Author: Στέλιος Παπαφλωράτος

Title: Εξωευκλείδιον μοντέλο

Creator: HDML

ΕΞΩΕΥΚΛΕΙΔΙΟΝ ΜΟΝΤΕΛΟ
ΤΟΥ HENRI-POINCARE

Ὑπὸ Στέλιου Παπαφλωράτου, Καθηγητοῦ Μαθηματικῶν
τοῦ ΙΗ' Γυμνασίου Θηλέων Ἀθηνῶν

Ἐπίμονοι κατὰ καιροὺς κατεβλήθησαν προσπάθειαι πρὸς τὴν κατεύθυνσιν τῆς ἀρνήσεως τοῦ Εὐκλειδίου ἐπὶ τῶν παραλλήλων ἰσχυρισμοῦ ὑπὸ τὴν διαίσθησιν, ὅτι τὸ οὕτω θεμελιούμενον ἀξιωματικὸν σύστημα θὰ ὡδήγει εἰς ἀντιφάσεις, δημιουργουμένης τοιουτοτρόπως τῆς δυνατότητος ἀποδείξεως τοῦ ἰσχυρισμοῦ τούτου. Αἱ ἐργασίαι ἐπ' αὐτοῦ τῶν Lobatschewski καὶ Bolyai ἀπετέλεσαν τὸ πρότυπον ἀξιωματικῶν ἀναζητήσεων πλήρως ἐξουθενώσασαι τὴν μέχρι πρό τινος δογματικὴν ἀντίληψιν περὶ τῆς μοναδικότητος τοῦ εὐκλειδίου συστήματος διὰ τὴν ἑρμηνείαν γεγονότων ἐν τῷ χώρῳ, ὁδηγήσασαι τελικῶς εἰς τὴν ἀνακάλυψιν καὶ διατύπωσιν σημαντικοῦ πλήθους διαφόρων ἐξωευκλειδίων Γεωμετριῶν. Αἱ μελέται αὗται οὐδεμίαν εὗρον κατὰ τὴν ἐποχὴν τῆς δημοσιεύσεώς των ἀπήχησιν καὶ τοῦτο ἴσως διότι καὶ σήμερον ἀκόμη ἡ μελέτη αὐτῶν παρουσιάζει πλείστας ὅσας δυσχερείας καὶ μάλιστα εἰς μαθηματικοὺς ἐπὶ μακρὸν ἀσχοληθέντας μὲ τὰς ἀντιλήψεις τῆς ἐξωευκλειδίου Γεωμετρίας. Ἐξ ἄλλου καὶ τοῦτο εἶναι ἐνδεχομένως καὶ τὸ σημαντικώτερον, ἡ ἐπαναστατικὴ τόλμη τῶν ἐργασιῶν τούτων ἐδημιούργησεν ἔκπληξιν καὶ σύγχυσιν εἰς τοὺς συγχρόνους των, ἐκπαιδευθέντας ὑπὸ τὸ πνεῦμα μιᾶς ἀνεπιφυλάκτου παραδοχῆς καὶ ἀναγνωρίσεως τῆς αὐθεντικότητος καὶ μοναδικότητος τῶν παρὰ τοῦ Εὐκλείδου παρασχεθέντων.

Σήμερον δὲν τίθεται ὑπὸ ἀμφισβήτησιν ἡ ἔλλειψις ἀντιφάσεων εἰς τὸ ἐξωευκλείδιον γεωμετρικὸν σύστημα. Καὶ τὸ πρόβλημα τοῦτο δὲν ἐτέθη μόνον διὰ τὴν ἐξωευκλείδιον Γεωμετρίαν ἀλλὰ καὶ διὰ τὴν εὐκλείδιον τοιαύτην. Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς ἐλλείψεως ἀντιφάσεων ἐπὶ οἱουδήποτε ἀξιωματικοῦ συστήματος καθιερώθη ὑπὸ τοῦ Hilbert μία ἀλάθητος συνταγή: Ἡ κατασκευὴ ἑνὸς μοντέλλου, ἤτοι τυχόντος συστήματος ἀντικειμένων ἐπὶ τῶν ὁποίων νὰ πληροῦνται καθ' ὁλοκληρίαν τὰ ἀξιώματα. Τότε τὸ ἐξ ἐννοιῶν τοῦτο σύστημα εἶναι κατασκευάσιμον, ἔχον οὕτω πραγματικὴν ὑπόστασιν καὶ μὴ δυνάμενον εἰς τὸν ὑπάρχοντα κόσμον νὰ παρουσιάσῃ κατὰ τὴν λογικὴν ἀντιφάσεις.

Ἐν τοιοῦτον, διὰ τὴν εὐκλείδιον Γεωμετρίαν μοντέλλο, ἀποτελεῖ ἡ Ἀναλυτικὴ Γεωμετρία. Βεβαίως οἱ περισσότεροι μελετηταὶ τῶν Μαθηματικῶν θεωροῦν αὐτὴν παραγομένην ἐκ τῆς γνωστῆς εὐκλειδίου Γεωμετρίας καὶ οὐχὶ ἐν ἀνεξαρτησίᾳ πρὸς αὐτὴν καὶ ὡς μοντέλλο κατασκευαζομένην. Τοῦτο ἐπιτυγχάνομεν προσδίδοντες γεωμετρικὰ ὀνόματα ὡς σημεῖον, εὐθεῖα κ.τ.λ. ἐπὶ μὴ γεωμετρικῶν ἀντικειμένων ὡς οἱ ἀριθμοί, ὑποδεικνύοντες ἐν συνεχείᾳ τὴν ἀποφυγὴν θεωρήσεως τούτων ἐκ τῆς κατὰ παράστασιν ἐννοίας αὐτῶν.

Ἀλλὰ καὶ διὰ τὴν ἐξωευκλείδιον Γεωμετρίαν θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ σκεφθῶμεν τὴν κατασκευὴν ἑνὸς μοντέλλου εἰς τὴν περιοχὴν τῆς Ἀριθμητικῆς. Ἀναγνωρίζοντες τὴν ἔλλειψιν ἀντιφάσεων εἰς τὴν εὐκλείδιον Γεωμετρίαν προσκείμεθα ταυτοχρόνως εἰς τὴν ἀναζήτησιν ἑνὸς τοιούτου μοντέλλου εἰς τὴν περιοχὴν αὐτήν. Ἓν ἰδιαιτέρας παραστατικότητος τοιοῦτον μοντέλλο εἶναι τὸ ὑπὸ τοῦ Henri Poincare προερχόμενον. Πρὸς πληρεστέραν ἀντίληψιν τούτου ἀναγκαῖος εἶναι ὁ ἐκ τῆς εὐκλειδίου Γεωμετρίας διὰ τῶν ἀντιστρόφων ἀκτίνων μετασχηματισμός, τοῦ ὁποίου τὰς βασικὰς προτάσεις παραθέτομεν ἐνταῦθα.

Δίδονται ἐπὶ τοῦ εὐκλειδίου ἐπιπέδου εἰς κύκλος κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος r. Εἰς ἕκαστον σημεῖον Α, διάφορον τοῦ Ο, ἀντιστοιχίζεται εἰκὼν-σημεῖον Α' κείμενον ἐπὶ τοῦ τμήματος ΟΑ, ἢ τῆς προεκτάσεως τούτου κατὰ τρόπον, ὥστε $OA \cdot OA' = r^2$. Τὸ σημεῖον Α' ἔχει ἐπομένως εὔκολον κατασκευὴν καὶ καλεῖται εἰκὼν τοῦ Α. Οὕτως ἕκαστον σημεῖον Α διάφορον τοῦ Ο ἔχει μίαν τελείως ὡρισμένην εἰκόνα. Αἱ εἰκόνες ἐσωτερικῶν τοῦ κύκλου σημείων κεῖνται εἰς τὸ ἐξωτερικὸν αὐτοῦ καὶ ἀντιστρόφως. Τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ἀπεικονίζονται ἐφ' ἑαυτῶν. Ἡ εἰκὼν τῆς εἰκόνος εἶναι καὶ πάλιν τὸ ἀρχικῶς θεωρηθὲν σημεῖον. Πρὸς ἑκάστην εὐθεῖαν ἡ καμπύλην γραμμὴν ἀντιστοιχίζεται, ὡς κατὰ τὰ σημεῖα αὐτῆς εἰκών, μία ὡρισμένη καὶ πάλιν γραμμή. Ἐπὶ πλέον ἰσχύουν αἱ ἀκόλουθοι προτάσεις.:

1. Ἡ εἰκὼν κύκλου εἶναι καὶ πάλι κύκλος, ἔνθα καὶ αἱ εὐθεῖαι συγκαταλέγονται εἰς τοὺς κύκλους μὲ ἄπειρον ἀκτῖνα. Ἰδιαιτέρως οἱ διὰ τοῦ κέντρου Ο διερχόμενοι κύκλοι ἔχουν ὡς εἰκόνα εὐθείας γραμμὰς καὶ ἀντιστρόφως. Εὐθεῖα διὰ τοῦ κέντρου Ο διερχομένη ἔχει ὡς εἰκόνα ἑαυτήν.

2. Ἡ γωνία δύο γραμμῶν, ἤτοι ἡ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὸ σημεῖον τομῆς αὐτῶν ὁριζομένη, μεθίσταται κατὰ τὴν ἀπεικόνισιν ἐπὶ γωνίας τοῦ αὐτοῦ μέτρου, ἀντιστρόφου ὅμως διατάξεως πλευρῶν.

3ον Εἀν Α,Β,Γ,Δ εἶναι τυχοῦσα τετρὰς σημείων, ὁ διπλοῦς λόγος $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}} : \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΒΔ}}$ παραμένει κατὰ τὴν ἀπεικόνισιν ἀναλλοίωτος. Ταυτοχρόνως μὲ τὴν ὡς πρὸς κύκλον ἐκτεθεῖσαν ἀνωτέρω ἀπεικόνισιν θὰ θεωρήσωμεν καὶ τὴν συνήθη ὡς πρὸς εὐθεῖαν ἀπεικόνισιν, κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ ἀνωτέρω προτάσεις ἰσχύουν ὁμοίως.

Μετὰ ταῦτα προχωροῦμεν εἰς τὴν διατύπωσιν τοῦ μοντέλλου τοῦ Henri Poincare. Ἔστω εὐκλείδιος εὐθεῖα ε καὶ Π_1 ἓν τῶν ὑπὸ ταύτης ὁριζομένων ἡμιεπιπέδων. Ὡς ἐξωευκλείδια σημεῖα χαρακτηρίζονται τὰ εὐκλείδια σημεῖα τοῦ ἡμιεπιπέδου Π_1. Ὡς ἐξωευκλείδιαι εὐθεῖαι ὁρίζονται τὰ ἡμικύκλια τὰ ἐπὶ τοῦ Π_1 κείμενα καὶ ἔχοντα κέντρον ἐπὶ τῆς ε, τὰ ὁποῖα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὴν ε, ἐπὶ πλέον δὲ καὶ αἱ κάθετοι ἐπὶ τὴν ε καὶ εἰς τὸ Π_1 κείμεναι ἡμιευθεῖαι (ἤτοι ἡμικύκλια ἔχοντα ἄπειρον ἀκτῖνα). Ἐπειδὴ θὰ πρέπη κατὰ τὴν παρουσίασιν νὰ θεωροῦμεν συνεχῶς εὐκλείδια καὶ ἐξωευκλείδια σημεῖα, εὐθείας κ.τ.λ. θὰ συμβολίζωμεν ταῦτα ὡς Ε-σημεῖα, Ε-εὐθείας καὶ ὡς Ν-σημεῖα, Ν-εὐθείας κ.τ.λ. ἀντιστοίχως.

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι διὰ μίαν Ν-εὐθεῖαν θ καὶ διὰ ἓν μὴ κείμενον ἐπ' αὐτῆς Ν-σημεῖον Σ, ὑπάρχουν πάντοτε ἄπειροι διὰ τοῦ Σ διερχόμεναι Ν-εὐθεῖαι τέμνουσαι τὴν θ, ὡς καὶ ἄπειροι μὴ τέμνουσαι ταύτην. Τὸ γεγονὸς ὅμως τοῦτο εἶναι καθ' ὁλοκληρίαν ἐξωευκλείδιον. Τὰ κάτωθι ἀξιώματα: Ι. «Ἐὰν α εἶναι μία εὐθεῖα ὑπάρχουν ἄπειρα σημεῖα κείμενα ἐπ' αὐτῆς, ὡς καὶ ἄπειρα μὴ κείμενα ἐπ' αὐτῆς» καὶ ΙΙ. «Ἐὰν Γ εἶναι ἓν σημεῖον, ὑπάρχουν ἄπειροι εὐθεῖαι διερχόμεναι διὰ τοῦ Γ, ὡς καὶ ἄπειροι εὐθεῖαι μὴ διερχόμεναι δι' αὐτοῦ» πληροῦνται προφανῶς. Ἐπίσης ἱκανοποιεῖται τὸ ἀκόλουθον ἀξίωμα: «Διὰ δύο σημεῖα διάφορα ἀλλήλων ὑπάρχει πάντοτε μία καὶ μόνον μία συνδέουσα ταῦτα εὐθεῖα, ἤτοι μία μόνον εὐθεῖα διερχομένη διὰ τῶν σημείων τούτων». Διότι ἐὰν διὰ δύο Ν-σημεῖα Α καὶ Β ἡ Ε-συνδέουσα αὐτὰ εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ε, τότε θὰ εἶναι αὕτη ἐπίσης μία Ν-συνδέουσα εὐθεῖα καὶ δὲν θὰ ὑπάρχῃ οὐδεμία ἄλλη. Εἰς ἀντίθετον περίπτωσιν ἡ Ε-μεσοκάθετος ἐπὶ τὸ Ε-εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ τέμνει τὴν Ε-εὐθεῖαν ε κατὰ ἓν Ε-σημεῖον Ο. Τὸ Ε-ἡμικύκλιον, τὸ ἔχον κέντρον τὸ Ο καὶ διερχόμενον διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β εἶναι τότε ἡ μοναδικὴ Ν-συνδέουσα τὰ σημεῖα Α καὶ Β εὐθεῖα.

Ὡς διάταξιν ἐπὶ τῶν Ν-σημείων μιᾶς Ν-εὐθείας δεχόμεθα τὴν διάταξιν ἐκείνην, τὴν ὁποίαν ἔχουν τὰ Ν-σημεῖα ὑπὸ τὴν ἰδιότητά των ὡς Ε-σημείων ἐπὶ τῆς Ν-εὐθείας, ἡ ὁποία κατὰ τὰ τεθέντα εἶναι ἓν Ε-ἡμικύκλιον. Τότε ἐκ τῶν ἁπλουστάτων σχημάτων καθίσταται δυνατὸν νὰ συνάγωμεν τὴν ἱκανοποίησιν πάντων τῶν ἀξιωμάτων διατάξεως, ὡς ἐπὶ παραδείγματι τοῦ ἀξιώματος τοῦ Pasch.

Ὡς Ν-γωνίαν ἐδόσο Ν-εὐθειῶν δεχόμεθα τὴν Ε-γωνίαν ὑπὸ τὴν ὁποίαν τέμνονται τὰ ἐν λόγῳ Ε-ἡμικύκλια, ἤτοι αἱ Ε ἐφαπτόμεναι αὐτῶν.

Διὰ τῆς ἀπεικονίσεως τυχούσης Ν-εὐθείας ἐπὶ μιᾶς Ν-εὐθείας, ἄρα ἐπὶ ἑνὸς Ε-ἡμικυκλίου, ἢ ἐπὶ μιᾶς Ε-εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὴν ε, λαμβάνομεν καὶ πάλιν μίαν Ν-εὐθεῖαν, ἐφ' ὅσον κατὰ τὴν ἀπεικόνισιν τὸ ἄνοιγμα τῶν γωνιῶν παραμένει ἀναλλοίωτον, ἤτοι αἱ ὀρθαὶ κατὰ τὴν ε γωνίαι μεθίστανται εἰς ὀρθὰς καὶ πάλι γωνίας. Καὶ τώρα εἶναι πλέον δυνατὸς ὁ ὁρισμὸς τῆς ἰσότητος εὐθυγράμμων τμημάτων. Λέγομεν ὅτι δύο Ν-εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι ἴσα, ἐφ' ὅσον ταῦτα εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθοῦν ἐπ' ἀλλήλων διὰ μιᾶς σειρᾶς ἀπεικονίσεων. Εἶναι τότε δυνατὸν εἰς ἕκαστον Ν-εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ νὰ ὁρίσωμεν ἐπὶ δεδομένης Ν-ἡμιευθείας θ ἐχούσης ἀρχικὸν Α' ἓν ἴσον Ν-εὐθύγραμμον τμῆμα Α'Β'. Πρὸς τοῦτο θὰ ἀπεικονίσωμεν κατὰ πρῶτον τὸ σημεῖον Α ἐπὶ τοῦ σημείου Α'. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται ὅταν τὰ σημεῖα Α καὶ Α' ἔχουν τὴν αὐτὴν Ε-ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς εὐθείας ε διὰ τῆς ἀπεικονίσεως περὶ τὴν Ε-μεσοκάθετον τοῦ Ε-εὐθυγράμμου τμήματος ΑΑ', ἡ ὁποία εἶναι ταυτοχρόνως μία Ν-εὐθεῖα. Ἐὰν ὅμως δὲν συμβαίνῃ τοῦτο, τότε ἡ Ε-εὐθεῖα ΑΑ' καὶ ἡ εὐθεῖα ε θὰ τέμνωνται κατὰ ἓν Ε-σημεῖον Ο. Γράφοντες μὲ κέντρον τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ μὲ ἀκτῖνα $\sqrt{\text{ΟΑ}.\text{ΟΑ}'}$ τὸ Ε-ἡμικύκλιον, ἤτοι μίαν Ν-εὐθεῖαν, κατὰ μίαν περὶ αὐτὴν ἀπεικόνισιν, τὸ σημεῖον Α ἀπεικονίζεται ἐπὶ τοῦ Α'. Προσέτι τὸ σημεῖον Β ἀπεικονίζεται ἐπὶ σημείου Β'', μὴ κειμένου ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς Ν-εὐθείας θ. Διὰ μιᾶς περαιτέρω ἀπεικονίσεως περὶ τὴν Ν-εὐθεῖαν τὴν διχοτομοῦσαν τὴν γωνίαν τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τῆς Ν-εὐθείας Α'Β'' καὶ τῆς Ν-ἡμιευθείας θ, ἐπιτυγχάνεται τὸ ζητούμενον. Εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκλάβῃ τις, ὅτι διὰ σειρᾶς ἀπεικονίσεων, διαφόρου τῆς ἐκτεθείσης, θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἀχθῶμεν εἰς ἕτερον σημεῖον Β'. Τοῦτο ὅμως ἐπ' οὐδενὶ συμβαίνει, καθ' ὅσον ἀπεικονίζοντες μίαν Ν-εὐθεῖαν, ἤτοι ἓν Ε-ἡμικύκλιον Κ περὶ μίαν Ν-εὐθεῖαν ἐπὶ ἑτέρας Ν-εὐθείας, ἤτοι ἐπὶ ἑνὸς Ε-ἡμικυκλίου Κ', ἡ διάταξις τῶν σημείων προφανῶς διατηρεῖται καὶ τὰ Ε-σημεῖα τομῆς Σ καὶ Τ τοῦ ἡμικυκλίου Κ μετὰ τῆς εὐθείας ε ἀπεικονίζονται ἐπὶ τῶν Ε-σημείων τομῆς Σ' καὶ Τ' τοῦ ἡμικυκλίου Κ' μετὰ τῆς ε. Ἐὰν τώρα τὰ σημεῖα Α,Β ἐπὶ τοῦ Κ ἀπεικονίζωνται διὰ μιᾶς σειρᾶς ἀπεικονίσεων ἐπὶ τῶν σημείων Α',Β' τοῦ Κ' θὰ πρέπῃ νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$\frac{\Sigma\text{Α}}{\text{ΤΑ}} : \frac{\Sigma\text{Β}}{\text{ΤΒ}} = \frac{\Sigma'\text{Α}'}{\text{Τ}'\text{Α}'} : \frac{\Sigma'\text{Β}'}{\text{Τ}'\text{Β}'}$$

Οὕτω τὸ σημεῖον Β' εἶναι μονοσημάντως ὡρισμένον.

Ἐν τῇ ἐπιδιώξει ἐκφράσεως τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἰσότητος δύο Ν-εὐθυγράμμων τμημάτων διὰ τῆς σχέσεως ΑΒ=Α'Β', παρ' ὅτι οὐδεμία μονὰς μήκους

ἔχει ὁρισθῆ, προχωροῦμεν εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ πρώτου Ν-κριτηρίου ἰσότητος. Ἔστωσαν τὰ Ν-τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ καὶ ἔστω

$$AB = A'B',\ A\Gamma = A'\Gamma',\ \sphericalangle BA\Gamma = \sphericalangle B'A'\Gamma'$$

Δυνάμεθα τότε δι' ἀπεικονίσεων νὰ ἄγωμεν τὸ Ν-εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ ἐπὶ τοῦ Α΄Β΄. Διὰ τοῦ τρόπου τούτου, ἐφ' ὅσον τὸ ἄνοιγμα γωνίας κατὰ τὴν ἀπεικόνισιν παραμένει ἀναλλοίωτον, τὸ Ν-εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΓ φέρεται ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Α΄Γ΄, ἢ λαμβάνει θέσιν ἐπὶ τοῦ ἑτέρου μέρους τοῦ Α΄Β΄ καὶ δύναται διὰ μιᾶς περὶ τὴν Α΄Β΄ ἀπεικονίσεως νὰ ἀχθῆ ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Α΄Γ΄. Λόγῳ τῆς σχέσεως ΑΓ=Α΄Γ΄, τὸ σημεῖον Γ συμπίπτει ἐπὶ τοῦ Γ΄ καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἀπεικονίζεται ἐπὶ τοῦ τριγώνου Α΄Β΄Γ΄, ὅτε προφανὴς εἶναι ἡ ἰσότης τῶν λοιπῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῶν τριγώνων. Ἐπὶ τῇ εὐκαιρίᾳ ταύτῃ παρατηροῦμεν ὅτι καὶ εἰς τὴν εὐκλείδιον Γεωμετρίαν δύναται νὰ πραγματοποιηθῆ ἡ ἐπ' ἀλλήλων ἐπίθεσις δι' ἀπεικονίσεων περὶ εὐκλειδίους εὐθείας.

Ὑπολείπεται εἰσέτι ἡ ἱκανοποίησις τῶν μετρικῶν ἀξιωμάτων. Περὶ τῆς Ν-γωνίας οὐδεμία γίνεται συζήτησις, δεδομένου ὅτι παρεδέχθημεν τὰς γωνίας καὶ τὸ ἄνοιγμα αὐτῶν κατὰ τὴν ἔννοιαν τῆς εὐκλειδίου Γεωμετρίας. Ἐπιβεβλημένον ὅμως εἶναι ὅπως διὰ τὰ Ν-εὐθύγραμμα τμήματα εἰσάγομεν μετρητικοὺς ἀριθμούς. Ἔστωσαν Α,Β,Γ τρία Ν-σημεῖα ἐπὶ μιᾶς Ν-εὐθείας, ἤτοι ἐπὶ ἑνὸς Ε-ἡμικυκλίου Κ. Ἔστωσαν εἰσέτι Σ, Τ τὰ Ε-σημεῖα τομῆς τοῦ Κ μετὰ τῆς εὐθείας ε καὶ ἔστω Σ,Α,Β,Γ,Τ ἡ διάταξις τούτων. Ὁ διπλοῦς λόγος $\frac{\Sigma B}{TB} : \frac{\Sigma A}{TA}$ εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος, διατηρούμενος σταθερὸς καθ' ὅλας τὰς ἀπεικονίσεις καὶ κατὰ συνέπειαν ὁ αὐτὸς διὰ πάντα τὰ ἴσα πρὸς τὸ ΑΒ Ν-εὐθύγραμμα τμήματα. Ὡς ἐκ τούτου δυνάμεθα νὰ ἐννοοῦμεν ὡς μῆκος τοῦ Ν-εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ μίαν συνάρτησιν τοῦ διπλοῦ τούτου λόγου. Ἀλλὰ ἡ συνάρτησις αὕτη, παριστωμένη διὰ τοῦ συμβόλου $\overline{AB}$, ὀφείλει νὰ εἶναι θετικὴ καὶ κατὰ τοιοῦτον τρόπον κατασκευασμένη, ὥστε τὸ μῆκος $\overline{AB}$ αὐξανόμενον κατὰ τὸ μῆκος $\overline{B\Gamma}$ νὰ παρέχῃ τὸ μῆκος $\overline{A\Gamma}$. Τοῦτο καθίσταται ἐφικτόν, ἐὰν λάβωμεν ὡς μῆκος τὸν λογάριθμον τοῦ διπλοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τυχοῦσαν θετικὴν σταθεράν, δι' ἧς ὁρίζεται ἡ μονὰς μήκους. Ἐκλέγοντες τὴν μονάδα μήκους κατὰ τρόπον, ὥστε ἡ σταθερὰ αὕτη νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν μονάδα, θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$\overline{AB} = \log\left(\frac{\Sigma B}{TB} : \frac{\Sigma A}{TA}\right),\quad \overline{B\Gamma} = \log\left(\frac{\Sigma\Gamma}{T\Gamma} : \frac{\Sigma B}{TB}\right),$$

$$\overline{A\Gamma} = \log\left(\frac{\Sigma\Gamma}{T\Gamma} : \frac{\Sigma A}{TA}\right)$$

ὅτε πράγματι: $\overline{AB} + \overline{B\Gamma} = \overline{A\Gamma}$. Οὕτω πληροῦνται τὰ κάτωθι μετρικὰ ἀξιώματα:

1. Ἕκαστον εὐθύγραμμον τμῆμα ἔχει ἓν ὡρισμένον μῆκος, τὸ ὁποῖον εἶναι εἷς πραγματικὸς θετικὸς ἀριθμός.

2. Ἐὰν εὐθύγραμμον τμῆμα μήκους α προεκταθῆ κατὰ εὐθύγραμμον τμῆμα μήκους β, τότε τὸ προσθετικὸν εὐθύγραμμον τμῆμα ἔχει μῆκος α+β.

3. Ἐὰν ρ εἶναι τυχὼν θετικὸς ἀριθμός, ὑπάρχει ἐπὶ ἑκάστης ἡμιευθείας, ἐχούσης τυχὸν ἀρχικὸν σημεῖον Α, ἓν καὶ μόνον ἓν σημεῖον ἔχον ἀπὸ τοῦ Α τὴν ἀπόστασιν ρ.

Λεπτομερεστέρα διαπραγμάτευσις τοῦ κατὰ Poincare μοντέλλου ἀναφέρεται εἰς τὸ σχετικὸν βιβλίον τοῦ Γεωμέτρου Meschkowski. Κατὰ τὰ λοιπὰ τὸ κατὰ Poincaré μοντέλλο πολλάκις ἐκτίθεται κατὰ τρόπον, ὥστε νὰ μὴ λαμβάνωμεν ἓν ἡμιεπίπεδον μὲ ὀρθογώνια ἡμικύκλια, ἀλλὰ τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς κύκλου μὲ πρὸς τοῦτο ὀρθογώνια κυκλικὰ τόξα. Ἡ παραλλαγὴ αὕτη μεθίσταται εἰς τὸ περιγραφὲν μοντέλλο τῇ βοηθείᾳ ἑνὸς μετασχηματισμοῦ δι' ἀντιστρόφων ἀκτίνων.

Ἐν τέλει θεωροῦμεν ἐπιβεβλημένον ὅπως παρεμπιπτόντως ἀναφέρωμεν τὸ ἕτερον ὑπάρχον ἐξωευκλείδιον μοντέλλο, τὸ ὁποῖον ὁπωσδήποτε δὲν παρουσιάζει τὴν ἁπλότητα τοῦ κατὰ Poincare μοντέλλου. Τοῦτο διετυπώθη ὑπὸ τοῦ Felix Klein. Ἐν αὐτῷ ἐκλέγεται ὡς πεδίον θεωρήσεως τῆς Γεωμετρίας τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς κύκλου ἢ μιᾶς ἐλλείψεως. Ὡς Ν-σημεῖα λαμβάνονται τὰ Ε-σημεῖα τοῦ ἐσωτερικοῦ τῆς ἐλλείψεως, ἐνῷ ὡς Ν-εὐθεῖαι αἱ χορδαὶ τῆς ἐλλείψεως ταύτης.

ΜΙΑ ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΗΣ Ε.Μ.Ε.

ΧΡΟΝΙΚΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΣΥΝΕΔΡΙΟΥ ΠΑΤΡΩΝ

— Ἐπιστημονικαὶ ἐργασίαι
— Παιδαγωγικὰ θέματα
— Ἐκπαιδευτικὰ προβλήματα

ΤΙΜΗ ΔΡΧ. 100

Διατίθεται ἀπὸ τὰ γραφεῖα τῆς Ε.Μ.Ε.
Ἀποστέλλεται ταχυδρομικῶς κατόπιν σχετικῆς ἐπιταγῆς