Authors: Αναστάσιος Πατρώνης, Σταύρος Καρακώστας, Παπάς Κ.

Title: Β΄Τάξη Γυμνασίου

Abstract: Άλγεβρα. λυμένες ασκήσεις.

Creator: HDML

ΓΙΑ ΤΗΝ Β' ΤΑΞΗ

ΑΛΓΕΒΡΑ

Ἀσκήσεις λυμένες

1. Ποιὸς ρητὸς ἀριθμὸς x μᾶς κάνει τὸ διαταγμένο ζευγάρι (12x—3, 4x—1) ἴσο μὲ τὸ ζευγάρι (15, 5);

Λύση. Γιὰ νὰ εἶναι ἴσα τὰ ζευγάρια

$$(12x-3,\ 4x-1) \text{ καὶ } (15,\ 5)$$

θὰ πρέπει ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ ἑνὸς νὰ ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτο ὅρο τοῦ ἄλλου καὶ ὁ δεύτερος μὲ τὸ δεύτερο. Δηλαδὴ θὰ πρέπει

$$12x-3=15 \text{ καὶ } 4x-1=5$$
$$\Leftrightarrow 12x=15+3 \text{ καὶ } 4x=5+1$$
$$\Leftrightarrow 12x=18 \text{ καὶ } 4x=6$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{18}{12} \text{ καὶ } x=\frac{6}{4}$$
$$\Leftrightarrow (\text{ἁπλοποιώντας}) \quad x=\frac{3}{2}.$$

2. Ποιὸς ρητὸς x κάνει τὰ διατεταγμένα ζευγάρια (3x—5, 4) καὶ (12, 4x—2) ἴσα;

Λύση. Σκεφτόμαστε στὴν ἀρχὴ ὅπως στὴν προηγούμενη ἄσκηση. Θὰ πρέπει

$$3x-5=12 \text{ καὶ } 4=4x-2$$
$$\Leftrightarrow 3x=12+5 \text{ καὶ } 4x=4+2$$
$$\Leftrightarrow 3x=17 \text{ καὶ } 4x=6$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{17}{3} \text{ καὶ } x=\frac{6}{4}.$$

Ὅμως δὲν ὑπάρχει x ποὺ νὰ εἶναι ἴσος μὲ $\frac{17}{3}$ καὶ ταυτόχρονα μὲ $\frac{6}{4}$, γιατὶ $\frac{17}{3} \neq \frac{6}{4}$. Ἐπομένως τὸ πρόβλημά μας δὲν ἔχει καμμιὰ λύση.

3. Ὑπάρχει διψήφιος ἀριθμὸς ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του;

Λύση. (Μέθοδος τῆς ἀπαγωγῆς στὸ ἄτοπο).

Ἂς δεχτοῦμε πὼς ὑπάρχει τέτοιος ἀριθμός, καὶ ἂς εἶναι χ τὸ ψηφίο τῶν δεκάδων του καὶ ψ τὸ ψηφίο τῶν μονάδων του. Τότε ὁ ἀριθμός μας θὰ πρέπει νὰ εἶναι

$$10\chi+\psi.$$

Ἀλλὰ θὰ πρέπει νὰ εἶναι καὶ ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του, ἄρα

$$10\chi+\psi=\chi+\psi.$$

Κάνοντας τὶς πράξεις (ἀναγωγὴ ὅμοιων ὅρων)

$$10\chi-\chi=\psi-\psi=0$$
$$9\chi=0$$

δηλαδὴ $\chi=0.$

Ἀλλὰ τότε ὁ ἀριθμὸς δὲν θὰ εἶναι διψήφιος, ἀφοῦ δὲν θὰ ἔχει καθόλου δεκάδες. Ἐπομένως δὲν μπορεῖ νὰ ὑπάρχει διψήφιος ἀριθμὸς ποὺ νἆναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του.

4. Ζητᾶμε ρητὸ ἀριθμὸ x ποὺ

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} : x = -\frac{1}{2}.$$

Λύση. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} : x = -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$$
$$\Leftrightarrow x = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} : \left(-\frac{1}{2}\right)^{1}$$
$$\Leftrightarrow x = \left(-\frac{1}{2}\right)^{(-2)-1}$$
$$\Leftrightarrow x = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$$
$$\Leftrightarrow x = \left(-\frac{2}{1}\right)^{+3} = (-2)^3 = -8.$$

5. Γιὰ ποιὲς τιμὲς τῶν k, λ ἡ ἐξίσωση

$$kx-\lambda=8x+3\lambda-1$$

ἔχει ἄπειρες λύσεις (εἶναι «ἀόριστη», ὅπως λέμε);

Λύση. Ἡ ἐξίσωσή μας γράφεται ἰσοδύναμα

$$kx-\lambda=8x+3\lambda-1$$
$$\Leftrightarrow kx-8x=\lambda+3\lambda-1$$
$$\Leftrightarrow (k-8)x=4\lambda-1.$$

Ἡ ἐξίσωση αὐτὴ ἔχει ἄπειρες λύσεις μόνο **στὴν περίπτωση ποὺ καὶ ὁ συντελεστὴς τοῦ x εἶναι μηδὲν καὶ ὁ ὅρος τοῦ β' μέλους (ποὺ δὲν ἔχει x) εἶναι μηδέν.** Ὁ συντελεστὴς τοῦ x εἶναι ὁ k—8 καὶ ὁ ὅρος τοῦ β' μέλους εἶναι ὁ 4λ—1. Πρέπει λοιπὸν

$$k-8=0 \text{ καὶ } 4\lambda-1=0$$

δηλαδὴ $k=8$ καὶ $\lambda=\frac{1}{4}.$

6. Μᾶς δίνουν τὴ συνάρτηση ποὺ σὲ κάθε ἀκέραιο ἀριθμὸ x ἀντιστοιχίζει τὸ ρητὸ ἀριθμὸ $y=2+\frac{x}{3}$.

Συμβολικὰ $y=2+\frac{x}{3}$, $x\in Z$, $y\in Q$

(Z σύνολο τῶν ἀκεραίων, Q σύνολο τῶν ρητῶν).

Μᾶς ζητοῦν :

α) Γιὰ ποιὰ x ἀπὸ τὸ Z τὸ y εἶναι θετικὸς ρητός.

β) Γιὰ ποιὰ x ἀπὸ τὸ Z τὸ y εἶναι θετικὸς ἀκέραιος.

Λύση.

α) Τὸ y ὁπωσδήποτε εἶναι ρητός, ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ δοῦμε γιὰ ποιοὺς ἀκέραιους x εἶναι τὸ y θετικός :

$$\begin{aligned} & y>0 \\ \Leftrightarrow\ & 2+\frac{x}{3}>0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{6+x}{3}>0 \\ \Leftrightarrow\ & 6+x>0 \\ \Leftrightarrow\ & x>-6. \end{aligned}$$

Ὥστε τὸ y εἶναι θετικὸς γιὰ ὅλους τοὺς ἀκέραιους ποὺ εἶναι μεγαλύτεροι ἀπὸ −6. Ἀλλὰ οἱ ἀκέραιοι ποὺ εἶναι μεγαλύτεροι ἀπὸ −6 εἶναι, ὅπως βλέπετε στὸ σχῆμα, οἱ

−5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,...

β) Ξέρουμε γιὰ τὸ y καὶ γιὰ τὸ x ὅτι

$$y=2+\frac{x}{3} \qquad (1).$$

Θέλουμε ὁ y νὰ εἶναι ἀκέραιος καὶ $y>0$. Γιὰ νὰ πᾶμε ἀπὸ τὸ y στὸ x σκεφτόμαστε ἔτσι :

Ἡ παραπάνω σχέση (1) γράφεται

$$y-2=\frac{x}{3} \qquad (2).$$

Παρατηροῦμε ὅτι ὁ y **θὰ εἶναι ἀκέραιος καὶ θὰ εἶναι** $y>0$ **ἅμα ὁ** $y-2$ **εἶναι ἀκέραιος καὶ** $y-2>-2$.

Ἀλλὰ ὅπως μᾶς δείχνει ἡ σχέση (2), ὁ $y-2$ θὰ εἶναι ἀκέραιος ἅμα ὁ $\frac{x}{3}$ εἶναι ἀκέραιος καὶ θὰ εἶναι $y-2>-2$ ἅμα $\frac{x}{3}>-2$. **Ἀρκεῖ λοιπὸν ὁ** $\frac{x}{3}$ **νὰ εἶναι ἀκέραιος καὶ νὰ εἶναι** $\frac{x}{3}>-2$. Τὸ νὰ εἶναι ὁ $\frac{x}{3}$ ἀκέραιος σημαίνει : ὁ x **νὰ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3.** Τὰ πολλαπλάσια τοῦ 3 (ἐπὶ ὅλους τοὺς ἀκέραιους ἀριθμοὺς) εἶναι :

...−12, −9, −5, −3, 0, 3, 6, 9, 12,...

(χωρὶς τέλος οὔτε πρὸς τ' ἀριστερὰ οὔτε πρὸς τὰ δεξιά) Ἐμεῖς θέλουμε ἀκόμη νὰ εἶναι καὶ $\frac{x}{3}>-2$ δηλαδὴ $x>-6$. Ἐπομένως θὰ περιοριστοῦμε **στὰ πολλαπλάσια τοῦ 3 ποὺ εἶναι μεγαλύτερα τοῦ −6,** δηλαδὴ στοὺς ἀριθμοὺς

−3, 0, 3, 6, 9, 12,...

Ἀσκήσεις ποὺ προτείνονται γιὰ λύση

B.51 Νὰ βρεῖτε τὴν τιμὴ τῆς παράστασης :

$$2^{x-4}-5\cdot 3^{x-3}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{x-3}+(-1)^{x-2}\cdot 2^{x-3}$$

γιὰ $x=1$.

B.52 Γιὰ ποιὲς τιμὲς τοῦ α ἡ ἐξίσωση :

$$\alpha x+\alpha+1=x$$

ἔχει μία λύση, γιὰ ποιὲς τιμὲς τοῦ α ἔχει ἄπειρες λύσεις καὶ γιὰ ποιὲς δὲν ἔχει καμμία λύση ;

B.53 Μιὰ ἰδιότητα ποὺ ἔχουν οἱ ἀναλογίες εἶναι : ὅταν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ τότε καὶ $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$.

Νὰ ἐπαληθεύσετε αὐτὴν τὴν ἰδιότητα στὸ παρακάτω συγκεκριμένο πρόβλημα :

Δύο ἄνθρωποι μοιράζονται ἕνα ποσὸ 138 δρχ. σὲ 5 ἴσα μέρη ἀπὸ τὰ ὁποῖα ὁ ἕνας παίρνει τὰ δύο (καὶ ὁ ἄλλος τὰ τρία ποὺ μένουν). Πόσες δραχμὲς παίρνει ὁ καθένας ; (Ὀνομάστε x τὶς δρχ. τοῦ ἑνός, ὁπότε οἱ δρχ. τοῦ ἄλλου θὰ εἶναι $138-x$, καὶ μελετεῖστε τὶς ἀναλογίες $\frac{x}{2}=\frac{138-x}{3}=\frac{138}{5}$ ποὺ μᾶς δίνει τὸ πρόβλημα).

B.54 Μιὰ ἄλλη ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν εἶναι: ὅταν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta}$.

Ἀφοῦ ἐπαληθεύσετε τὴν ἰδιότητα αὐτὴ μὲ δικά σας παραδείγματα, χρησιμοποιεῖστε την γιὰ νὰ λύσετε τὴν ἐξίσωση :

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{k+\lambda+1}{k+\lambda-1}.$$

(Ὁ ἄγνωστος εἶναι τὸ x. Οἱ k, λ εἶναι ρητοὶ ἀριθμοὶ ποὺ τὸ ἄθροισμά τους εἶναι διαφορετικὸ ἀπὸ -1, ἀλλιῶς τὸ κλάσμα στὸ β' μέλος τῆς ἐξίσωσης δὲ θὰ εἶχε νόημα. Τὸ x θὰ τὸ βρεῖτε ἴσο μὲ μιὰ παράσταση τῶν k, λ).

B.55 Ἐργαστεῖτε στὴν ἀνίσωση:

$$\frac{(x+1)(x-1)}{2}+1>0.$$

Τί παρατηρεῖτε;

B.56 Γιὰ ποιοὺς ρητοὺς ἀριθμοὺς x ἔχουμε ταυτόχρονα:

$$\frac{x-2}{3}+\frac{x+3}{4}+\frac{x-3}{6}<3 \text{ καὶ } \frac{x-5}{8}+\frac{x}{4}>\frac{1}{2};$$

B.57 Μᾶς δίνουν τὴ συνάρτηση:

$$y=\frac{2-6x}{2},\quad x\in Z.$$

α) Εἶναι καὶ τὸ y ἀκέραιος (ὅταν τὸ x εἶναι ἀκέραιος) καὶ γιατί;

β) Γιὰ ποιὰ x ἀπὸ τὸ Z ἔχουμε $y>0$;

B.58 Μᾶς δίνουν δύο συναρτήσεις, τίς:

$$y_1=3x-4,\quad x\in Q$$
$$y_2=2x-2,\quad x\in Q,$$

καὶ μᾶς ζητοῦν;

α) Γιὰ ποιὰ x ἀπὸ τὸ Q ἔχουμε $y_1+y_2>0$.

β) Νὰ ἀποδείξουμε ὅτι γιὰ $x<0$ εἶναι καὶ $y_1<0$ καὶ $y_2<0$, ἄρα τὸ γινόμενο $y_1y_2>0$.

γ) Νὰ βροῦμε γιὰ ποιὰ x εἶναι $y_2=2y_1$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

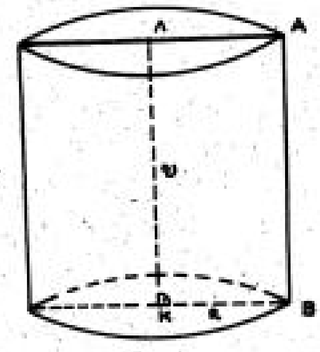
Α'. Ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος

Ὁρισμός. Ὁ ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος ἢ ἁπλᾶ κύλινδρος εἶναι ἕνα στερεὸ ἐκ περιστροφῆς ποὺ παράγεται ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο ΚΛΑΒ ποὺ στρέφεται γύρω ἀπὸ μιὰ ἀκίνητη πλευρά του (π. χ. τὴν ΚΛ), μιὰ ὁλόκληρη στροφή Σχ. 1.

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἴσους κυκλικοὺς δίσκους μὲ τὰ ἐπίπεδά τους παράλληλα (βάσεις) καὶ ἀπὸ τὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια ποὺ γράφει ἡ πλευρὰ ΑΒ (γενέτειρα τοῦ κυλίνδρου).

Ἐμεῖς θὰ ἀσχοληθοῦμε μόνο μὲ τὴ μέτρηση τῆς ἐπιφάνειας καὶ τοῦ ὄγκου τοῦ στερεοῦ αὐτοῦ.

Τὰ στοιχεῖα ποὺ μᾶς ἐνδιαφέρουν γιὰ τὶς μετρήσεις ποὺ θὰ κάνουμε εἶναι: α) Ἡ ἀκτίνα τῆς βάσης του R = KB = ΛΑ ποὺ τὴν ὀνομάζουμε καὶ ἀκτίνα τοῦ κυλίνδρου. β) Τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου ποὺ εἶναι ἡ ἀπόσταση τῶν ἐπιπέδων τῶν δύο κυ-



Σχ. 1

κλικῶν δίσκων (βάσεων). Αὐτὸ εἶναι ἴσο μὲ τὸ τμῆμα τοῦ ἄξονα ποὺ βρίσκεται ἀνάμεσα στὰ δύο κέντρα Κ καὶ Λ καθὼς καὶ μὲ τὴν πλευρὰ ΑΒ. Δηλαδή: υ = ΚΛ = ΑΒ.

Οἱ παρακάτω τύποι μᾶς δίνουν γιὰ τὸν κύλινδρο:

α) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς του ἐπιφάνειας (Ε κυρτ.)

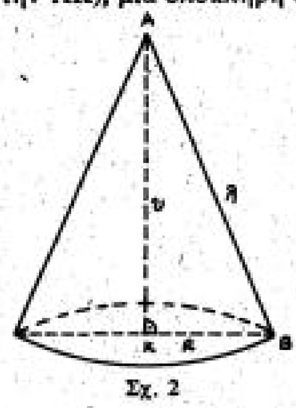
β) Τὸ » » ὁλικῆς » » (Ε ὁλ.).

γ) Τὸν ὄγκο του (V)

$$E_{\text{κυρτ.}}=2\pi R\cdot \upsilon$$
$$E_{\text{ὁλ.}}=2\pi R\upsilon+2\pi R^2 \text{ ἢ } E_{\text{ὁλ.}}=2\pi R(\upsilon+R)$$
$$V=\pi R^2\cdot \upsilon$$

Β'. Ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος

Ὁρισμός. Ὁ ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος ἢ ἁπλᾶ κῶνος εἶναι ἕνα στερεὸ ἐκ περιστροφῆς ποὺ παράγεται ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΚΒ (Κ = 1 ὀρθ.) ποὺ στρέφεται γύρω ἀπὸ μία ἀκίνητη κάθετη πλευρά του (π.χ. τὴν ΑΚ), μιὰ ὁλόκληρη στροφὴ Σχ. 2.



Σχ. 2

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα κυκλικὸ δίσκο (βάση τοῦ κώνου) καὶ ἀπὸ τὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια ποὺ γράφει ἡ ὑποτείνουσα ΑΒ (γενέτειρα ἢ πλευρὰ τοῦ κώνου).

Ἔτσι κι ἐδῶ ὅπως καὶ στὸν κύλινδρο, θ' ἀσχοληθοῦμε μόνο μὲ τὴ μέτρηση τῆς ἐπιφάνειας καὶ τοῦ ὄγκου τοῦ στερεοῦ αὐτοῦ.

Ἐκεῖνα τὰ στοιχεῖα ποὺ μᾶς ἐνδιαφέρουν γιὰ τὶς μετρήσεις μας εἶναι:

α) Ἡ ἀκτίνα τῆς βάσης του $R = KB$ ποὺ τὴν ὀνομάζουμε καὶ ἀκτίνα τοῦ κώνου.

β) Τὸ ὕψος του ποὺ εἶναι ἡ ἀπόσταση τῆς κορυφῆς του ἀπὸ τὸ ἐπίπεδο τῆς βάσης του. Αὐτὸ εἶναι ἴσο μὲ τὸ τμῆμα τοῦ ἄξονα ποὺ βρίσκεται μεταξὺ τῆς κορυφῆς καὶ τοῦ κέντρου τῆς βάσης του.

γ) Ἡ πλευρά του $λ = AB$ (γενέτειρα) ποὺ εἶναι ἴση μὲ τὴν ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἀπ' τὸ ὁποῖο παράγεται ὁ κῶνος.

Τὰ τρία αὐτὰ στοιχεῖα R, υ καὶ λ συνδέονται στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΚΒ μὲ τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα. Δηλαδὴ $R^2 + υ^2 = λ^2$. Ἂν λοιπὸν ξέρουμε δύο ὁποιαδήποτε ἀπ' αὐτά, βρίσκουμε τὸ τρίτο.

Γιὰ τὸν κῶνο οἱ παρακάτω τύποι μᾶς δίνουν:

α) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς του ἐπιφάνειας ($E_{κυρτ.}$).

β) Τὸ » τῆς ὁλικῆς του » ($E_{ολ.}$)

γ) Τὸν ὄγκο του (V)

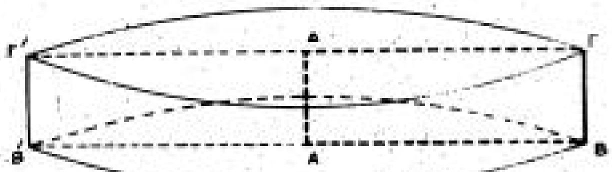
$$\boxed{\begin{aligned} &E_{κυρτ.} = πR \cdot λ \\ &E_{ολ.} = πRλ + πR^2 \text{ ἢ } E_{ολ.} = πR(λ+R) \\ &V = \frac{1}{3}πR^2 \cdot υ \end{aligned}}$$

Παρατήρηση:

Οἱ παραπάνω τύποι τοῦ κώνου βγαίνουν ἀπ' τοὺς ἀντίστοιχους τύπους τῶν κανονικῶν πυραμίδων ὅταν σ' αὐτοὺς βάλλουμε ἀντὶ γιὰ «περίμετρο βάσης» τὸ «μῆκος τοῦ κύκλου $Γ = 2πR$», ἀντὶ γιὰ «ἐμβαδὸ βάσης» τὸ «ἐμβαδὸ τοῦ κύκλου $ε = πR^2$» καὶ ἀντὶ γιὰ «ἀπόστημα» τὴν «πλευρὰ λ» τοῦ κώνου, ἀφοῦ βέβαια ἀντιστοιχίσουμε στὴν παράπλευρη ἐπιφάνεια τῆς κανονικῆς πυραμίδας τὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου. Μὲ τὴν ἴδια διαδικασία ἀπ' τοὺς τύπους τῶν ὀρθῶν πρισμάτων βγαίνουν οἱ τύποι τοῦ κυλίνδρου.

Ἀσκήσεις πάνω στὸν κύλινδρο καὶ τὸν κῶνο

1. Ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ἔχει μῆκος ΑΒ τριπλάσιο τοῦ πλάτους ΑΔ καὶ περίμετρο 32 cm. Αὐτὸ στρέφεται μιὰ ὁλόκληρη στροφὴ γύρω ἀπ' τὴν πλευρὰ ΑΔ. Νὰ βρεθεῖ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ στερεοῦ ποὺ παράγεται καὶ ὁ ὄγκος του.



Λύση.

Ἂν $ΑΔ = x \Rightarrow AB = 3x$

ἐπειδὴ

$$2 \cdot AB + 2AΔ = περ.$$

ἔχουμε τὴν ἐξίσωση:

$$2 \cdot 3x + 2 \cdot x = 32 \Leftrightarrow 6x + 2x = 32 \Leftrightarrow 8x = 32 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 32 : 8 \Leftrightarrow x = 4 \text{ cm}.$$

Δηλαδὴ $ΑΔ = 4$ cm. καὶ $AB = 12$ cm.

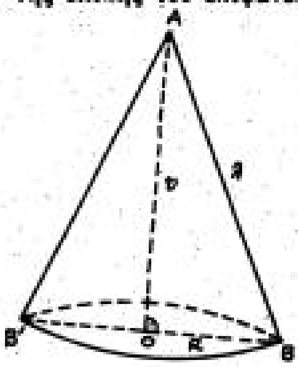
Τὸ στερεὸ ποὺ παράγεται ἀπ' τὴν περιστροφὴ τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ὁ κύλινδρος ΒΒ'Γ'Γ μὲ ἀκτίνα $R = AB = 12$ cm. καὶ ὕψος $υ = ΑΔ = 4$ cm.

Ἔχουμε λοιπόν:

α) $E_{ολ.} = 2πR(υ+R) \Rightarrow E_{ολ.} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 12(4+12)$
$\Rightarrow E_{ολ.} = 1205{,}76 \text{ cm}^2.$

β) $V = πR^2 \cdot υ \Rightarrow V = 3{,}14 \cdot 12^2 \cdot 4 \Rightarrow V = 1808{,}64 \text{ cm}^3.$

2. Τὸ μῆκος τοῦ κύκλου τῆς βάσης ἑνὸς κώνου εἶναι 56,52 cm καὶ ἡ πλευρά του 15 cm. Νὰ βρεθεῖ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς του ἐπιφάνειας καὶ ὁ ὄγκος του.



Λύση.

Ἔχουμε $\Gamma = 2\pi R$

$$\Leftrightarrow \quad 2\pi R = \Gamma$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 3{,}14 \cdot x = 56{,}52 \quad (R = x)$$

$$\Leftrightarrow 6{,}28 \cdot x = 56{,}52$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 56{,}52 : 6{,}28 \Leftrightarrow x = 9 \Leftrightarrow R = 9 \text{ cm.}$$

Τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα στὸ τρίγωνο ΑΟΒ δίνει:

$$AO^2 = AB^2 - OB^2 \Leftrightarrow \upsilon^2 = \lambda^2 - R^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 = 15^2 - 9^2 \; (\upsilon = x) \Leftrightarrow x^2 = 225 - 81 \Leftrightarrow x^2 = 144$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{144} \Leftrightarrow x = 12 \text{ cm.} \Leftrightarrow \upsilon = 12 \text{ cm.}$$

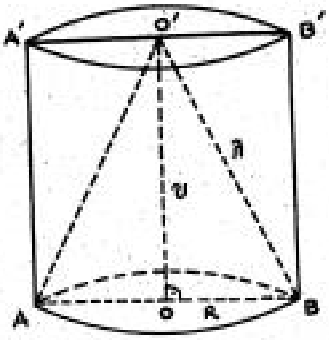
Ἐπομένως:

α) $E_{\text{ολ.}} = \pi R(\lambda + R) \Rightarrow E_{\text{ολ.}} = 3{,}14 \cdot 9(15+9) \Rightarrow$
$\Rightarrow E_{\text{ολ.}} = 678{,}24 \text{ cm}^2$

β) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \upsilon \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 9^2 \cdot 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 1017{,}36 \text{ cm}^3.$

3. Κύλινδρος ἔχει ἀκτίνα 12 cm. καὶ ὕψος 16 cm. Ἕνας κῶνος ἔχει τὴν κορυφή του στὸ κέντρο τῆς πάνω βάσης τοῦ κυλίνδρου καὶ βάση τὴν κάτω βάση τοῦ κυλίνδρου. Νὰ βρεθεῖ ὁ ὄγκος τοῦ μέρους τοῦ κυλίνδρου ποὺ βρίσκεται γύρω ἀπὸ τὸν κῶνο καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου.



Λύση. Γιὰ τὸν ὄγκο ποὺ μᾶς ζητᾶνε γράφουμε

$$V = V_1 - V_2$$

ὅπου V_1 ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου καὶ V_2 ὁ ὄγκος τοῦ κώνου.

Ἐπειδὴ κύλινδρος καὶ κῶνος ἔχουν τὴν ἴδια ἀκτίνα βάσης καὶ τὸ ἴδιο ὕψος, ἔχουμε:

$$V = \pi R^2 \upsilon - \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \upsilon = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot \upsilon \Rightarrow$$

$$V = \frac{2}{3}\, 3{,}14 \cdot 12^2 \cdot 16 \Rightarrow V = 4823{,}04 \text{ cm}^3.$$

Τώρα ἀπ' τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο Ο΄ΟΒ μποροῦμε νὰ βροῦμε τὴν πλευρὰ τοῦ κώνου. Ἔχουμε:

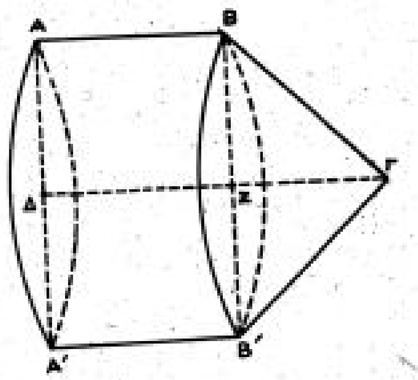
$$\lambda^2 = \upsilon^2 + R^2 \Rightarrow x^2 = 12^2 + 16^2 \; (\lambda = x) \Rightarrow x^2 = 144 + 256 \Rightarrow$$

$$x^2 = 400 \Rightarrow x = \sqrt{400} \Rightarrow x = 20 \text{ cm} \Rightarrow \lambda = 20 \text{ cm.}$$

Τὸ ἐμβαδὸν ἄρα τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου Ο΄ΑΒ εἶναι:

$$E_{\text{κυρτ}} = \pi R \lambda \Rightarrow E_{\text{κυρτ}} = 3{,}14 \cdot 12 \cdot 20 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow E_{\text{κυρτ}} = 753{,}6 \text{ cm.}$$

4. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ μὲ $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 1$ ὀρθ. ΑΔ = 8 cm., ΔΓ = 18 cm καὶ ΒΓ = cm. Αὐτὸ στρέφεται μιὰ ὁλόκληρη στροφὴ γύρω ἀπὸ τὴ ΓΔ. Νὰ βρεθεῖ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ στερεοῦ ποὺ παράγεται καὶ ὁ ὄγκος του. (Ἡ ΓΔ εἶναι ἡ μεγάλη βάση τοῦ τραπεζίου).



Λύση.

Φέρουμε τὴν $BZ \perp \Gamma\Delta$. Τὸ στερεὸ ποὺ παράγεται ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸν κύλινδρο ποὺ παράγει τὸ ὀρθογώνιο ΑΒΖΔ καὶ ἀπὸ τὸν κῶνο ποὺ παράγει τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΓΒΖ.

Εἶναι $BZ = A\Delta = 8$ cm καὶ $B\Gamma = 10$ cm.

Ἐπομένως:

$$Z\Gamma^2 = B\Gamma^2 - BZ^2 \Rightarrow x^2 = 10^2 - 8^2 \Rightarrow x^2 = 100 - 64 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \sqrt{36} \Rightarrow \Gamma Z = 6 \text{ cm.}$$

Ἐξ ἄλλου:

$$\Delta Z = \Delta\Gamma - \Gamma Z \Rightarrow \Delta Z = 18 - 6 \Rightarrow \Delta Z = 12 \text{ cm.}$$

Ὁ κύλινδρος λοιπὸν ἔχει:

$$R = BZ = 8 \text{ cm} \quad \text{καὶ} \quad \upsilon_1 = \Delta Z = 12 \text{ cm.}$$

Ὁ κῶνος ἔχει:

$R = BZ = 8$ cm., $\upsilon_2 = \Gamma Z = 6$ cm., καὶ $\lambda = B\Gamma = 10$ cm.

Γιὰ τὸν ὄγκο τοῦ στερεοῦ γράφουμε:

$$V = V_1 + V_2 \qquad (1)$$

ὅπου V_1 ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου ΑΒΒ΄Α΄ καὶ V_2 ὁ ὄγκος τοῦ κώνου ΓΒΒ΄.

Ἔχουμε:

$$V_1 = \pi R^2 \cdot \upsilon_1 \Rightarrow V_1 = 3{,}14 \cdot 8^2 \cdot 12 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V_1 = 2411{,}52 \text{ cm}^3 \Rightarrow$$

καὶ $V_2 = \frac{1}{3} \pi R^2 \upsilon_2 \Rightarrow V_2 = \frac{1}{3} 3{,}14 \cdot 8^2 \cdot 6 \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_2 = 401{,}92 \text{ cm}.$$

Ἐπομένως (ἀπὸ τὴν (1)):

$$V = 2813{,}44 \text{ cm}^3.$$

Γιὰ τὸ ἐμβαδὸ τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ στερεοῦ γράφουμε:

$$E_{\text{ολ.}} = E_1 + E_2 + E_3 \qquad (2)$$

ὅπου E_1 τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσης τοῦ κυλίνδρου

E_2 τὸ » » κυρτῆς ἐπιφ. τοῦ κυλίνδρου

καὶ E_3 τὸ » » κυρτῆς » » κώνου.

Ἔχουμε:

$E_1 = \pi R^2 \Rightarrow E_1 = 3{,}14 \cdot 8^2 \Rightarrow E_1 = 200{,}96 \text{ cm}^2$

$E_2 = 2\pi R \upsilon_1 \Rightarrow E_2 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 8 \cdot 12 \Rightarrow E_2 = 602{,}88 \text{ cm}^2$

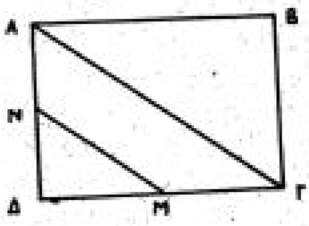
$E_3 = \pi R \lambda \Rightarrow E_3 = 3{,}14 \cdot 8 \cdot 10 \Rightarrow E_3 = 251{,}2 \text{ cm}^2$.

Ἐπομένως (ἀπὸ τὴ (2)):

$$E_{\text{ολ.}} = 1055{,}04 \text{ cm}^2.$$

Ἀσκήσεις γιὰ ἐπανάληψη

5. Ἕνα ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ ἔχει βάση ΓΔ = 2 dm καὶ διαγώνιο ΑΓ = 25 cm. Ἂν Μ εἶναι τὸ μέσο τῆς πλευρᾶς ΓΔ καὶ Ν τὸ μέσον τῆς ΑΔ, νὰ βρεθεῖ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΜΝ καὶ τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου.



Λύση. Ἀπ' τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ μποροῦμε νὰ ὑπολογίσουμε τὸ πλάτος ΑΔ τοῦ ὀρθογωνίου. Ἔχουμε:

$$A\Delta^2 = A\Gamma^2 - \Delta\Gamma^2 \Rightarrow x^2 = 25^2 - 20^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 = 625 - 400 \Rightarrow x^2 = 225 \Rightarrow$$
$$x = \sqrt{225} \Rightarrow x = 15 \text{ cm.} \Rightarrow A\Delta = 15 \text{ cm.},$$

διότι: $\Gamma\Delta = 2$ cm. $= 20$ cm.

Γιὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πενταγώνου γράφουμε:

$$E = E_1 - E_2 \qquad (1)$$

ὅπου E_1 εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ καὶ E_2 εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΝΔΜ. Εἶναι:

$E_1 = \beta \cdot \upsilon \Rightarrow E_1 = 20 \cdot 15 \Rightarrow E_1 = 300 \text{ cm}^2$.

$E_2 = \frac{1}{2} \beta \cdot \upsilon \Rightarrow E_2 = \frac{1}{2} 10 \cdot 7{,}5 \Rightarrow E_2 = 37{,}5 \text{ cm}^2$,

$$\text{διότι } \Delta M = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ cm} \quad \text{καὶ}$$
$$\Delta M = \frac{A\Delta}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5 \text{ cm}$$

Ἐπομένως: $E = 262{,}5 \text{ cm}^2$.

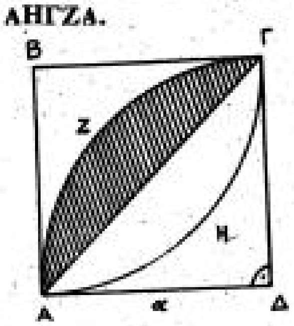
Ἡ ΜΝ ἐπειδὴ ἑνώνει τὰ μέσα τῶν δύο πλευρῶν στὸ τρίγωνο ΑΔΓ θὰ εἶναι:

$$MN = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5 \text{ cm}.$$

Ἐπομένως:

$$\text{Περ.} = M\Gamma + \Gamma B + AB + AN + NM \Rightarrow$$
$$\text{Περ.} = 10 + 15 + 20 + 7{,}5 + 12{,}5 = 65 \text{ cm}.$$

6. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ μὲ ἐμβαδὸν 36 cm². Μὲ κέντρα τὶς κορυφὲς του Β καὶ Δ ἀκτίνα τὴν πλευρά του, γράφουμε δύο τόξα $\widehat{AH\Gamma}$ καὶ $\widehat{AZ\Gamma}$ στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ τετραγώνου. Νὰ βρεθεῖ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχήματος ΑΗΓΖΑ.



Λύση.

Τὸ ἐμβαδὸν ποὺ μᾶς ζητᾶνε νὰ βροῦμε ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἴσα κυκλικὰ τμήματα ΑΖΓΑ καὶ ΑΗΓΑ. Θὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς π. χ. τοῦ ΑΖΓΑ.

Πρῶτα θὰ βροῦμε τὴν πλευρὰ τοῦ τετραγώνου:

Εἶναι $E=\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2=E \Rightarrow \alpha^2=36 \Rightarrow \alpha=\sqrt{36} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = 6$ cm.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέα ΔΑΖΓ εἶναι:

$$E_{\tau o \mu} = \frac{\pi R^2 \cdot \mu o}{360} \Rightarrow E_{\tau o \mu} = \frac{3,14 \cdot 6^2 \cdot 90}{360} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{\tau o \mu} = 28,26 \text{ cm}^2.$$

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΔΓ εἶναι:

$$E_{\tau \rho \gamma} = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon \Rightarrow E_{\tau \rho \gamma} = \frac{1}{2} \cdot \alpha^2 \Rightarrow E_{\tau \rho \gamma} = \frac{1}{2} \cdot 6^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{\tau \rho \gamma} = 18 \text{ cm}^2.$$

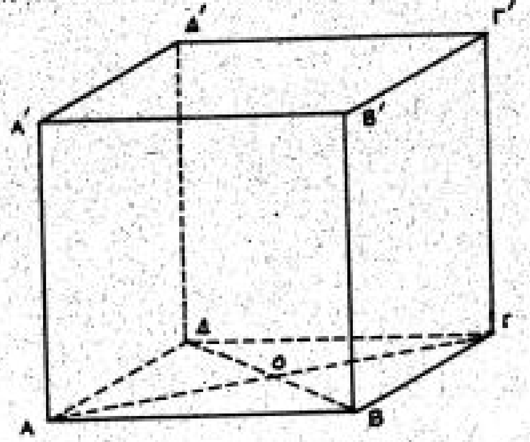
Ἐπομένως:

$$\begin{aligned} E_{ΑΖΓΑ} &= E_{\tau o \mu} - E_{\tau \rho \gamma} \\ &= 28,26 - 18 \\ &= 10,26 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Τὸ ἐμβαδὸν ἄρα τοῦ σχήματος ΑΖΓΗΑ εἶναι:

$$E = 2 \cdot E_{ΑΖΓΑ} \Rightarrow E = 2 \cdot 10,26 \Rightarrow E = 20,52 \text{ cm}^2.$$

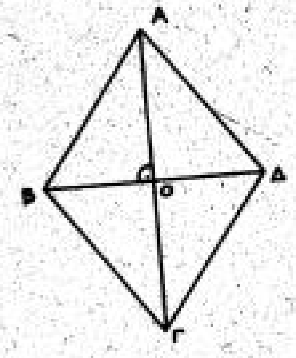
7. Ἡ βάση ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ρόμβος μὲ πλευρὰ $\alpha=13$ cm καὶ μικρὴ διαγώνιο $\delta_1=10$cm. Νὰ βρεθεῖ ὁ ὄγκος του καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς του ἐπιφάνειας ἂν γνωρίζουμε ὅτι τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι ἴσο μὲ τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς μεγάλης διαγωνίου τοῦ ρόμβου τῆς βάσης του.



Λύση.

Ἐπειδὴ οἱ διαγώνιες τοῦ ρόμβου τέμνονται κάθετα καὶ διχοτομοῦνται, τὸ τρίγωνο ΑΟΒ εἶναι ὀρθογώνιο καὶ ἔχει:

$$AB = 13 \text{ cm} \text{ καὶ } OB = \frac{ΔB}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$



Ἔχουμε: $AO^2 = AB^2 - OB^2 \Rightarrow x^2 = 13^2 - 5^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 169 - 25 \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = \sqrt{144} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 12$ cm $\Rightarrow AO = 12$ cm.

Ἄρα ἡ μεγάλη διαγώνιος τοῦ ρόμβου εἶναι:

$\delta_2 = AΓ = 2OA = 2 \cdot 12 = 2$ cm $\Rightarrow \delta_2 = 24$ cm.

Μποροῦμε τώρα νὰ βροῦμε τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος:

$$\upsilon = \frac{1}{3}\delta_2 = \frac{1}{3} \cdot 24 = 8 \Rightarrow \upsilon = 8 \text{ cm}.$$

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ρόμβου (βάση τοῦ πρίσματος) εἶναι:

$$E_\beta = \frac{1}{2}\delta_1 \cdot \delta_2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24 = 120 \Rightarrow E_\beta = 120 \text{ cm}^2.$$

Ἡ περίμετρός του εἶναι:

$$\Pi_\beta = 4\alpha = 4 \cdot 13 = 52 \Rightarrow \Pi_\beta = 52 \text{ cm}^2.$$

Ἐπομένως:

$$V = E_\beta \cdot \upsilon \Rightarrow V = 120 \cdot 8 \Rightarrow V = 960 \text{ cm}^3$$

καὶ $E_{o\lambda} = \Pi_\beta \cdot \upsilon + 2 \cdot E_\beta \Rightarrow E_{o\lambda} = 52 \cdot 8 + 2 \cdot 120 \Rightarrow$

$\Rightarrow E_{o\lambda} = 656$ cm².

8. Δίνεται κύβος ποὺ ἔχει ἐμβαδὸν ἕδρας 144 cm². Μία πυραμίδα ἔχει γιὰ βάση μία ἕδρα τοῦ κύβου αὐτοῦ καὶ κορυφὴ τὸ κέντρο τῆς ἀπέναντι ἕδρας. Νὰ βρεθεῖ ὁ ὄγκος τοῦ μέρους τοῦ κύβου ποὺ βρίσκεται γύρω ἀπ' τὴ πυραμίδα καθὼς καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τῆς πυραμίδας.

Λύση.

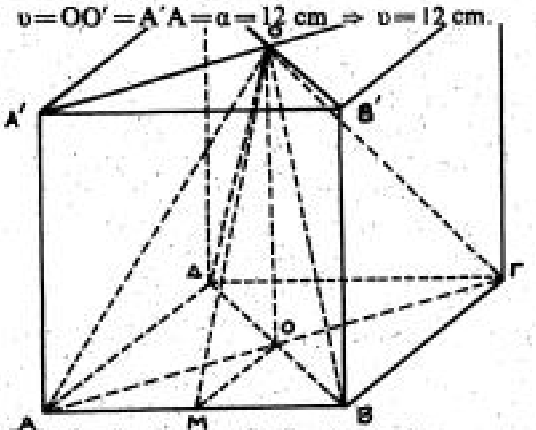
Ἔχουμε: $E=\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2=E \Rightarrow \alpha^2=144 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha=\sqrt{144} \Rightarrow \alpha=12$ cm

ὅπου α ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου.

Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδας Ο΄.ΑΒΓΔ εἶναι:

$\upsilon=OO'=A'A=\alpha=12$ cm $\Rightarrow \upsilon=12$ cm.



Γιὰ τὸν ὄγκο ποὺ μᾶς ζητᾶνε γράφουμε:

$$V=V_1-V_2 \quad (1)$$

ὅπου V_1 ὁ ὄγκος τοῦ κύβου καὶ V_2 ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδας. Ἐπομένως:

$$V=\alpha^3-\frac{1}{3}E_B\cdot\upsilon=\alpha^3-\frac{1}{3}\alpha^2\cdot\alpha=\alpha^3-\frac{1}{3}\alpha^3=$$

$$=\frac{2}{3}\alpha^3 \Rightarrow V=\frac{2}{3}\cdot 12^3 \Rightarrow V=1152 \text{ cm}^3.$$

Ἐπειδὴ τὸ ἀπόστημα Ο΄Μ συναντᾶ τὴν ΑΒ στὸ μέσο της Μ, ἡ ΜΟ ἑνώνει τὰ μέσα τῶν δύο πλευρῶν στὸ τρίγωνο ΑΒΓ καὶ ἄρα:

$$MO=\frac{B\Gamma}{2}=\frac{12}{2}=6 \Rightarrow MO=6 \text{ cm}.$$

Ἀπ' τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο Ο΄ΟΜ μποροῦμε τώρα νὰ βροῦμε τὸ ἀπόστημα h=Ο΄Μ τῆς κανονικῆς πυραμίδας Ο΄.ΑΒΓΔ.

Ἔχουμε: $O'M^2=O'O^2+OM^2 \Rightarrow x^2=12^2+6^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2=144+36 \Rightarrow x^2=180 \Rightarrow x=\sqrt{180} \Rightarrow$

$\Rightarrow x=13{,}4$ cm $\Rightarrow h=13{,}4$ cm.

Ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τῆς πυραμίδας εἶναι:

$$E=\frac{1}{2}\Pi_B\cdot h \Rightarrow E=\frac{1}{2}(4\cdot 12)\cdot 13{,}4 \Rightarrow E=321{,}6 \text{cm}^2.$$

Ἀσκήσεις ποὺ προτείνονται γιὰ λύση

Β.59 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ μὲ περίμετρο 48 cm. Στὴν πλευρά του ΑΔ παίρνουμε τὸ σημεῖο Ρ ἔτσι ὥστε $A P=\frac{3}{4}A\Delta$ καὶ στὴν ΒΓ τὸ σημεῖο Σ ἔτσι ὥστε $B\Sigma=\frac{1}{3}B\Gamma$. Ἂν Μ εἶναι τὸ μέσο τῆς πλευρᾶς ΑΒ νὰ βρεθεῖ τὸ ἐμβαδὸν καὶ ἡ περίμετρος τοῦ πενταγώνου ΜΣΓΔΡ.

Β.60 Ἕνα τετράγωνο ἔχει πλευρὰ 6 cm. Ἂν Ο εἶναι τὸ σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων του, Μ τὸ μέσο τῆς ΟΒ καὶ $M\Sigma \perp AB$, νὰ ὑπολογισθεῖ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ΑΟΜΣ.

Β.61 Σὲ κύκλο μὲ διάμετρο 12 cm φέρουμε δύο κάθετες ἀκτίνες ΟΑ καὶ ΟΒ. Νὰ βρεθοῦν:

α) Τὸ μῆκος τοῦ μικροῦ τόξου $\widehat{AB}$.

β) Τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ΑΒ.

γ) Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μικροῦ κυκλικοῦ τμήματος ποὺ ὁρίζει ἡ χορδὴ ΑΒ.

Β.62 Ἀπὸ δύο ὁμόκεντρους κύκλους ὁ ἐξωτερικὸς ἔχει μῆκος 62,8 cm καὶ ὁ ἐσωτερικὸς ἐμβαδὸν 113,04 cm². Στὸν ἐξωτερικὸ κύκλο παίρνουμε ἕνα τόξο $\widehat{\Lambda M}=40^0$. Ἂν οἱ ἀκτίνες ΟΛ καὶ ΟΜ συναντοῦν τὸν ἐσωτερικὸ κύκλο στὰ σημεῖα Λ΄ καὶ Μ΄ νὰ βρεθεῖ τὸ ἐμβαδὸν καὶ ἡ περίμετρος τοῦ σχήματος ΛΜΜ΄Λ΄.

Β.63 Δίνεται ὀρθογώνιο καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΑΒΓ μὲ ὑποτείνουσα ΒΓ = 6 cm. Μὲ κέντρο τὴν κορυφὴ Γ καὶ ἀκτίνα τὴν κάθετη πλευρὰ ΓΑ γράφουμε τόξο μέσα στὸ τρίγωνο ποὺ συναντᾶ τὴν ὑποτείνουσα ΒΓ στὸ Δ. Νὰ βρεθεῖ τὸ ἐμβαδὸν καὶ ἡ περίμετρος τοῦ καμπυλογράμμου τριγώνου ΑΔΒ.

Β.64 Ἡ διαγώνιος τῆς βάσης ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 25 cm καὶ τὸ μῆκος του 2 dm. Ἂν τὸ ὕψος του εἶναι ἴσο μὲ τὰ 2/7 τῆς περιμέτρου τῆς βάσης του, νὰ βρεθοῦν: α) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς του ἐπιφάνειας. β) Ὁ ὄγκος του γ) Τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου του.

Β.65 Δίνεται ὀρθογώνιο καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΑΟΒ μὲ ὑποτείνουσα ΑΒ = 10 cm. Στὴν κορυφή του Ο φέρουμε τὴν ΟΚ κάθετη στὸ ἐπίπεδο τοῦ τριγώνου καὶ παίρνουμε πάνω σ' αὐτὴ τμῆμα ΟΚ = ΟΑ = ΟΒ. Νὰ βρεθεῖ ὁ ὄγκος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τῆς πυραμίδας Κ.ΟΑΒ.

Β.66 Δίνεται ὀρθογώνιο ΑΒΓ ($A=90^0$) μὲ ΑΒ = 15 cm καὶ ἐμβαδὸν 150 cm². Αὐτὸ στρέφεται μιὰ ὁλόκληρη στροφὴ γύρω ἀπ' τὴν κάθετη πλευρὰ ΑΓ. Νὰ βρεθεῖ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας καὶ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ ποὺ παράγεται.