Authors: Τζανάκης Ν., Ν. Παγάνης

Title: Γ΄Τάξη Γυμνασίου

Abstract: Άλγεβρα, παραγοντοποίηση, εξισώσεις, ανισώσεις, λύση και διερεύνηση συστημάτων, Γεωμετρία, λυμένες ασκήσεις.

Creator: HDML

ΓΙΑ ΤΗΝ Γ' ΤΑΞΗ

ΑΛΓΕΒΡΑ

I) Παραγοντοποίηση.

Γιὰ τὴν παραγοντοποίηση τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων εἶναι ἀπαραίτητο νὰ γνωρίζομε ὡρισμένες ἀπὸ τὶς βασικὲς ταυτότητες. Οἱ πιὸ χρήσιμες βρίσκονται στὸν παρακάτω πίνακα:

1.	$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$
2.	$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$
3.	$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$
4.	$Ax^2+Bx+\Gamma=A\left(x+\dfrac{B}{2A}\right)^2-\dfrac{B^2-4A\Gamma}{4A}$
5.	$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$
6.	$(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$
7.	$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$
8.	$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$

Ἐφαρμογὲς τῶν παραπάνω ταυτοτήτων στὴν παραγοντοποίηση.

1) Νὰ γίνει γινόμενο ἡ παράσταση:

$$\Pi=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\alpha\gamma.$$

Λύση.

$$\Pi=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+\gamma^2-2\beta\gamma-2\alpha\gamma$$

καὶ **ἐφαρμόζοντας τὴν ταυτότητα 1**, ἔχομε:

$$\Pi=(\alpha+\beta)^2+\gamma^2-2\beta\gamma-2\alpha\gamma=$$

$$=(\alpha+\beta)^2+\gamma^2-2\gamma(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)^2-2(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2.$$

Ἐφαρμόζομε τὴν ταυτότητα 2, βάζοντας ὅπου A τὸ $\alpha+\beta$ κι' ὅπου B τὸ γ, ὁπότε:

$$\Pi=(\alpha+\beta)^2-2(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2=[(\alpha+\beta)-\gamma]^2=(\alpha+\beta-\gamma)^2.$$

Δηλαδὴ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\alpha\gamma=(\alpha+\beta-\gamma)^2$.

2) Νὰ γίνει γινόμενο ἡ παράσταση:

$$\Pi=x^4-14x^2y^2+y^4.$$

Λύση.

Ἀπὸ τὴν παράσταση Π ξεχωρίζομε τὸ x^4+y^4. Τί βλέπομε; εἶναι ἄθροισμα δυὸ τετραγώνων, γιατί:

$$x^4+y^4=(x^2)^2+(y^2)^2 \qquad (1).$$

Πρέπει νὰ μᾶς ἔρθει τότε στὸ μυαλὸ **ἡ ταυτότητα 1.** $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ ἀπ' ὅπου βλέπομε ὅτι $A^2+B^2=(A+B)^2-2AB$.

Ἂν ὅπου A βάλομε τὸ x^2 καὶ ὅπου B τὸ y^2 θὰ βροῦμε:

$$(x^2)^2+(y^2)^2=(x^2+y^2)^2-2(x^2)(y^2)=(x^2+y^2)-2x^2y^2,$$

καὶ σύμφωνα μὲ τὴν ἰσότητα (1),

$$x^4+y^4=(x^2)^2+(y^2)^2=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2.$$

Ἄρα:

$$\Pi=x^4+y^4-14x^2y^2=[(x^2+y^2)^2-2x^2y^2]-14x^2y^2=$$

$$=(x^2+y^2)^2-16x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(4xy)^2.$$

Καταλήξαμε ἔτσι σὲ διαφορὰ τετραγώνων, ὁπότε **ἐφαρμόζομε τὴν ταυτότητα 3**, βάζοντας ὅπου A τὸ x^2+y^2 καὶ ὅπου B τὸ $4xy$. Ἔτσι:

$$\Pi=(x^2+y^2+4xy)(x^2+y^2-4xy), \quad \text{δηλ.}$$

$$x^4-14x^2y^4+y^4=(x^2+4xy+y^2)(x^2-4xy+y^2).$$

3) Νὰ γίνει γινόμενο ἡ παράσταση:

$$f(x)=x^2-13x+36.$$

Λύση.

Ἡ παράσταση αὐτὴ μᾶς φέρνει ἀμέσως στὸ νοῦ **τὴν ταυτότητα 4.**

Ἐδῶ $A=1,\ \ B=-13,\ \ \Gamma=36$ ἄρα:

$$x^2-13x+36=1\cdot\left(x+\frac{-13}{2\cdot 1}\right)-\frac{(-13)^2-4\cdot1\cdot36}{4\cdot 1}=$$

$$=\left(x-\frac{13}{23}\right)^2-\frac{169-144}{4}=$$

$$=\left(x-\frac{13}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=\left(x-\frac{13}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2.$$

Καταφέραμε, λοιπόν, νὰ κάνομε τὴν παράσταση f(x) διαφορὰ δυὸ τετραγώνων. **Ἐφαρμόζομε τώρα τὴν ταυτότητα 3**, βάζοντας στὴ θέση τοῦ A τὸ $x-\dfrac{13}{2}$ καὶ στὴ θέση τοῦ B τὸ $\dfrac{5}{2}$, ὁπότε ἔχομε:

$$x^2-13x+36=\left(x-\frac{13}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2=$$

$$=\left[\left(x-\frac{13}{2}\right)+\frac{5}{2}\right]\left[\left(x-\frac{13}{2}\right)-\frac{5}{2}\right]=$$

$$=\left(x-\frac{8}{2}\right)\left(x-\frac{18}{2}\right)=(x-4)(x-9).$$

Δηλ. $x^2-13x+36=(x-4)(x-9)$.

Ποῦ χρησιμεύει αὐτό; Ἄς ὑποθέσομε ὅτι μᾶς ἔλεγαν νὰ λύσομε τὴν ἐξίσωση:

$$x^2-13x+36=0.$$

Θὰ σκεφτόμαστε ὡς ἑξῆς: Βρήκαμε ὅτι: $x^2-13x+36=(x-4)(x-9)$, γι' αὐτὸ θὰ ἰσχύει:

$$x^2-13x+36=0 \Leftrightarrow (x-4)(x-9)=0.$$

Ἀλλὰ γιὰ νὰ εἶναι $(x-4)(x-9)=0$, θὰ πρέπει $x-4=0$, δηλ. $x=4$ ἢ $x-9=0$, δηλ. $x=9$.

Ἔτσι οἱ λύσεις τῆς ἐξίσωσης:

$x^2-13x+36=0$ εἶναι οἱ $x=4$ καὶ $x=9$.

4) Νὰ γίνει γινόμενο ἡ παράσταση:

$$\Pi=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+28\beta^3.$$

Λύση. Ἡ παράσταση αὐτὴ μᾶς φέρνει στὸ μυαλὸ τὴν **ταυτότητα 5**, μὲ τὴ διαφορὰ ὅτι τώρα δὲν ἔχομε β^3 ἀλλὰ $28\beta^3$. Γι' αὐτὸ θὰ γράψομε:

$28\beta^3=\beta^3+27\beta^3=\beta^3+3^3\cdot\beta^3=\beta^3+(3\beta)^3$, ὁπότε:

$$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+28\beta^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3+(3\beta)^3=$$
$$=(\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3)+(3\beta)^3=(\alpha+\beta)^3+(3\beta)^3.$$

Δηλ. $\Pi=(\alpha+\beta)^3+(3\beta)^3$.

Ἐπειδὴ ἔχομε ἄθροισμα δυὸ κύβων θὰ ἐφαρμόσομε τὴν **ταυτότητα 7**, στὴ θέση τοῦ A τὸ $\alpha+\beta$ καὶ στὴν θέση τοῦ B τὸ 3β, καὶ θὰ ἔχομε:

$$\Pi=(\alpha+\beta)^3+(3\beta)^3=$$
$$=[(\alpha+\beta)+3\beta][(\alpha+\beta)^2+(\alpha+\beta)3\beta+(3\beta)^2]=$$
$$=(\alpha+4\beta)[(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+(3\alpha\beta+3\beta^2)+9\beta^2]=$$
$$=(\alpha+4\beta)(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+3\alpha\beta+3\beta^2+9\beta^2)=$$
$$=(\alpha+4\beta)(\alpha^2+5\alpha\beta+13\beta^2) \quad \text{ἄρα}$$
$$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+28\beta^3=(\alpha+4\beta)(\alpha^2+5\alpha\beta+13\beta^2).$$

5) Νὰ ἁπλοποιηθεῖ τὸ κλάσμα:

$$K=\frac{x^3-3x^2y+4y^3}{x^4-16y^4},$$

ἂν ὑποτεθεῖ ὅτι $(x-2y)(x+2y)\neq 0$ καὶ $x, y\neq 0$.

Λύση. Ἄς πάρομε πρῶτα τὸν ἀριθμητή:

$$A=x^3-3x^2y+4y^3.$$

Θὰ προσπαθήσομε νὰ χωρίσομε τὰ μονώνυμα ποὺ ἀπαρτίζουν τὸ ἄθροισμα A σὲ ὁμάδες. Τὸ $4y^3$ θὰ τὸ γράψομε $3y^3+y^3$, κι ἔτσι:

$$A=x^3-3x^2y+3y^3+y^3$$

καὶ εἶναι φανερὸ τώρα ποιὸς θὰ εἶναι ὁ χωρισμὸς σὲ ὁμάδες:

$$A=(x^3+y^3)+(3y^3-3x^2y) \quad (1).$$

Εἶναι $3y^3-3x^2y=3y(y^2-x^2)=3y(y-x)(y+x)$, ἀπὸ τὴν **ταυτότητα 3**. Ἐπίσης:

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2),$$

ἀπὸ τὴν **ταυτότητα 7**.

Ἀντικαθιστώντας στὴν (1) τὰ $3y^3-3x^2y$ καὶ x^3+y^3 μὲ τὰ ἴσα τους ἔχομε:

$$A=(x+y)(x^2-xy+y^2)+3y(y-x)(x+y)=$$
$$=(x+y)[(x^2-xy+y^2)+3y(y-x)]=$$
$$=(x+y)[(x^2-xy+y^2)+(3y^2-3yx)]=$$
$$=(x+y)(x^2-xy+y^2+3y^2-3yx)=$$
$$=(x+y)(x^2-4xy+4y^2).$$ Ἀλλὰ $x^2-4xy+4y^2=$
$$=x^2-2x(2y)+(2y)^2=(x-2y)^2,$$

σύμφωνα μὲ τὴν **ταυτότητα 2** (ἂν στὴ θέση τοῦ A βάλομε τὸ x καὶ στὴ θέση τοῦ B τὸ 2y). Ἔτσι λοιπόν:

$$A=(x+y)(x^2-4xy+4y^2)=(x+y)(x-2y)^2 \quad (2).$$

Ἄς πάρομε τώρα τὸν παρονομαστή:

$$\Pi=x^4-16y^4.$$

Τώρα ἔχομε διαφορὰ τετραγώνων γιατί:

$$x^4-16y^4=(x^2)^2-(4y^2)^2=(x^2+4y^2)(x^2-4y^2)$$

σύμφωνα μὲ τὴν **ταυτότητα 3**. Ἀλλὰ καὶ τὸ x^2-4y^2 εἶναι διαφορὰ τετραγώνων:

$$x^2-4y^2=x^2-(2y)^2=(x+2y)(x-2y),$$

σύμφωνα μὲ τὴν **ταυτότητα 3** καὶ πάλι. Ἔτσι:

$$x^4-16y^4=(x^2+4y^2)(x^2-4y^2)=(x^2+4y^2)(x+2y)(x-2y),$$

δηλ. $\Pi=(x^2+4y^2)(x+2y)(x-2y) \quad (3)$

Τώρα καταλαβαίνουμε γιατὶ στὴν ὑπόθεση μᾶς ἔδωσαν τοὺς περιορισμοὺς $x, y\neq 0$ καὶ $(x-2y)(x+y)$. Ἐπειδὴ οἱ περιορισμοὶ αὐτοὶ μᾶς ἐξασφαλίζουν ὅτι ὁ παρονομαστὴς Π εἶναι $\neq 0$ ὁπότε τὸ κλάσμα K ἔχει ἔννοια.

Θὰ εἶναι λοιπὸν $K=\dfrac{A}{\Pi}$ καὶ ἀντικαθιστώντας τὰ A καὶ Π μὲ τὰ ἴσα τους στὶς ἰσότητες (2) καὶ (3) ἔχομε:

$$K=\frac{(x+y)(x-2y)^2}{(x^2+4y^2)(x+2y)(x-2y)}.$$

Ἐπειδὴ ἀπὸ τὴν ὑπόθεσή μας εἶναι $x-2y\neq 0$ καὶ τὸ $x-2y$ εἶναι παράγοντας τοῦ γινομένου καὶ στὸν ἀριθμητὴ καὶ στὸν παρονομαστή, μποροῦμε νὰ τὸ διαγράψομε καὶ ἡ ἁπλοποιημένη μορφὴ τοῦ K θὰ εἶναι τότε:

$$K=\frac{(x+y)(x-2y)}{(x^2+4y^2)(x+2y)}.$$

II) Λύση καὶ διερεύνηση ἐξισώσεων.

1) Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση :

$$(2x+5)(17x+6)=(6x+15)(x-7).$$

Λύση.

Ἂν καὶ ἡ ἐξίσωση αὐτὴ εἶναι 2ου βαθμοῦ, ἡ λύση της ἀνάγεται στὴ λύση ἐξισώσεων 1ου βαθμοῦ. Δηλαδὴ δὲν πρέπει νὰ ξεγελαστοῦμε καὶ νὰ νομίσομε ὅτι θὰ κάνομε τὶς πράξεις. Μὲ λίγη προσοχὴ βλέπομε ὅτι $6x+15=3(2x+5)$ ὁπότε τὸ 1ο καὶ τὸ 2ο μέλος ἔχουν κοινὸ παράγοντα τὸ $2x+5$. Ἔτσι ἡ ἐξίσωσή μας γράφεται :

$$(2x+5)(17x+6)=3(2x+5)(x-7) \quad \text{ἤ}$$

$$(2x+5)(17+6)-3(2x+5)(x-7)=0 \quad \text{ἤ}$$

ἀκόμη, $(2x+5)[(17x+6)-3(x-7)]=0$. Ἄρα

$(2x+5)(17x+6-3x+21)=0 \Leftrightarrow (2x+5)(14x+27)=0.$

Θὰ πρέπει λοιπόν :

$$2x+5=0 \quad \text{ἤ} \quad 14x+27=0.$$

Λύνοντάς τις κατὰ τὰ γνωστὰ βρίσκομε ἀπ' τὴν πρώτη $x=-\dfrac{5}{2}$ καὶ ἀπὸ τὴ δεύτερη $x=-\dfrac{27}{14}$.

Ἄρα οἱ λύσεις τῆς ἀρχικῆς ἐξίσωσης εἶναι :

$$\boxed{x=-\frac{5}{2}} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{x=-\frac{27}{14}}$$

2) Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση ;

$$\frac{1}{2x+12}-\frac{1}{3x-2}-\frac{5}{30x-13}=0.$$

Λύση.

Πρῶτα—πρῶτα πρέπει νὰ ὑποθέσομε ὅτι ὅλοι οἱ παρονομαστὲς εἶναι $\neq 0$. Δηλαδή :

$2x+1\neq 0, \quad 3x-2\neq 0, \quad 30x-13\neq 0$ δηλ.

$$\boxed{x\neq -\frac{1}{2}, \quad x\neq \frac{2}{3}, \quad x\neq \frac{13}{30}}$$

Μόνο μὲ τοὺς περιορισμοὺς αὐτοὺς εἴμαστε σὲ θέση νὰ συνεχίσομε ἀπαλείφοντας τοὺς παρονομαστὲς κ.λ.π.

$$\text{Ε.Κ.Π}=(2x+1)(3x-2)(30x-13)\neq 0$$

ἀπ' ὅπου ἀπαλείφοντας τοὺς παρονομαστὲς βρίσκομε ὅτι ἡ ἐξίσωσή μας εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τήν :

$$(3x-2)(30x-13)-(2x+1)(30x-13)-5(2x+1)(3x-2)=0$$

Κάνομε τὶς πράξεις :

$$(90x^2-39x-60x+26)-(60x^2-26x+30x-13)-$$
$$-5(6x^2-4x+3x-2)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (90x^2-99x+26)-(60x^2+4x-13)-$$
$$-(30x^2-5x-10)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 90x^2-99x+26-60x^2-4x+13-$$
$$-30x^2+5x+10=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (90x^2-60x^2-30x^2)-99x-$$
$$-4x+5x+26+13+10=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -98x+49=0 \Leftrightarrow -98x=-49 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-49}{-98}=\frac{1}{2}.$$

Αὐτὴ ἡ λύση δὲν ἀντιβαίνει στοὺς περιορισμοὺς ποὺ βάλαμε στὴν ἀρχή, γιατί :

$$\frac{1}{2}\neq -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}\neq \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{2}\neq \frac{13}{30},$$

ἄρα εἶναι δεκτή. Ἔτσι βρήκαμε ὅτι :

$$\boxed{x=\frac{1}{2}}$$

3) Νὰ διερευνηθεῖ ἡ ἐξίσωση : (παράμετρος εἶναι τὸ λ) :

$$\lambda(\lambda x-14)=4(x+7).$$

Λύση.

Θὰ κάνομε πρῶτα τὶς πράξεις :

$$\lambda^2x-14\lambda=4x+28 \Leftrightarrow \lambda^2x-4x=28+14\lambda \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda^2-4)x=14\lambda+28.$$

Ἀλλὰ $\quad \lambda^2-4=\lambda^2-2^2=(\lambda-2)(\lambda+2)$

ὁπότε ἡ ἐξίσωσή μας γράφεται :

$$(\lambda-2)(\lambda+2)x=14\lambda+28 \quad (1).$$

Ἐδῶ ὁ συντελεστὴς τοῦ x εἶναι ὁ $(\lambda-2)(\lambda+2)$ καὶ γιὰ νὰ ἔχει μιά, ἀκριβῶς, λύση ἡ ἐξίσωση θὰ πρέπει νὰ εἶναι $\neq 0$. Θὰ πρέπει δηλαδή :

$$(\lambda-2)(\lambda+2)\neq 0.$$

Ἄρα καὶ ὁ $\lambda-2$ καὶ ὁ $\lambda+2$ θὰ πρέπει νὰ εἶναι διαφορετικοὶ ἀπ' τὸ 0. Δηλαδή :

$\lambda-2\neq 0$ καὶ $\lambda+2\neq 0$ ἤ $\boxed{\lambda\neq 2 \text{ καὶ } \lambda\neq -2}$

Καὶ ἡ λύση τῆς ἐξίσωσης θὰ εἶναι τότε (δεῖτε τὴν ἰσότητα (1)) :

$$\boxed{x=\frac{14\lambda+28}{(\lambda-2)(\lambda+2)}}$$

Ἂς δοῦμε τώρα τί θὰ συμβεῖ ὅταν:

$$(\lambda-2)(\lambda+2)=0.$$

Αὐτὸ θὰ γίνει ἢ ὅταν $\lambda-2=0$ δηλ. $\lambda=2$ ἢ ὅταν:

$$\lambda+2=0 \quad \text{δηλ.} \quad \lambda=-2.$$

Θὰ ἐξετάσομε τὶς δυὸ περιπτώσεις χωριστά:

i) $\lambda=2$. Τότε ἀπὸ τὴν (1) ἔχομε:

$$0\cdot x=14\cdot 2+28=28+28=56, \quad \text{ἢ} \quad 0=56,$$

ποὺ εἶναι ἀδύνατο. Ἄρα **ὅταν $\lambda=2$ ἡ ἐξίσωση εἶναι ἀδύνατη.**

ii) $\lambda=-2$. Τότε ἀπὸ τὴν (1) ἔχομε:

$$0\cdot x=14(-2)+28=-28+28=0, \quad \text{δηλ.} \quad 0\cdot x=0$$

ποὺ ἀληθεύει γιὰ ὅλα τὰ x (εἶναι ταυτότητα). Ἄρα, **ὅταν $\lambda=-2$ ἡ ἐξίσωση εἶναι ἀόριστη.**

4) Νὰ διερευνηθεῖ ἡ ἐξίσωση:

$$(\lambda-1)x+\frac{3}{\lambda+1}+(\lambda^2+2\lambda-3)x+35=0.$$

Λύση.

Πρῶτα πρέπει νὰ βάλομε τὸν πελιορισμὸ $\lambda+1\neq 1$, δηλ. $\boxed{\lambda\neq-1}$.

Σὲ κάθε ἐνέργειά μας παρακάτω θὰ παίρνομε ὑπ' ὄψη μας τὸν περιορισμὸ αὐτό.

Ἀπαλείφομε τὸν παρονομαστὴ καὶ κάνομε τὶς πράξεις:

$$(\lambda+1)(\lambda-1)x+3+(\lambda+1)(\lambda^2+2\lambda-3)x+35(\lambda+1)=0.$$

Ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος ὅρος τοῦ πρώτου μέλους ἔχουν κοινὸ παράγοντα τὸν $(\lambda+1)x$.

Ἔτσι ἡ ἐξίσωσή μας γράφεται:

$$(\lambda+1)x[(\lambda-1)+(\lambda^2+2\lambda-3)]+3+35(\lambda+1)=0 \quad \text{ἢ}$$

$$(\lambda^2+3\lambda-4)(\lambda+1)x+35\lambda+38=0 \qquad (1).$$

Θὰ δοῦμε τώρα μήπως μποροῦμε νὰ κάνομε τὸ $\lambda^2+3\lambda-4$ γινόμενο. Ἀρκεῖ νὰ σκεφτοῦμε ὅτι $-4=-3-1$, ὁπότε $\lambda^2+3\lambda-4=\lambda^2+3\lambda-3-1$.

Τώρα εἶναι φανερὸ πῶς θὰ χωρίσομε σὲ ὁμάδες τοὺς ὅρους τοῦ $\lambda^2+3\lambda-3-1$. Πραγματικά:

$$\lambda^2+3\lambda-3-1=(\lambda^2-1)+3\lambda-3=(\lambda^2-1)+3(\lambda-1)=$$

$$=(\lambda+1)(\lambda-1)+3(\lambda-1)=(\lambda-1)[(\lambda+1)+3]=$$

$$=(\lambda-1)(\lambda+4), \text{ δηλ. } \lambda^2+3\lambda-4=(\lambda-1)(\lambda+4)$$

καὶ ἀπὸ τὴν (1) τότε:

$$(\lambda-1)(\lambda+4)(\lambda+1)x+35\lambda+38=0 \quad \text{ἢ}$$

$$(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+4)x=-35\lambda-48 \qquad (2).$$

Ὁ συντελεστὴς τοῦ x εἶναι ὁ $(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+4)$.

Ἄρα ὅταν $(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+4)\neq 0$, τότε:

$$\boxed{x=\frac{-35\lambda-38}{(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+4)}}.$$

Ἔστω τώρα ὅτι $(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+4)=0$. Τότε ἢ $\lambda-1=0$ ἢ $\lambda+1=0$ ἢ $\lambda+4=0$.

Ἀλλὰ ἀπὸ τὴν ἀρχὴ ἔχομε ὑποθέσει ὅτι $\lambda\neq-1$, δηλ. $\lambda+1\neq 0$ (θυμηθεῖτε τὸν περιορισμὸ ποὺ βάλαμε).

Ἔτσι μένουν δυὸ περιπτώσεις: $\lambda-1=0$, δηλ. $\lambda=1$ ἢ $\lambda+4$, δηλ. $\lambda=-4$.

i) Ἂν $\lambda=1$, τότε ἀπὸ τὴ (2) ἔχομε:

$0\cdot x=-35\cdot 1-38=-73$, δηλ. $0=-73$ ποὺ εἶναι ἀδύνατο.

Ἄρα γιὰ $\lambda=1$ ἡ ἐξίσωση εἶναι ἀδύνατη.

ii) Ἂν $\lambda=-4$, τότε ἀπὸ τὴ (2) ἔχομε:

$$0\cdot x=-35(-4)-38=140-38=102,$$

δηλ. $0=102$ ἀδύνατο.

Ἄρα γιὰ $\lambda=-4$ ἡ ἐξίσωση εἶναι ἀδύνατη.

III) Ἀνισώσεις.

1) Πρόβλημα: Νὰ βρεθοῦν ὅ λ ο ι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ μὲ τὴν ἰδιότητα: «Τὸ πενταπλάσιό τους ξεπερνᾶ τὸ 180, τὸ ἑξαπλάσιό τους ἂν τοῦ βγάλομε 90 εἶναι μικρότερο ἀπὸ 200 καὶ τὸ ἑπταπλάσιό τους ἂν ἐλαττωθεῖ κατὰ 93 εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ 200».

Λύση. Ἂς «μεταφράσομε» αὐτὸ τὸ πρόβλημα σὲ μαθηματικὴ γλῶσσα: Ἔστω ὅτι ὁ x εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε ἀριθμὸς μὲ τὴν ἀπαιτούμενη ἰδιότητα. Τότε τὸ πενταπλάσιό του ξεπερνᾶ τὸ 180, δηλ.

$$5x>180 \qquad (1).$$

Ἐπίσης, τὸ ἑξαπλάσιό του, ἂν τοῦ βγάλομε 90 εἶναι μικρότερο ἀπὸ 200, δηλ.

$$6x-90<200 \qquad (2).$$

Τέλος, τὸ ἑπταπλάσιό του ἂν ἐλαττωθεῖ κατὰ 93 εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ 200, δηλ.

$$7x-93>200 \qquad (3).$$

Ἄρα οἱ ἀριθμοὶ μὲ τὴν ἰδιότητα ποὺ μᾶς λέει τὸ πρόβλημα ἱκανοποιοῦν τὶς τρεῖς ἀνισώσεις (1), (2) καὶ (3) καί, ἀκόμη, εἶναι φανερὸ ὅτι **κάθε ἀκέραιος ἀριθμὸς ποὺ ἱκανοποιεῖ καὶ τὶς τρεῖς ἀνισώσεις (1), (2), (3) συγχρόνως, θὰ ἔχει τὴν ἀπαιτούμενη ἀπὸ τὸ πρόβλημά μας ἰδιότητα.**

Αὐτὸ μᾶς λέει ἀμέσως ὅτι θὰ πρέπει νὰ βροῦμε γιὰ ποιοὺς ἀριθμοὺς οἱ ἀνισώσεις (1), (2) καὶ (3) ἀληθεύουν συγχρόνως, ἤ, διαφορετικὰ γιὰ ποιοὺς ἀριθμοὺς συναληθεύουν οἱ ἀνισώσεις:

$$5x>180,\quad 6x-90<200,\quad 7x-93>200.$$

Ἀπὸ τὴν πρώτη ἔχουμε:

$$5x>180 \Leftrightarrow x>\frac{180}{5}=36, \text{ δηλ. } \boxed{x>36}.$$

Ἀπὸ τὴ δεύτερη ἔχομε:

$$6x-90<200 \Leftrightarrow 6x<200+90 \Leftrightarrow 6x<290 \Leftrightarrow$$

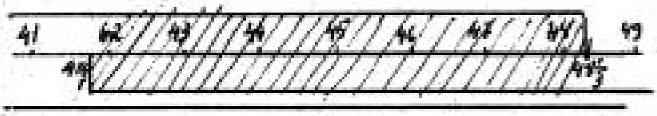
$$\Leftrightarrow x<\frac{290}{6}, \text{ ἄρα } \boxed{x<48+\frac{1}{3}}.$$

Ἀπὸ τὴν τρίτη ἔχομε:

$$7x-93>200 \Leftrightarrow 7x>200+93 \Leftrightarrow 7x>293 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x>\frac{293}{7}, \text{ ἄρα } \boxed{x>41+\frac{6}{7}}.$$

Ἂς παραστήσομε γραφικὰ τὰ σύνολα λύσεων τῶν τριῶν ἀνισώσεων.



Οἱ τρεῖς ἀνισώσεις, λοιπόν, συναληθεύουν ὅταν τὸ x ἀνήκει στὸ σύνολο $\left\{x: 41+\frac{6}{7}<x<48+\frac{1}{3}\right\}$.

Δὲ μένει πιὰ παρὰ νὰ βροῦμε ποιοὶ **ἀκέραιοι** βρίσκονται στὸ σύνολο αὐτό, δηλαδὴ ποιοὶ ἀκέραιοι εἶναι μεγαλύτεροι ἀπ' τὸ $41+\frac{6}{7}$ καὶ μικρότεροι ἀπ' τὸ $48+\frac{1}{3}$.

Οἱ ἀκέραιοι αὐτοὶ εἶναι οἱ: 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48.

Αὐτοὶ εἶναι ὅλοι οἱ ἀκέραιοι μὲ τὴν ἰδιότητα ποὺ ἀπαιτεῖ τὸ πρόβλημά μας.

2) Νὰ λυθεῖ ἡ ἀνίσωση: $10x^2-x-24<0$.

Λύση.

Ἡ ἀνίσωση αὐτὴ εἶναι 2ου βαθμοῦ. Γι' αὐτὸ πρώτη μας δουλειὰ θἆναι νὰ δοῦμε ἂν μποροῦμε νὰ κάνομε τὸ 1ο μέλος γινόμενο κι ἔτσι νὰ πᾶμε σὲ γνωστῆς μορφῆς ἀνίσωση.

Τὸ $10x^2-x-24$ μᾶς φέρνει στὸ μυαλὸ τὴν ταυτότητα 4.

Ἐδῶ $A=10$, $B=-1$, $\Gamma=-24$, ὁπότε:

$$10x^2-x-24=10\left(x+\frac{-1}{2\cdot 10}\right)^2-\frac{(-1)^2-4\cdot 10(-24)}{4\cdot 10}=$$

$$=10\left(x-\frac{1}{20}\right)^2-\frac{1+960}{40}=$$

$$=10\left(x-\frac{1}{20}\right)^2-\frac{961}{40}=\frac{400\left(x-\frac{1}{20}\right)^2-961}{40}=$$

$$=\frac{20^2\left(x-\frac{1}{20}\right)^2-31^2}{40}=\frac{\left[20\left(x-\frac{1}{20}\right)\right]^2-31^2}{40}=$$

$$=\frac{(20x-1)^2-31^2}{40}.$$

Ἀλλὰ ἀπὸ τὴν ταυτότητα 3, γιὰ $A=20x-1$ καὶ $B=31$ βρίσκομε:

$$(20x-1)^2-31^2=[(20x-1)+31][(20x-1)-31]=$$

$$=(20x+30)(20x-32)=[10(2x+3)][4(5x-8)]=$$

$$=40(2x+3)(5x-8).$$

Ἄρα:

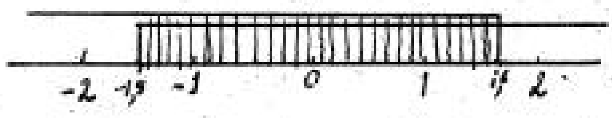
$$\frac{(20x-1)^2-31^2}{40}=\frac{40(2x+3)(5x-8)}{40}=(2x+3)(5x-8),$$

δηλ. $10x^2-x-24=(2x+3)(5x-8)$ καὶ ἡ ἀνίσωση $10x^2-x-24<0$ εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν ἀνίσωση $(2x+3)(5x-8)<0$ ποὺ εἶναι γνωστῆς μορφῆς: (δεῖτε λ. χ. τὴν ἄλγεβρα τῆς Β' τάξης στὸ 3ο τεῦχος τοῦ «Εὐκλείδη»).

Γιὰ τὴ λύση της διακρίνομε δύο περιπτώσεις:

i) $2x+3>0$ καὶ $5x-8<0$ (συναλήθευση τῶν δυὸ ἀνισώσεων).

Ἀπὸ τὴν πρώτη ἔχομε $x>-\frac{3}{2}$ δηλ. $x>-1{,}5$ καὶ ἀπὸ τὴ δεύτερη $x<\frac{8}{5}$, δηλ. $x<1{,}6$.



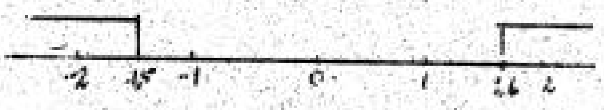
Ἄρα στὴν περίπτωση (i) ἔχομε $-1{,}5<x<1{,}6$.

ii) $2x+3<0$ καὶ $5x-8>0$ (συναλήθευση τῶν δυὸ ἀνισώσεων).

Ἀπὸ τὴν πρώτη ἔχομε $x < -\frac{3}{2}$ δηλ. $x < -1{,}5$

καὶ ἀπὸ τὴ δεύτερη $x > \frac{8}{5}$, δηλ. $x > 1{,}6$.

Τώρα βλέπομε ὅτι οἱ δυὸ ἀνισώσεις δὲν συναληθεύουν.



Ἡ περίπτωση (ii) λοιπὸν ἀποκλείεται.

Ἔτσι τὸ σύνολο τῶν λύσεων τῆς ἀνίσωσης

$$10x^2 - x - 24 < 0$$

εἶναι αὐτὸ ποὺ βρήκαμε στὴν περίπτωση (i), δηλ.

$$\{x : -1{,}5 < x < 1{,}6\}.$$

3) Νὰ λυθεῖ ἡ ἀνίσωση:

$$10x^2 - x - 24 > 0.$$

Λύση.

Βρήκαμε στὸ παράδειγμα 2 ὅτι:

$$10x^2 - x - 24 = (2x+3)(5x-8).$$

Ἄρα ἡ ἀνίσωση $10x^2 - x - 24 > 0$ εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν ἀνίσωση $(2x+3)(5x-8) > 0$. Θὰ λύσομε κατὰ τὰ γνωστὰ αὐτὴ τὴν ἀνίσωση: (δεῖτε καὶ πάλι τὴν ἄλγεβρα τῆς Β΄ τάξης στὸ 3ο τεῦχος τοῦ «Εὐκλείδη»).

Διακρίνομε δυὸ περιπτώσεις:

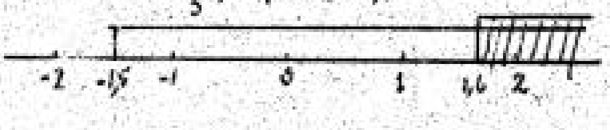
i) $2x+3>0$ καὶ $5x-8>0$ (συναλήθευση τῶν δυὸ ἀνισώσεων).

Ἀπὸ τὴν πρώτη ἔχομε:

$$x > -\frac{3}{2}, \text{ δηλ. } x > -1{,}5.$$

Ἀπὸ τὴ δεύτερη ἔχομε:

$$x > \frac{8}{5}, \text{ δηλ. } x > 1{,}6.$$



Ἄρα οἱ δυὸ ἀνισώσεις συναληθεύουν ὅταν:

$$x > 1{,}6.$$

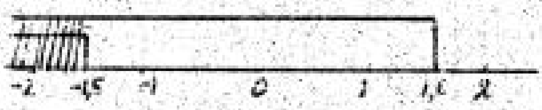
ii) $2x+3<0$ καὶ $5x-8<0$ (συναλήθευση τῶν δυὸ ἀνισώσεων):

Ἀπὸ τὴν πρώτη ἔχομε:

$$x < -\frac{3}{2}, \text{ δηλ. } x < -1{,}5.$$

Ἀπὸ τὴ δεύτερη ἔχομε:

$$x < \frac{8}{5}, \text{ δηλ. } x < 1{,}6.$$



Ἄρα οἱ δυὸ ἀνισώσεις συναληθεύουν ὅταν:

$$x < -1{,}5.$$

Συμπέρασμα: Ἡ ἀνίσωση $10x^2 - x - 24 > 0$ θὰ ἀληθεύει καὶ στὴν περίπτωση (i) καὶ στὴν περίπτωση (ii), δηλ. **θὰ ἀληθεύει καὶ γιὰ τὰ x ποὺ εἶναι $> 1{,}6$ καὶ γιὰ τὰ x ποὺ εἶναι $< -1{,}5$.**

Διαφορετικά: Τὸ σύνολο τῶν λύσεων τῆς $10x^2 - x - 24 > 0$ εἶναι τὸ $\{x :$ ἢ $x > 1{,}6$ ἢ $x < -1{,}5\}$.

IV) Λύση και διερεύνηση συστημάτων.

1) Λίγα λόγια γιὰ τὶς ὁρίζουσες: Πολλὲς φορὲς στὰ Μαθηματικὰ (ἰδίως στὰ λεγόμενα ἀνώτερα) μᾶς διευκολύνουν πολὺ οἱ ὁρίζουσες. Στὴ λύση καὶ διερεύνηση τῶν συστημάτων θὰ μᾶς διευκολύνει σημαντικὰ ἡ ἁπλούστερη μορφὴ ὁρίζουσας:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}.$$

Μὲ τὸ σύμβολο αὐτὸ ἐννοοῦμε τὸν ἀριθμὸ

$$\alpha\delta - \beta\gamma. \quad \text{Δηλ.} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma.$$

Γιὰ παράδειγμα:

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - (-3)7 = 10 + 21 = 31.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - (-2)(-6) = 12 - 12 = 0.$$

Ἂς ποῦμε, τώρα, ὅτι μᾶς δίνουν τὸ σύστημα:

$$7x + 3y = -2$$
$$-8x - 5y = 3.$$

Μὲ Δ θὰ συμβολίσομε τὴν ὁρίζουσα ποὺ σχηματίζουν οἱ συντελεστὲς τῶν x καὶ y καθὼς εἶναι γραμμένο τὸ σύστημα, δηλ.: $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -8 & -5 \end{vmatrix}$.

Συγκρίνετε $\begin{matrix}7x+3y\\-8x-5y\end{matrix}$ καὶ $\begin{vmatrix}7 & 3\\-8 & -5\end{vmatrix}$ καὶ θὰ καταλάβετε τί ἐννοοῦμε. Στὴν ὀρίζουσα Δ ἡ πρώτη «στήλη» ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς συντελεστὲς τοῦ x (δηλ. τὸ 7 καὶ τὸ −8) καὶ ἡ δεύτερη «στήλη» ἀπὸ τοὺς συντελεστὲς τοῦ y (δηλ. τὸ 3 καὶ τὸ −5).

Ἂν βγάλομε τὴν πρώτη στήλη καὶ στὴ θέση της βάλομε τὴ στήλη ποὺ ἀποτελεῖται ἀπ' τοὺς ἀριθμοὺς στὰ 2α μέλη θὰ προκύψει ἡ ὀρίζουσα:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix}7 & 3\\-8 & -5\end{vmatrix}.$$

Κοιτάξτε το σχηματικά:

$$\Delta = \begin{vmatrix}7 & 3\\-8 & -5\end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix}\dots & 3\\\dots & -5\end{vmatrix} \rightarrow \Delta_x = \begin{vmatrix}-2 & 3\\3 & -5\end{vmatrix}.$$

Μὲ ὅμοιο τρόπο, ἀφαιρώντας τὴ δεύτερη στήλη καὶ βάζοντας στὴ θέση της τὴ στήλη μὲ τοὺς ἀριθμοὺς στὰ 2α μέλη θὰ προκύψει ἡ ὀρίζουσα:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix}7 & -2\\-8 & 3\end{vmatrix}.$$

Σχηματικά:

$$\Delta = \begin{vmatrix}7 & 3\\-8 & -5\end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix}7 & \dots\\-8 & \dots\end{vmatrix} \rightarrow \Delta y = \begin{vmatrix}7 & -2\\-2 & 3\end{vmatrix}.$$

Ἂν λύσομε τὸ σύστημα μ' ἕναν ἀπὸ τοὺς γνωστούς μας τρόπους θὰ βροῦμε:

$$x = -\frac{1}{11} \text{ καὶ } y = -\frac{5}{11}.$$

Ἀλλὰ καὶ $\dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix}-2 & 3\\3 & -5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}7 & 3\\-8 & -5\end{vmatrix}} = -\dfrac{1}{11}$ καὶ

$$\frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix}7 & -2\\-8 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}7 & 3\\-8 & -5\end{vmatrix}} = -\frac{5}{11}.$$

Ἄρα $\boxed{x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} \text{ καὶ } y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}}$.

Οἱ ἰσότητες μέσα στὸ πλαίσιο δὲν εἶναι τυχαῖες. Δηλαδὴ εὔκολα μποροῦμε ν' ἀποδείξομε ὅτι ἂν σ' ἕνα ὁποιοδήποτε σύστημα (1ου βαθμοῦ) ἐργαστοῦμε ὅπως παραπάνω καὶ βροῦμε τὰ Δ, Δ_x, Δ_y καὶ $\Delta \neq 0$, τότε τὰ x καὶ y θὰ μᾶς δίδονται ἀπὸ τὶς ἰσότητες ποὺ ἔχομε στὸ πλαίσιο.

Γιὰ παράδειγμα ἂς λύσομε τὸ σύστημα:

$$7(2-y)+2x=0$$
$$3x=5(-70x+1)+1235y$$

Λύση.

Θὰ φέρομε τὸ σύστημα αὐτὸ στὴν κανονική του μορφή. Δηλαδὴ ἡ πρώτη ἐξίσωση γράφεται:

$$14-7y+2x=0 \text{ ἢ } 2x-7y=-14.$$

Ἡ δεύτερη ἐξίσωση γράφεται:

$$3x=-350x+5+1235y \text{ ἢ } 353x-1235y=5.$$

Δηλαδὴ ἔχομε νὰ λύσομε τὸ σύστημα:

$$2x-7y=-14$$
$$353x-1235y=5.$$

Θὰ βροῦμε τώρα τὰ Δ, Δ_x, Δ_y. Εἶναι:

$$\Delta = \begin{vmatrix}2 & -7\\353 & -1255\end{vmatrix} = 2(-1235)-(-7)353 = -2470+2471=1$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix}-14 & -7\\5 & -1235\end{vmatrix} = (-14)(-1235)-(-7)5 = 17290+35=17325$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix}2 & -14\\353 & 5\end{vmatrix} = 2\cdot 5-(-14)353 = 10+4942 = 4952.$$

Ἐπειδὴ $\Delta \neq 0$ θὰ ἔχομε:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{17325}{1} = 17325 \text{ καὶ}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{4952}{1} = 4952.$$

Ἄρα $\boxed{x = 17325 \text{ καὶ } y = 4952}$.

2) Μὲ τὴ βοήθεια τῶν ὀριζουσῶν μποροῦμε νὰ διερευνήσομε ἕνα σύστημα. Θὰ πρέπει νὰ ἔχομε ὑπ' ὄψει τὸ παρακάτω διάγραμμα.

Ἂν $\Delta \neq 0$ τὸ σύστημα ἔχει μιὰ ἀκριβῶς λύση.

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Ἂν $\Delta = 0$
- → καὶ $\Delta_x = \Delta_y = 0$ τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστο, δηλ. ὁποιεσδήποτε τιμὲς τῶν x καὶ y τὸ ἱκανοποιοῦν
- → καὶ ἕνα, τουλάχιστον, ἀπ' τὰ Δ_x, Δ_y εἶναι $\neq 0$ τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατο.

Παράδειγμα. Νὰ διερευνηθεῖ τὸ σύστημα :

$$3\lambda x-6\lambda(y+2)=2x$$
$$(-3\lambda+6)y+(\lambda+1)x=15\mu.$$

Λύση.

Γράφομε τὸ σύστημα μὲ τὴν κανονική του μορφή.

Ἡ πρώτη ἐξίσωση γράφεται :

$$2\lambda-6\lambda y-12\lambda=2x \quad ἤ \quad (2\lambda-2)y-6\lambda y=12\lambda.$$

Ἡ δεύτερη ἐξίσωση γράφεται :

$$(\lambda+1)x+(-3\lambda+6)y=15\mu.$$

Ἔχομε ἔτσι νὰ λύσομε τὸ σύστημα :

$$(2\lambda-2)x-6\lambda y=12\lambda$$
$$(\lambda+1)x+(-3\lambda+6)y=15\mu.$$

Στὸ σύστημα αὐτὸ εἶναι :

$$\Delta=\begin{vmatrix}2\lambda-2 & -6\lambda\\ \lambda+1 & -3\lambda+6\end{vmatrix}=$$
$$=(2\lambda-2)(-3\lambda+6)-(-6\lambda)(\lambda+1)=$$
$$=-6\lambda^2+12\lambda+6\lambda-12-(-6\lambda)=$$
$$=-6\lambda^2+18\lambda-12+6\lambda^2+6\lambda=-24\lambda-12.$$

Δηλ. $\qquad \Delta=24\lambda-12$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}12\lambda & -6\lambda\\ 15\mu & -3\lambda+6\end{vmatrix}=$$
$$=12\lambda(-3\lambda+6)-(-6\lambda)15\mu=-36\lambda^2+72\lambda+90\lambda\mu.$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}2\lambda-2 & 12\lambda\\ \lambda+1 & 15\mu\end{vmatrix}=$$
$$=(2\lambda-2)15\mu-12\lambda(\lambda+1)=30\lambda\mu-30\mu-12\lambda^2-12\lambda.$$

Προχωροῦμε τώρα στὴ διερεύνηση :

i) **Ἂν $\Delta\neq 0$, δηλ. ἂν $24\lambda-12\neq 0$ $\left(\lambda\neq\frac{1}{2}\right)$ τότε τὸ σύστημα ἔχει μιὰ ἀκριβῶς λύση :**

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-36\lambda^2+72\lambda+90\lambda\mu}{24\lambda-12} \quad \text{καὶ}$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-12\lambda^2-12\lambda-30\mu+30\lambda\mu}{24\lambda-12}$$

ii) Ἔστω ὅτι $\Delta=0$ δηλαδὴ $24\lambda-12=0$. Τότε:

$$\boxed{\lambda=\frac{1}{2}}$$

$$\Delta_x=-36\left(\frac{1}{2}\right)^2+72\cdot\frac{1}{2}+90\cdot\frac{1}{2}\mu=$$
$$=-9+36+45\mu=27+45\mu.$$

$$\Delta_y=30\cdot\frac{1}{2}\cdot\mu-30\mu-12\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-12\cdot\frac{1}{2}=$$
$$=15\mu-30\mu-3-6=-9-15\mu.$$

Ἂν $\Delta_x=0$ καὶ $\Delta_y=0$ τότε $27+45\mu=0$ καὶ :

$$-9-15\mu=0.$$

Ἀπὸ τὴν πρώτη :

$$\mu=-\frac{27}{45}=-\frac{3}{5}$$

καὶ ἀπὸ τὴ δεύτερη :

$$\mu=-\frac{9}{15}=-\frac{3}{5}$$

Ἄρα $\Delta_x=0$ καὶ $\Delta_y=0$ ὅταν :

$$\boxed{\mu=-\frac{3}{5}}$$

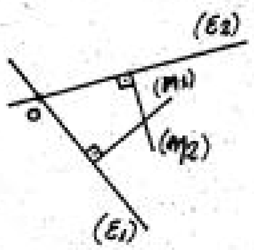
Ἂν λοιπὸν $\lambda=\frac{1}{2}$ καὶ $\mu=-\frac{3}{5}$ θὰ εἶναι $\Delta=0$, $\Delta_x=0$ καὶ $\Delta_y=0$ καὶ τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστο.

Ἂν $\lambda=\frac{1}{2}$ καὶ $\mu\neq-\frac{3}{5}$ τότε $\Delta=0$, $\Delta_x\neq0$, $\Delta_y\neq0$ καὶ τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατο.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Λυμένες ἀσκήσεις

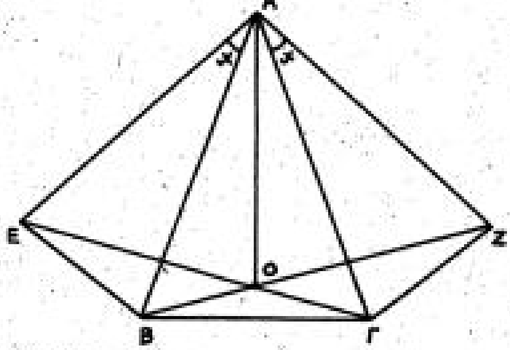
1. Ἂν δύο εὐθεῖες (ε_1) καὶ (ε_2) τέμνονται καὶ θεωρήσουμε $(\eta_1) \perp (\varepsilon_1)$ καὶ $(\eta_2) \perp (\varepsilon_2)$, νὰ δειχθεῖ ὅτι καὶ (η_1), (η_2) τέμνονται.



Ἀπόδειξη.

Ἔστω ὅτι $(\eta_1) \parallel (\eta_2)$. Τότε ἀφοῦ $(\varepsilon_1) \perp (\eta_1)$ θὰ εἶναι $(\varepsilon_1) \perp (\eta_2)$, ἀλλὰ ἔχουμε $(\eta_2) \perp (\varepsilon_2)$ ἄρα $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$ (ἄτοπο).

2. Θεωροῦμε ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Μὲ πλευρὲς τὶς ΑΒ καὶ ΑΓ κατασκευάζουμε ἔξω ἀπὸ τὸ τρίγωνο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΕ (ΑΒ=ΑΕ) καὶ ΑΓΖ (ΑΓ=ΑΖ) μὲ $\widehat{\Gamma A Z}=\widehat{B A \Delta}$. Νὰ δειχθεῖ ὅτι, ἂν οἱ ΒΖ καὶ ΕΓ τέμνονται στὸ Ο, τότε ΑΟ μεσοκάθετος στὴ ΒΓ.



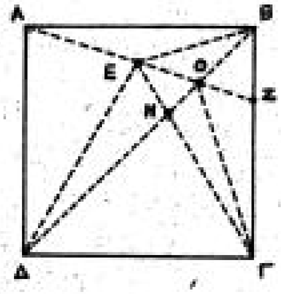
Ἀπόδειξη.

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{E B \Gamma}\\ \overset{\triangle}{B \Gamma Z}\end{array}\right. \text{ ἔχουν } \left(\begin{array}{l} B\Gamma \text{ κοινή} \\ EB=\Gamma Z \\ \widehat{EB\Gamma}=\widehat{B\Gamma Z}=B+\dfrac{180-x}{2}\end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{B}_1=\widehat{\Gamma}_1 \Rightarrow OB=O\Gamma$$

καὶ ἔχουμε ἐπίσης ΑΒ=ΑΓ, ἄρα ΑΟ μεσοκάθετος στὴ ΒΓ.

3. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ καὶ σχηματίζουμε ἰσόπλευρο τρίγωνο ΕΔΓ (Ε ἐσωτερικὸ τοῦ τετραγώνου). Ἂν ἡ ΑΕ τέμνει τὴν ΔΒ στὸ Ο, νὰ δειχθεῖ ὅτι $\Gamma O \perp BE$.

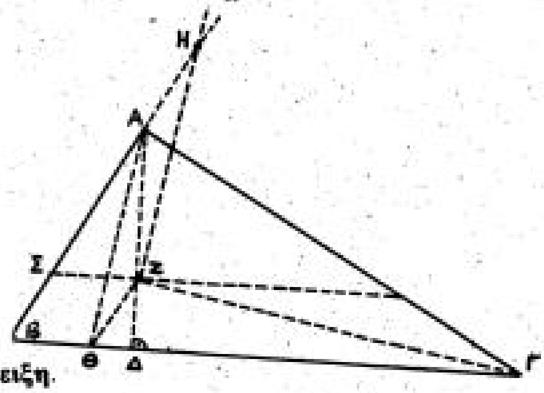


Ἀπόδειξη.

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{EBZ}\\ \overset{\triangle}{EBH}\end{array}\right. \text{ ἔχουν } \left(\begin{array}{l} EB \text{ κοινή} \\ \widehat{BEH}=\widehat{EBZ}=75^0 \\ \widehat{ZEB}=\widehat{EBH}=30^0\end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ΕΗ=ΒΖ, καὶ ἐπειδὴ ΓΕ=ΓΒ, ΓΟ διχοτόμος.

4. Θεωροῦμε ὀρθ. τρίγωνο ΑΒΓ (Α=1 ὀρθ.) καὶ $A\Delta \perp B\Gamma$. Ἀπὸ κάποιο σημεῖο Ζ τῆς ΑΔ φέρουμε $\parallel$ στὴ ΒΓ καὶ ἔστω Σ ἡ τομὴ αὐτῆς καὶ τῆς ΑΒ. Φέρουμε τὴν ΖΓ καὶ $ZH \perp Z\Gamma$ (Η σημεῖο τομῆς τῆς ΖΗ καὶ ΒΑ). Νὰ δειχθεῖ ὅτι ΑΗ=ΣΒ.

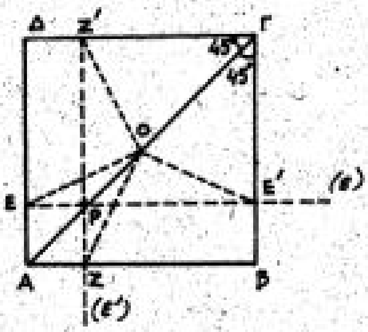


Ἀπόδειξη.

Φέρουμε τὴν $A\Theta \parallel HZ$ καὶ τὴν ΘΖ.

$\Gamma Z \perp HZ \Rightarrow \Gamma Z \perp A\Theta$, ἄρα Ζ ὀρθόκεντρο στὸ $A\Theta\Gamma \Rightarrow \Theta Z \perp A\Gamma \Rightarrow \Theta Z \parallel AZ \Rightarrow \Theta Z = AH$, ἄρα ΑΗ=ΣΒ.

5. Ἐὰν ἀπὸ σημεῖο Ρ διαγωνίου ΑΓ τετραγώνου ΑΒΓΔ φέρουμε εὐθεῖες (ε) καὶ (ε′) παράλληλες πρὸς τὶς πλευρές τους καὶ Ε, Ε′ καὶ Ζ, Ζ′ εἶναι τὰ σημεῖα τομῆς τῶν παραλλήλων μὲ τὶς πλευρὲς ΑΔ, ΒΓ, ΑΒ καὶ ΔΓ ἀντίστοιχα, νὰ δειχθεῖ ὅτι τὰ Ε, Ε′ Ζ, Ζ′ εἶναι ὁμοκυκλικά. Ποιὸ εἶναι τὸ κέντρο τοῦ κύκλου;



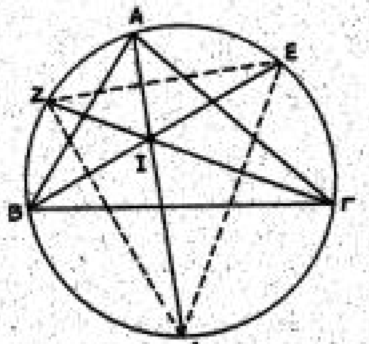
Ἀπόδειξη.

Ἔστω Ο ἡ τομὴ τῶν διαγωνίων, τὰ τετράπλευρα ΕΡΖΑ καὶ ΡΕ΄ΓΖ΄ εἶναι τετράγωνα.

Τὰ $\overset{\triangle}{ΟΓΖ'}$, $\overset{\triangle}{ΟΓΕ'}$ ἔχουν $\left(\begin{array}{c} ΓΖ' = ΓΕ' \\ ΟΓ \text{ κοινή} \\ \widehat{Γ}_1 = \widehat{Γ}_2 \end{array}\right) \Rightarrow ΟΖ' = ΟΕ'$

ὅμοια ΟΕ = ΟΖ. Τὸ σημεῖο Ο τῆς μεσοκαθέτου τοῦ ΑΔ, ἄρα καὶ τοῦ Ζ΄Ζ ⇒ ΟΖ΄ = ΟΖ. ὅ.ἔ.δ.

6. Νὰ δειχθεῖ ὅτι τὸ κέντρον Ι τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου σὲ τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι τὸ ὀρθόκεντρο τοῦ τριγώνου ποὺ ἔχει κορυφὲς τὰ μέσα τῶν τόξων $\overset{\frown}{ΒΓ}$, $\overset{\frown}{ΓΑ}$, $\overset{\frown}{ΑΒ}$.



Ἀπόδειξη.

Ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι ΑΔ ⊥ ΖΕ, ΒΕ ⊥ ΖΔ.

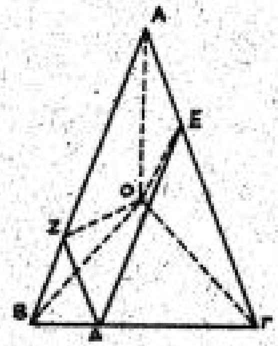
$$Ι\widehat{Α}Ε = \frac{\widehat{Β}}{2} + \frac{\widehat{Α}}{2}$$

$$Α\widehat{Ε}Ζ = \frac{\widehat{Γ}}{2}$$

$$Ι\widehat{Α}Ε + Α\widehat{Ε}Ζ = \frac{\widehat{Α}}{2} + \frac{\widehat{Β}}{2} + \frac{\widehat{Γ}}{2} = 1 \text{ ὀρθ.} \Rightarrow ΑΔ \perp ΖΕ,$$

ὅμοια ἐργαζόμαστε γιὰ νὰ δείξουμε ὅτι ΒΕ ⊥ ΖΔ.

7. Δίνεται ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΑΒΓ καὶ Δ κοινὸ σημεῖο ἐπάνω στὴ βάση του ΒΓ. Ἂν ἀπὸ τὸ Δ φέρουμε παράλληλες πρὸς τὶς ἴσες πλευρές του, αὐτὲς τέμνουν τὴν ΑΓ στὸ Ε καὶ τὴν ΑΒ στὸ Ζ. Νὰ δειχθεῖ ὅτι τὰ σημεῖα Α, Ε, Ζ καὶ τὸ κέντρο Ο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου γύρω ἀπὸ τὸ ΑΒΓ βρίσκονται στὸν ἴδιο κύκλο.

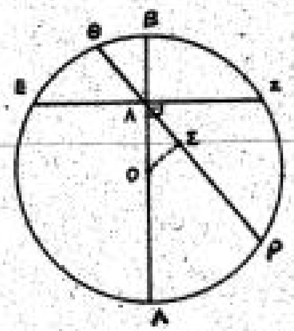


Ἀπόδειξη.

Τὰ $\overset{\triangle}{ΑΟΖ}$, $\overset{\triangle}{ΓΟΕ}$ ἔχουν $\left(\begin{array}{c} ΑΟ = ΟΓ \\ \underset{\smile}{ΑΖ} = \underset{\smile}{ΕΔ} = \underset{\smile}{ΕΓ} \\ Ο\widehat{Α}Ζ = Ο\widehat{Α}Γ = Ο\widehat{Γ}Α \end{array}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow Α\widehat{Ζ}Ο = Ο\widehat{Ε}Γ \Rightarrow$ ΑΕΟΖ ἐγγράψιμο.

8. Ἡ μικρότερη χορδὴ ποὺ μποροῦμε νὰ φέρουμε ἀπὸ ἕνα σημεῖο ἐντὸς τοῦ κύκλου εἶναι ἡ κάθετη στὴ διάμετρο ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖο.



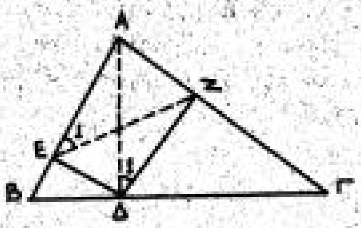
Ἀπόδειξη.

Θεωροῦμε τὴν διάμετρο ΑΒ ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὸ δοσμένο σημεῖο Λ καὶ τὴν ΕΖ ⊥ ΑΒ. Φέρουμε μία χορδὴ ΘΡ ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὸ Λ, θὰ δείξουμε ΘΡ > ΕΖ.

Ἀπὸ τὸ Ο φέρουμε κάθετη στὴν ΟΣ καὶ ἀπὸ τὸ τρίγωνο ΟΛΣ ἔχουμε ΟΣ < ΟΛ ⇒ ΘΡ > ΕΖ.

9. Ἀπὸ τὸ ἴχνος Δ τοῦ ὕψους ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε τὶς κάθετες ΔΕ καὶ ΔΖ στὶς ΑΒ καὶ

ΑΓ ἀντίστοιχα. Νά δειχθεῖ ὅτι τό τετράπλευρο ΒΕΖΓ εἶναι ἐγγράψιμο σέ κύκλο.

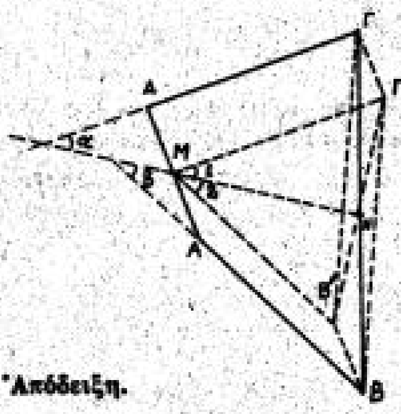


Ἀπόδειξη.

$\widehat{E}_1=\widehat{\Delta}_1$ ἀπό τό ἐγγράψιμο ΑΕΔΖ.

$\widehat{\Delta}_1=\widehat{\Gamma}$ σάν ὀξεῖες πού ἔχουν τίς πλευρές κάθετες μία πρός μία, ἄρα $\widehat{\Gamma}=\widehat{E}_1 \Rightarrow$ ΒΕΖΓ ἐγγράψιμο.

10. Σέ τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἔχουμε ΑΒ=ΓΔ. Νά δειχθεῖ ὅτι ἡ εὐθεία πού ἑνώνει τά μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν σχηματίζει ἴσες γωνίες μέ τίς ΑΒ καί ΔΓ.

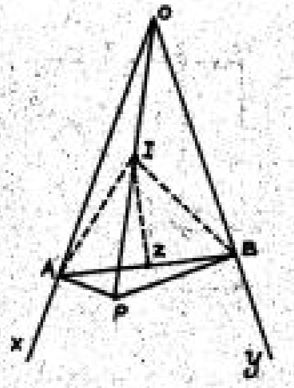


Ἀπόδειξη.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Φέρνουμε } \Gamma\Gamma' \parallel = \Delta M \\ \qquad\qquad BB' \parallel = MA\end{array}\right\} \Rightarrow BB' \parallel = \Gamma\Gamma' \Rightarrow BB'\Gamma\Gamma' ╬$$

μέ ΓΒ διαγώνιο καί Ν μέσον της, ἄρα Ν μέσον τῆς Γ′Β′. Ἐπειδή ΔΓ=ΜΓ′ καί ΑΒ=ΜΒ′ ⇒ ΜΓ′=ΜΒ′ καί ἡ διάμεσος ΜΝ εἶναι καί διχοτόμος τῆς $\Gamma'\widehat{M}B'$ ⇒ $\widehat{M}_1=\widehat{M}_2$, ἄρα $\widehat{\alpha}=\widehat{\beta}$.

11. Θεωροῦμε γωνία $x\widehat{O}y$ καί σημεῖο Ρ ἐσωτερικό αὐτῆς. Φέρουμε ΡΑ ⊥ Οx καί ΡΒ ⊥ Οy. Νά δειχθεῖ ὅτι ἡ εὐθεία πού συνδέει τά μέσα Ι καί Ζ τῶν ΟΡ καί ΑΒ εἶναι κάθετη στήν ΑΒ.

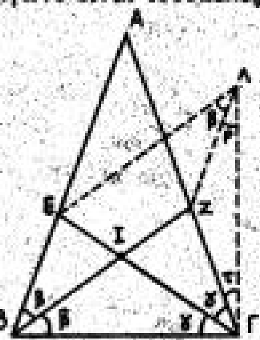


Ἀπόδειξη.

$$\left.\begin{array}{l} AI = \dfrac{OP}{2} \\ BI = \dfrac{OP}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow AI = BI$$

ἄρα ἡ διάμεσος ΙΖ εἶναι καί ὕψος.

12. Ἄν οἱ διχοτόμοι δύο γωνιῶν τριγώνου εἶναι ἴσες, τότε τό τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές.



Ἀπόδειξη.

Ἔστω ΓΕ = ΒΖ θά δειχτεῖ $\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$. Ἡ ἀπόδειξη θά γίνει μέ τήν εἰς ἄτοπον ἀπαγωγή.

Ἐνδεχόμενα: α) $\widehat{B}>\widehat{\Gamma}$

β) $\widehat{B}<\widehat{\Gamma}$

γ) $\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$.

Θά ἀποκλείσουμε τά δύο πρῶτα.

Ἔστω $B>\Gamma \Rightarrow \beta>\gamma$.

$$\text{Τά } \overset{\triangle}{BZ\Gamma},\ \overset{\triangle}{\Gamma BE} \text{ ἔχουν} \begin{pmatrix} B\Gamma \text{ κοινή} \\ BZ=\Gamma E \\ \widehat{\gamma}<\widehat{\beta}\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{Z\Gamma > BE} \quad (1).$$

Ἐκ τοῦ Ζ φέρω τήν ΖΛ ∥ = ΒΕ, ἄρα ΒΕΛΖ ╬ καί Λ=β. Ἔχω ΕΛ=ΕΓ, ἄρα $\beta+\rho=\gamma+\tau \Rightarrow \rho<\tau$, ἄρα ΖΓ<ΖΛ, δηλ. $\boxed{Z\Gamma<BE}$ (2) ἄτοπο ἐπειδή ἔχουμε τήν (1). Ὅμοια ἀπορρίπτουμε καί τό β) ἐνδεχόμενο, ἄρα $\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$.

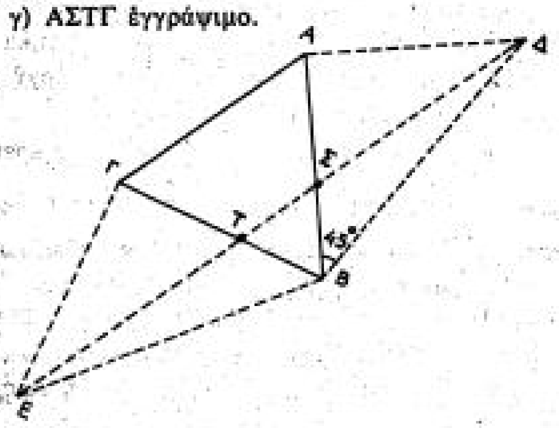
Ἀσκήσεις ποὺ προτείνονται γιὰ λύση

Γ.52 Δίδεται ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ, μὲ πλευρὲς τὶς ΑΒ καὶ ΒΓ κατασκευάζουμε ἔξω ἀπὸ τὸ τρίγωνο ὀρθογώνια καὶ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΒΑΔ (Α = 1 ὀρθ.) καὶ ΒΓΕ. Φέρομε τὴν ΔΕ ποὺ τέμνει τὴν ΑΒ στὸ Σ καὶ τὴν ΒΓ στὸ Τ.

α) Νὰ δειχθεῖ ὅτι ΕΔ ∥ ΑΓ.

β) ΣΒ = ΒΤ = ΤΣ.

γ) ΑΣΤΓ ἐγγράψιμο.



Γ.53 Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ γωνία Γ εἶναι 7° 30′. Νὰ δειχθεῖ ὅτι, ἡ ἀπόσταση τῆς κορυφῆς Β ἀπὸ τὴν διάμεσο ποὺ φέρουμε ἀπὸ τὴν κορυφὴ τῆς ὀρθῆς, εἶναι ἴση πρὸς τὸ $\frac{1}{8}$ τῆς ὑποτείνουσας.

Η ΑΛΛΗΛΟΓΡΑΦΙΑ ΜΑΣ

Τούτη τὴ φορὰ τὰ γράμματά σας ξεπέρασαν τὶς προσδοκίες μας! Ποτὲ ἄλλοτε ὁ «Εὐκλείδης» δὲν εἶχε τόσο μεγάλη ἐπαφὴ μὲ τοὺς φίλους του. Τόσα γράμματα—καὶ τόσο ἐπιμελημένα τὰ περισσότερα—σὲ τόσο μικρὸ χρονικὸ διάστημα! Σᾶς εὐχαριστοῦμε ξεχωριστὰ καὶ γιὰ τὰ λόγια ἀγάπης, ἀναγνώρισης καὶ φιλίας ποὺ ὑπῆρχαν μέσα στὰ γράμματά σας. Σὲ ἀρκετὲς περιπτώσεις ὅμως, φίλοι μας, διαπιστώσαμε στὶς ἀσκήσεις ὁρισμένα λάθη, κι αὐτὸ δὲν τὸ λέμε γιὰ νὰ στεναχωρηθεῖτε. Λάθη κάνουμε ὅλοι μας. Ἴσα - ἴσα ποὺ γίνονται ἀφορμὴ γιὰ νὰ μάθουμε καλύτερα κάτι. Νὰ λοιπὸν τὰ πιὸ σημαντικά:

1) Μερικὲς φορές, ὅταν δὲν ἔχουμε καταλάβει καλὰ τὴ διαδικασία ποὺ μετατρέπουμε κλάσματα σὲ ὁμώνυμα γιὰ νὰ τὰ προσθέσουμε καὶ γράψουμε κάτι τέτοιο:

$$\overbrace{\frac{1}{2}}^{3}\cdot\overbrace{\frac{(x-1)}{3}}^{2}+\overbrace{\frac{x}{2}}^{3}+\overbrace{\frac{x}{3}}^{2}+\cdots,$$

τότε μπορεῖ νὰ ὁδηγηθοῦμε σὲ λάθος.

Γιὰ νὰ τὸ καταλάβουμε αὐτὸ πρέπει νὰ δοῦμε τί ἀκριβῶς κάνουμε μὲ τὰ «καπελλάκια», ποιὸς εἶναι ὁ ρόλος τους.

Ἡ μέθοδος γιὰ νὰ χειριστοῦμε ἕνα ἄθροισμα κλασμάτων εἶναι νὰ πολλαπλασιάσουμε καὶ νὰ διαιρέσουμε συγχρόνως κάθε προσθετέο τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ (τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν), ὁπότε τὸ ἄθροισμα δὲν ἀλλάζει τιμή, μονάχα γίνεται ἁπλούστερο (τὰ κλάσματα γίνονται ὁμώνυμα).

Στὸ παράδειγμά μας τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι τὸ 6, ἀλλὰ προσοχή! Τὸ $\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)}{3}$ πρέπει νὰ τὸ δοῦμε σὰν **ἕνα προσθετέο** τοῦ ἀθροίσματος, γιατί $\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)}{3}=\frac{x-1}{2\cdot 3}=\frac{x-1}{6}$.

Μποροῦμε νὰ τὸ «σπάσουμε» καὶ σὲ δύο προσθετέους, ἀλλὰ ἔτσι:

$$\frac{x-1}{6}=\frac{x}{6}-\frac{1}{6}.$$

Τώρα ὁ ἀριθμὸς ποὺ βάζουμε στὸ «καπελλάκι» τοῦ κάθε προσθετέου (ἕνα μόνο καπελλάκι γιὰ τὸν κάθε προσθετέο!) σημαίνει πόσες φορὲς χωράει ὁ παρονομαστὴς στὸ Ε.Κ.Π.