμήματα ΒΓ καὶ ΓΔ ὁπότε κατασκευάσαμε τὸν ζητούμενο ρόμβο.

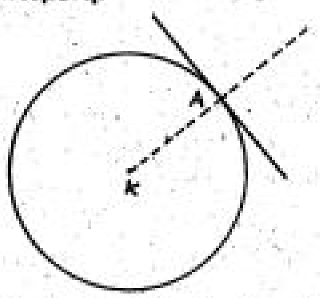
'Επειδὴ οἱ διαγώνιες τοῦ ρόμβου διχοτομοῦν τὶς γωνίες θὰ σχηματίζουν μὲ τὶς πλευρὲς γωνίες $50^0:2=25^0$ ἢ $130^0:2=65^0$.

Α.47 Νὰ κατασκευασθεῖ παραλληλόγραμμο μὲ διαγώνιες ΑΓ=5 cm, ΒΓ=3 cm ἂν οἱ δυὸ διαγώνιες σχηματίζουν γωνία 60°.

'Απόδειξη.

Κατασκευάζουμε γωνία 60° ἢ μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο ἢ μὲ τὸν κανόνα καὶ τὸ διαβήτη τὴ γωνία ἰσοπλεύρου τριγώνου. Πάνω στὶς πλευρὲς τῆς γωνίας αὐτῆς $\widehat{O}$ πέρνουμε τμήματα $OA=\frac{5}{2}$ cm $=2{,}5$ cm καὶ $OB=\frac{3}{2}$ cm $=1{,}5$ cm. Κατόπι παίρνουμε τὰ συμμετρικὰ τοῦ Α καὶ Β ὡς πρὸς Ο ἔστω Γ καὶ Δ. Χαράσσουμε τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ὁπότε σχηματίζεται τὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ τὸ ὁποῖο εἶναι παραλληλόγραμμο ἐπειδὴ οἱ διαγώνιες του διχοτομοῦνται καὶ ἔχει τὰ στοιχεῖα ποὺ μᾶς δόθηκαν.

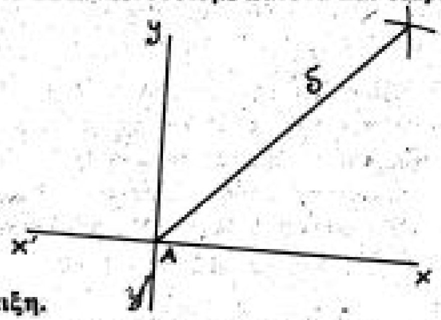
Α.48 Σ' ἕνα σημεῖο Α κύκλοτ (Κ, 4 cm) νὰ κατασκευάσεεε ἐφαπτομένη.



'Απόδειξη.

Φέρνουμε τὴν ἀκτίνα ΚΑ. Κατόπι μὲ κανόνα καὶ διαβήτη κατασκευάζουμε τὴν κάθετη εὐθεία ἀπὸ τὸ Α πρὸς τὴν ΚΑ (ἀφοῦ προεκτείνουμε τὴν ΚΑ). Αὐτὴ θὰ εἶναι ἡ ἐφαπτομένη ποὺ ζητοῦμε.

Α.49 Νὰ κατασκευασθεῖ μὲ κανόνα καὶ διαβήτη γωνία 45°.



'Απόδειξη.

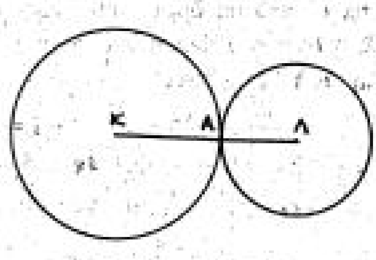
Παίρνουμε εὐθεία x'Ax. Κατασκευάζουμε εὐθεία κάθετη σ' αὐτὴ ἀπὸ τὸ Α τὴν yAy'. Διχοτομοῦμε μὲ κανόνα καὶ διαβήτη τὴ γωνία yAx.

"Αν Αδ ἡ διχοτόμος τότε ἡ γωνια δΑx=45°.

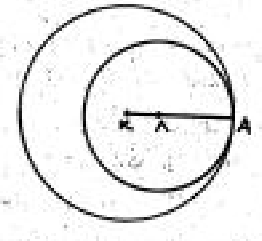
Α.50 Δίνεται κύκλος (Κ, 5 cm). Νὰ κατασκευασθεῖ κύκλος (Λ, 2 cm) ποὺ νὰ ἐφάπτεται στὸν πρῶτο στὸ σημεῖο Α (2 περιπτώσεις).

'Απόδειξη.

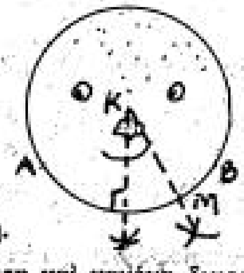
1η περίπτωση. Φέρνουμε μιὰ ἀκτίνα ΚΑ τὴν ὁποία προεκτείνουμε κατὰ τμῆμα ΑΛ = 2 cm μὲ κέντρο τὸ Λ καὶ ἀκτίνα 2 cm γράφουμε τὸ ζητούμενο κύκλο ποὺ θὰ ἐφάπτεται ἐξωτερικὰ στὸν Κ στὸ σημεῖο Α.



2η περίπτωση. Στὴν ἀκτίνα ΚΑ παίρνουμε τμῆμα ΑΛ=2 cm. Γράφουμε τὸν κύκλο (Λ, 2 cm) ὁ ὁποῖος θὰ ἐφάπτεται ἐσωτερικὰ τοῦ Κ στὸ σημεῖο Α.



Α.51 Πάνω σὲ δοσμένο τόξο κύκλου ΑΒ νὰ βρεῖτε ἕνα σημεῖο Μ τέτοιο ὥστε $\widehat{AM}=\frac{3}{4}\widehat{AB}$.



'Απόδειξη.

Μὲ διαβήτη καὶ κανόνα διχοτομοῦμε τὸ τόξο $\widehat{AB}$. "Αν Γ τὸ μέσον τοῦ $\widehat{AB}$ διχοτομοῦμε πάλι τὸ τόξο $\widehat{ΓB}$. "Αν Μ τὸ μέσο τοῦ ΓΒ τὸ

$$\widehat{AM}=\widehat{AΓ}+\widehat{ΓM}=\frac{1}{2}\widehat{AB}+\frac{1}{2}\widehat{ΓB}=$$

$$=\frac{1}{2}\widehat{AB}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\widehat{AB}=\frac{2}{4}\widehat{AB}+\frac{1}{4}\widehat{AB}=\frac{3}{4}\widehat{AB}.$$