Author: Δημήτριος Βάθης

Title: Η έννοια του συνόλου επιλογής

Creator: HDML

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Ὑπὸ Δημητρίου Βάθη, Καθηγητοῦ Μαθηματικῶν,
Γυμνασίου Βαθέος – Αὐλίδος

Τί εἶναι τὸ *σύνολον ἐπιλογῆς;*

Πῶς δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ ἔννοια αὐτὴ εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων τῶν στοιχειωδῶν Μαθηματικῶν;

Κατωτέρω ἀσχολούμεθα μὲ τὰ θέματα αὐτὰ καὶ παραθέτομεν διάφορα παραδείγματα ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, τῆς Γεωμετρίας, τῆς Συνδυαστικῆς καὶ τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων:

Ἔστωσαν τὰ σύνολα: $K_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $K_2 = \{\beta_1, \beta_2\}$ καὶ $K_3 = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\}$, ἀνὰ *δύο ξένα*, καὶ τὸ σύνολον $K = \{K_1, K_2, K_3\}$.

Ἓν σύνολον E ὀνομάζεται *σύνολον ἐπιλογῆς**) τοῦ συνόλου K, ἐάν: α) Κάθε στοιχεῖον τοῦ E ἀνήκει εἰς ἓν καὶ μόνον ἕν, ἐκ τῶν συνόλων K_i $(i = 1, 2, 3)$ καὶ β) Διὰ κάθε K_i $(i = 1, 2, 3)$ ὑπάρχει στοιχεῖον τοῦ E, τὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς τὸ K_i.

Παραδείγματα: Ἕκαστον τῶν συνόλων: $\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$, $\{\alpha_1, \beta_2, \gamma_2\}$, $\{\alpha_2, \beta_1, \gamma_3\}$, $\{\alpha_2, \beta_1, \gamma_2\}$ εἶναι *σύνολα ἐπιλογῆς* τοῦ συνόλου K.

Τὸ σύνολον ἐπιλογῆς τοῦ συνόλου: $A\{A_1, A_2, \dots, A_\nu\}$, ὅπου A_i $(i = 1, 2, \dots, \nu)$, εἶναι σύνολα ἀνὰ δύο ξένα, εἶναι τὸ *κενὸν* σύνολον $\varnothing$, ἐὰν καὶ μόνον ἐάν, ἓν τῶν συνόλων: A_i $(i = 1, 2, \dots, \nu)$ εἶναι τὸ $\varnothing$.

Ἂς θεωρήσωμεν τώρα ἓν σύνολον M, τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα εἶναι σύνολα *μὴ κενὰ* καὶ ἀνὰ δύο ξένα. Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ M εἶναι πεπερασμένον ἢ μὴ πεπερασμένον ἀλλ' ἀριθμήσιμον, ἡ ὕπαρξις *συνόλου ἐπιλογῆς* αὐτοῦ οὔτε «προφανὴς» εἶναι, οὔτε δύναται ν' ἀποδειχθῇ διὰ τῶν λοιπῶν ἀξιωμάτων τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων.

Τὸ περίφημον *ἀξίωμα ἐπιλογῆς* ἐξασφαλίζει τὴν ὕπαρξιν *συνόλου ἐπιλογῆς* ὑπὸ ὡρισμένας ὑποθέσεις.

Τὸ ἀξίωμα ἐπιλογῆς ἔχει διαφόρους ἰσοδυνάμους διατυπώσεις· μία δὲ ἐξ αὐτῶν εἶναι ἡ ἑξῆς:

«Ἐὰν M εἶναι ἓν σύνολον μὴ κενῶν συνόλων ἀνὰ δύο ξένων, τότε ὑπάρχει (τοὐλάχιστον) *ἓν σύνολον ἐπιλογῆς αὐτοῦ»*.

Εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὸ M καὶ τὰ στοιχεῖα αὐτοῦ εἶναι σύνολα πεπερασμένα, δυνάμεθα εὐκόλως νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν πληθικὸν ἀριθμὸν τοῦ συνόλου ὅλων τῶν *συνόλων ἐπιλογῆς* τοῦ M.

Κατωτέρω θὰ συμβολίζεται μὲ $|A|$ ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς συνόλου A.

Παράδειγμα 1ον. Τὸ σύνολον $K = \{K_1, K_2, K_3\}$ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος ἔχει:

$|K_1| \cdot |K_2| \cdot |K_3| = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ σύνολα ἐπιλογῆς.

Παράδειγμα 2ον. Ἔστωσαν:

$$A = \{\alpha_1, \alpha_2\}, \quad B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}, \quad \Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5\}.$$

Τὸ σύνολον $T = \{A, B, \Gamma\}$ ἔχει:

$|A| \cdot |B| \cdot |\Gamma| = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ σύνολα ἐπιλογῆς.

Παράδειγμα 3ον Ἔστω:

$$\Delta = \{\alpha, \beta\} \quad \text{καὶ} \quad Z = \{x, y, \omega\}.$$

Τὸ σύνολον $\Sigma = \{\Delta, Z\}$ ἔχει:

$|\Delta| \cdot |Z| = 2 \cdot 3 = 6$ σύνολα ἐπιλογῆς.

Ταῦτα εἶναι τὰ ἑξῆς:

$$\{\alpha, x\}, \ \{\alpha, y\}, \ \{\alpha, \omega\}, \ \{\beta, x\}, \ \{\beta, y\}, \ \{\beta, \omega\}.$$

Ἡ ἔννοια τοῦ *συνόλου ἐπιλογῆς* ὑπεισέρχεται εἰς πολλὰ προβλήματα τῶν στοιχειωδῶν Μαθηματικῶν, ἀδιάφορον, ἂν ἀποφεύγεται ὁ ὅρος «σύνολον ἐπιλογῆς». Κατωτέρω παραθέτομεν παραδείγματα:

Πρόβλημα 1ον. *Ἐὰν ἐκτελέσωμεν ἐπιμεριστικῶς τὸν πολλαπλασιασμὸν $(\alpha+\beta)\cdot(x+y+\omega)$, πόσους προσθετέους θὰ εὕρωμεν;*

Λύσις. Ὁ ἀριθμὸς τῶν προσθετέων εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν ὅλων τῶν συνόλων ἐπιλογῆς τοῦ συνόλου $\Sigma = \{\Delta, Z\}$ (βλέπε Παράδειγμα 3ον).

Ἕκαστος προσθετέος εἶναι τὸ γινόμενον τῶν στοιχείων ἑνὸς συνόλου ἐπιλογῆς τοῦ Σ.

Οὕτως ἔχομεν:

$$(\alpha+\beta)\cdot(x+y+\omega) = \alpha x + \alpha y + \alpha\omega + \beta x + \beta y + \beta\omega.$$

Πρόβλημα 2ον. *Πόσους προσθετέους θὰ εὕρωμεν, ἐὰν ἐκτελέσωμεν ἐπιμεριστικῶς τὸν πολλαπλασιασμὸν εἰς τὸ γινόμενον:*

$$(\alpha_1+\alpha_2)\cdot(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\cdot(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5)\,;$$

Λύσις. Ἕκαστος προσθετέος ἔχει ὡς παράγοντας ἀνὰ ἕνα προσθετέον ἐξ ἑκάστου ἀθροίσματος, τὸ ὁποῖον ἐμφανίζεται ὡς παράγων εἰς τὸ δοθὲν

*) Choice-set ἢ selection set.

γινόμενον, καὶ μόνον αὐτοῦ. Π.χ. εἷς προσθετέος εἶναι τὸ γινόμενον $\alpha_2 \cdot \beta_3 \cdot \gamma_2$. Τοῦτο εἶναι τὸ γινόμενον τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου $\{\alpha_2, \beta_3, \gamma_2\}$. Τὸ σύνολον $\{\alpha_2, \beta_3, \gamma_2\}$ εἶναι ἓν σύνολον ἐπιλογῆς τοῦ συνόλου Τ (βλέπε Παράδειγμα 2ον).

Ὁ ἀριθμὸς τῶν προσθετέων εἶναι ἴσος πρὸς τὸν πληθικὸν ἀριθμὸν τοῦ συνόλου ὅλων τῶν συνόλων ἐπιλογῆς τοῦ Τ.

Πρόβλημα 3ον. *Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δίδονται 12 στιγμαὶ χρώματος μαύρου, 5 στιγμαὶ χρώματος ἐρυθροῦ, 2 στιγμαὶ χρώματος πρασίνου καὶ 8 στιγμαὶ χρώματος κυανοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν «διαφορετικῶν» καμπύλων τοῦ ἐπιπέδου, ἑκάστη τῶν ὁποίων περιέχει μίαν καὶ μόνον μίαν στιγμὴν ἐξ ἑκάστου χρώματος.* Θεωροῦμεν ὡς «*διαφορετικάς*» δύο καμπύλας, ἐὰν ἡ μία περιέχει τοὐλάχιστον μίαν στιγμὴν μὴ ἀνήκουσαν εἰς τὴν ἄλλην.

Λύσις. Ἔστωσαν α_i $(i = 1, 2, \ldots, 12)$, β_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$, γ_i $(i = 1, 2)$ καὶ δ_i $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ αἱ μαῦραι, ἐρυθραί, πράσιναι καὶ αἱ κυαναῖ στιγμαὶ ἀντιστοίχως.

Θεωροῦμεν τὰ σύνολα: $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{12}\}$, $B = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_5\}$, $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ καὶ $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_8\}$.

Τὸ σύνολον τῶν στιγμῶν, διὰ τῶν ὁποίων διέρχεται μία τῶν θεωρουμένων καμπύλων, εἶναι ἓν *σύνολον ἐπιλογῆς* τοῦ συνόλου $P = \{A, B, \Gamma, \Delta\}$.

Τὸ σύνολον P ἔχει:

$$|A| \cdot |B| \cdot |\Gamma| \cdot |\Delta| = 12 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 8 = 960$$

σύνολα ἐπιλογῆς· ἄρα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν «*διαφορετικῶν*» καμπύλων εἶναι 960.

Πρόβλημα 4ον. *Ρίπτομεν ἕνα πράσινον κύβον καὶ ἔπειτα ἕνα ἐρυθρὸν κύβον. Κατὰ πόσους τρόπους δύνανται νὰ ἔλθουν οἱ δύο αὐτοὶ κύβοι ;*

Λύσις. Οἱ ζητούμενοι τρόποι εἶναι ὅσα καὶ τὰ σύνολα ἐπιλογῆς τοῦ συνόλου $\{\Pi, E\}$, ὅπου

$$\Pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_6\} \text{ καὶ } E = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_6\},$$

δηλαδὴ $6 \times 6 = 36$.

Σημείωσις. Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν *ἐπαναληπτικῶν διατάξεων* τῶν 6 πραγμάτων ἀνὰ 2, δηλαδὴ $6^2 = 36$.

Ἂς θεωρήσωμεν τώρα τὸ γενικὸν

Πρόβλημα τοῦ Ἀπολλωνίου: «*Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος ἐφαπτόμενος τριῶν δοθέντων κύκλων*».

Συμφυὲς εἰς τοῦτο εἶναι τὸ

Πρόβλημα 5ον. *Πόσας τὸ πολὺ λύσεις δύναται νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα τοῦ Ἀπολλωνίου εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν οἱ τρεῖς δοθέντες κύκλοι εὑρίσκονται ἀνὰ δύο ἐκτὸς ἀλλήλων ;*

Λύσις. Θεωροῦμεν τὰ σύνολα $K_1 = \{\sigma_1, \xi_1\}$, $K_2 = \{\sigma_2, \xi_2\}$ καὶ $K_3 = \{\sigma_3, \xi_3\}$, ὅπου τὸ μὲν στοιχεῖον σ_i $(i = 1, 2, 3)$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὁ κατασκευαστέος κύκλος Κ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου K_i $(i = 1, 2, 3)$ *ἐσωτερικῶς*, τὸ δὲ στοιχεῖον ξ_i $(i = 1, 2, 3)$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὁ κύκλος Κ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου K_i $(i = 1, 2, 3)$ *ἐξωτερικῶς*.

Τὸ πρόβλημα τοῦ Ἀπολλωνίου δύναται νὰ ἔχῃ τόσας *τὸ πολὺ* λύσεις, ὅσα εἶναι τὰ σύνολα ἐπιλογῆς τοῦ συνόλου $\{K_1, K_2, K_3\}$, ἤτοι: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ λύσεις.

Σημείωσις. Αἱ λύσεις εἶναι ὅσαι αἱ *ἐπαναληπτικαὶ διατάξεις* τῶν δύο πραγμάτων (σ καὶ ξ) ἀνὰ 3, ἤτοι $2^3 = 8$. (Ἐτέθη σ ἀντὶ «ἐσωτερικὴ ἐπαφή» καὶ ξ ἀντὶ «ἐξωτερικὴ ἐπαφή»).

Παρομοίως σκεπτόμενοι δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ αὐτὸ πρόβλημα εἰς τὴν γενικωτέραν περίπτωσιν, καθ' ἣν οἱ δοθέντες κύκλοι εἶναι ν, κείμενοι ἀνὰ δύο ἐκτὸς ἀλλήλων.

Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει τὸ πρόβλημα δύναται νὰ ἔχῃ τόσας τὸ πολὺ λύσεις, ὅσα εἶναι τὰ σύνολα ἐπιλογῆς τοῦ συνόλου $K = \{K_1, K_2, \ldots, K_\nu\}$, ὅπου

$$K_i = \{\sigma_i, \xi_i\} \text{ καὶ } (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

$$\text{ἤτοι: } \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{\nu \text{ παράγοντες}} = 2^\nu$$

Σημείωσις. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν *ἐπαναληπτικῶν διατάξεων* τῶν δύο πραγμάτων (σ καὶ ξ) ἀνὰ ν.

(Συνέχεια ἐκ τῆς σελ. 9)

Σταμάτη, Ε.: Ἀνθολογία ἀρχαίων κειμένων, Ἀθῆναι 1960.

———: Προσωκρατικοὶ Φιλόσοφοι, Ἀθῆναι 1966.

———: Ἡ Ἑλληνικὴ Ἐπιστήμη, Ἀθῆναι 1968.

Στεφανίδη, Μ.: Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν Ἱστορίαν τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν, Ἀθῆναι 1938.

Couderc, P.: Histoire de l' Astronomie, Presses Universitaires de France, Paris 1966.

Dicks, D.: Early Greek Astronomy to Aristotle, Bristol 1970.

Dampier, W.: A History of Science, 3rd. ed. Cambridge 1946.

Meschkowski, H.: Mathematiker - Lexikon, Bibliographisches Institut, Mannheim 1964.

Kochen, Ch. Alb. Geschicte der Astronomie, Lausaune 1963.

Taton, R.: Histoire générale des sciences - La science antique et mediavale. Vol. I, Paris 1957.