Author: Εμμανουήλ Καλυκάκης

Title: Διαίρεσις ακεραίων πολυωνύμων

Creator: HDML

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Ὑπό Καλυκάκη Ἐμμανουήλ, Β' Ἀρρένων Ἡρακλείου

Θεώρημα. Τό πηλίκον [1] τῆς διαιρέσεως ἑνός πολυωνύμου: $f(x) \in A[x]$ διά τοῦ γινομένου: $\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \cdots \varphi_\nu(x)$, ἔνθα $\varphi_i(x) \in A[x]$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ καί $\varphi_i(x) \neq 0$, εἶναι τό τελευταῖον πηλίκον $\Pi_\nu(x)$, τό ὁποῖον εὑρίσκομεν διαιροῦντες τό $f(x)$ διά τοῦ $\varphi_1(x)$, τό λαμβανόμενον πηλίκον $\Pi_1(x) \in A[x]$ διά τοῦ $\varphi_2(x)$, τό νέον πηλίκον $\Pi_2(x) \in A[x]$ διά τοῦ $\varphi_3(x)$ κ.ο.κ., τό δέ ὑπόλοιπον εἶναι τῆς μορφῆς:

$$\upsilon(x) \equiv \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \cdots \varphi_{\nu-1}(x)\upsilon_\nu(x) +$$
$$\cdots + \varphi_1(x)\varphi_2(x)\upsilon_3(x) + \varphi_1(x)\upsilon_2(x) + \upsilon_1(x), \text{ ἔνθα:}$$

$\upsilon_1(x), \upsilon_2(x), \ldots, \upsilon_\nu(x)$ εἶναι ἀντιστοίχως τά ὑπόλοιπα τῶν ἀνωτέρω διαιρέσεων.

Ἀπόδειξις.

$$f(x) \equiv \varphi_1(x) \cdot \Pi_1(x) + \upsilon_1(x) \qquad (1)$$
$$\Pi_1(x) \equiv \varphi_2(x) \cdot \Pi_2(x) + \upsilon_2(x) \qquad (2)$$
$$\Pi_2(x) \equiv \varphi_3(x) \cdot \Pi_3(x) + \upsilon_3(x) \qquad (3)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\Pi_{\nu-1}(x) \equiv \varphi_\nu(x) \cdot \Pi_\nu(x) + \upsilon_\nu(x) \qquad (\nu),$$

ἔνθα βαθμός $\upsilon_i(x) <$ βαθ. $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$.

Πολλαπλασιάζοντες τάς ταυτότητας τῶν (ἀλγοριθμικῶν) διαιρέσεων (1), (2), (3),..., (ν) ἀντιστοίχως ἐπί $1, \varphi_1(x), \varphi_1(x)\varphi_2(x), \ldots, \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \cdots \varphi_{\nu-1}(x)$ καί προσθέτοντες αὐτάς κατά μέλη, λαμβάνομεν:

$$f(x) \equiv [\varphi_1(x)\varphi_2(x) \cdots \varphi_\nu(x)]\,\Pi_\nu(x) + [\varphi_1(x)\varphi_2(x)$$
$$\cdots \varphi_{\nu-1}(x)\,\upsilon_\nu(x) + \cdots + \varphi_1(x)\varphi_2(x)\upsilon_3(x) +$$
$$+ \varphi_1(x) \cdot \upsilon_2(x) + \upsilon_1(x)] \qquad (\mathrm{i}).$$

Ἡ ἀνωτέρω ταυτότης λαμβάνεται καί δι' ἀπαλοιφῆς τῶν: $\Pi_1(x), \Pi_2(x), \ldots, \Pi_{\nu-1}(x)$ μεταξύ τῶν (1), (2), (3),..., (ν), ἔνθα $\Pi_\nu(x)$ τό πηλίκον καί

$$\upsilon(x) \equiv \varphi_1(x)\varphi_2(x) \cdots \varphi_{\nu-1}(x) \cdot \upsilon_\nu(x) +$$
$$\cdots + \varphi_1(x)\varphi_2(x)\upsilon_3(x) + \varphi_1(x)\upsilon_2(x) + \upsilon_1(x)$$

τό ὑπόλοιπον αὐτῆς, διότι:

$$\text{βαθ. } \upsilon(x) = \text{βαθ } [\varphi_1(x)\varphi_2(x) \cdots \varphi_{\nu-1}(x)\upsilon_\nu(x) +$$
$$\cdots + \varphi_1(x)\varphi_2(x)\upsilon_3(x) + \varphi_1(x)\upsilon_2(x) + \upsilon_1(x)] \leqslant$$
$$\max\,[\text{βαθ. } \varphi_1(x)\varphi_2(x) \cdots \varphi_{\nu-1}(x)\upsilon_\nu(x), \ldots$$
$$\ldots, \text{βαθ } \varphi_1(x)\varphi_2(x)\upsilon_3(x), \text{βαθ. } \varphi_1(x)\upsilon_2(x), \text{βαθ. } \upsilon_1(x)] =$$
$$= \text{βαθ. } \varphi_1(x)\varphi_2(x) \cdots \varphi_{\nu-1}(x)\,\upsilon_\nu(x) <$$
$$< \text{βαθ. } \varphi_1(x)\varphi_2(x) \cdots \varphi_\nu(x), \text{ ἀφοῦ:}$$

$$\text{βαθ. } \upsilon_\nu(x) < \text{βαθ. } \varphi_\nu(x).$$

Πρός ἀπόδειξιν τοῦ ἀναλλοιώτου τῶν $\Pi_\nu(x)$ καί $\upsilon(x)$ ἐνεργοῦμεν οὕτω:

Ἔστω $\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \cdots \varphi_\nu(x) \equiv \Phi_1(x) \cdot \Phi_2(x) \cdots \Phi_k(x)$, ἔνθα $\nu, k \in \mathbb{N}$. Τότε λόγῳ τῆς μοναδικότητός τοῦ πηλίκου καί τοῦ ὑπολοίπου μιᾶς διαιρέσεως, θά ἔχωμεν:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &\equiv [\varphi_1(x)\varphi_2(x) \cdots \varphi_\nu(x)]\,\Pi_\nu(x) + \upsilon(x) \\ f(x) &\equiv [\Phi_1(x)\Phi_2(x) \cdots \Phi_k(x)]\,\Pi_\nu(x) + \upsilon(x) \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{ii})$$

Ἐκ τῆς διαιρέσεως $f(x) : \Phi_1(x) \cdot \Phi_2(x) \cdots \Phi_k(x)$, ὡς καί ἐν ἀρχῇ, λαμβάνομεν:

$$f(x) \equiv [\Phi_1(x)\Phi_2(x) \cdots \Phi_k(x)]\,\Pi_\nu(x) +$$
$$[\Phi_1(x)\Phi_2(x) \cdots \Phi_{k-1}(x)Y_k +$$
$$\cdots + \Phi_1(x)\Phi_2(x) \cdot Y_3(x) + \Phi_1(x)Y_2(x) + Y_1(x)].$$

Ἐξ αὐτῆς τῆς (i) καί τῶν (ii) ἕπεται:

$$\varphi_1(x)\varphi_2(x) \cdots \varphi_{\nu-1}(x)\upsilon_\nu(x) + \cdots + \varphi_1(x)\upsilon_2(x) + \upsilon_1(x) \equiv$$
$$\equiv \Phi_1(x)\Phi_2(x) \cdots \Phi_{k-1}(x)Y_k(x) + \cdots + \Phi_1(x)Y_2(x) + Y_1(x).$$

Τό ἀνωτέρω θεώρημα ἀποτελεῖ ἐπέκτασιν θεωρήματος περιλαμβανομένου εἰς τό βιβλίον τῆς Lucienne Félix: exposé moderne des mathématiques élémentaires, DUNOD, PARIS 1959, παράγραφος 1, σελ. 127 καί εἰς τήν μετάφρασιν αὐτοῦ ὑπό Δημητρίου Γκιόκα: Σύγχρονος ἔκθεσις τῶν στοιχειωδῶν μαθηματικῶν, παράγρ. 1, σελ. 143.

Κατωτέρω ἀναφέρομεν ἐνδεικτικῶς μερικάς ἐκ τῶν πολλῶν συνεπειῶν τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος:

1ον) Ἄν εἰς τήν ταυτότητα τῆς διαιρέσεως (i) τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος θέσωμεν ὅπου $\varphi_i(x) \equiv \varphi(x)$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, λαμβάνομεν:

$$f(x) \equiv [\varphi^\nu(x)] \cdot \Pi_\nu(x) + [\varphi^{\nu-1}(x)\upsilon_\nu(x) +$$
$$\cdots + \varphi^2(x)\upsilon_3(x) + \varphi(x)\upsilon_2(x) + (\upsilon_1(x)].$$

Ἄν $\varphi(x) \equiv x - \alpha$, ἡ ἀνωτέρω γίνεται:

$$f(x) \equiv [(x-\alpha)^\nu] \cdot \Pi_\nu(x) + [(x-\alpha)^{\nu-1} \cdot \upsilon_\nu +$$
$$\cdots + (x-\alpha)^2 \cdot \upsilon_3 + (x-\alpha) \cdot \upsilon_2 + \upsilon_1],$$

ἔνθα $\upsilon_\nu, \ldots, \upsilon_3, \upsilon_2, \upsilon_1$ σταθεραί.

Ἐκ τῆς $f(x) \equiv (x-\alpha)\,\Pi_1(x) + \upsilon_1$ καί τῶν $\Pi_{i-1}(x) \equiv (x-\alpha)\,\Pi_i(x) + \upsilon_i$, $i = 2, 3, \ldots, \nu$ διά $x = \alpha$ λαμβάνομεν: $f(\alpha) = \upsilon_1$ καί $\Pi_{i-1}(\alpha) = \upsilon_i$. Ἄρα ἡ ἀνωτέρω ταυτότης γίνεται:

$$f(x) \equiv [(x-\alpha)^\nu]\,\Pi_\nu(x) + [(x-\alpha)^{\nu-1}\,\Pi_{\nu-1}(\alpha) +$$
$$\cdots + (x-\alpha)^2\,\Pi_2(\alpha) + (x-\alpha)\,\Pi_1(\alpha) + f(\alpha)].$$

(1) Διά τοῦ $A[x]$ ἐννοοῦμεν δακτύλιον ἀκεραιότητος πολυωνύμων.

2*) Ἂν εἰς τὴν ταυτότητα τῆς διαιρέσεως (i) τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος, θέσωμεν, ὅπου, $\varphi_i(x) \equiv x-\alpha_i$, $i=1, 2, \dots, \nu$, λαμβάνομεν :

$$f(x) \equiv [(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_\nu)]\,\Pi_\nu(x) +$$
$$[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{\nu-1})\,\upsilon_\nu +$$
$$\cdots + (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\upsilon_3 + (x-\alpha_1)\upsilon_2 + \upsilon_1],$$

ἔνθα $\upsilon_\nu, \dots, \upsilon_3, \upsilon_2, \upsilon_1$ σταθεραί.

Ἂν βαθ. $f(x) = \nu$, τότε ἡ ἀνωτέρω γίνεται :

$$f(x) \equiv [(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_\nu)]\cdot\Pi_\nu +$$
$$[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{\nu-1})\upsilon_\nu +$$
$$\cdots + (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\upsilon_3 + (x-\alpha_1)\upsilon_2 + \upsilon_1].$$

Δηλαδὴ δοθέντος ἀκεραίου πολυωνύμου $f(x) \in A[x]$ βαθμοῦ $\nu^{ου}$ καὶ τὰ διάφορα μεταξύ των στοιχεῖα $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1} \in A$, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν κατὰ μοναδικὸν τρόπον $\nu+1$ στοιχεῖα $\upsilon_1, \upsilon_2, \dots, \upsilon_\nu, \Pi_\nu \in A$ συναρτήσει τῶν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}$, ὥστε :

$$f(x) \equiv (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_\nu)\cdot\Pi_\nu +$$
$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{\nu-1})\upsilon_\nu +$$
$$\cdots + (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\upsilon_3 + (x-\alpha_1)\upsilon_2 + \upsilon_1.$$

Ἐκ τῆς $f(x) \equiv (x-\alpha_1)\,\Pi_1(x) + \upsilon_1$ καὶ τῶν

$$\Pi_{i-1}(x) \equiv (x-\alpha_i)\,\Pi_i(x) + \upsilon_i,\quad i = 2, 3, \dots, \nu,$$

διὰ $x=\alpha_1$ καὶ $x=\alpha_i$ ἀντιστοίχως, λαμβάνομεν :

$$f(\alpha_1) = \upsilon_1 \quad \text{καὶ} \quad \Pi_{i-1}(\alpha_i) = \upsilon_i.$$

Ἄρα ἡ ἀνωτέρω ταυτότης γίνεται :

$$f(x) \equiv [(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_\nu)]\cdot\Pi_\nu(x) +$$
$$[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{\nu-1})\,\Pi_{\nu-1}(\alpha_\nu) +$$
$$\cdots + (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\Pi_2(\alpha_3) + (x-\alpha_1)\Pi_1(\alpha_2) + f(\alpha_1)].$$

Παραδείγματα :

1ον) *Ἐὰν* $\varphi_1(x) \equiv x^2+x+1$,

$$\varphi_2(x) \equiv x^2-x+2, \quad \varphi_3(x) \equiv x^2+2x+3$$

καὶ 1ον) τὸ $f(x)$ διαιρούμενον διὰ τοῦ $\varphi_1(x)$ δίδει ὑπόλοιπον $8x+11$, 2ον) τὸ (προηγουμένως) εὑρεθὲν πηλίκον διαιρούμενον διὰ $\varphi_2(x)$ δίδει ὑπόλοιπον $-x-2$ καὶ 3ον) τὸ τελευταῖον πηλίκον διαιρούμενον διὰ τοῦ $\varphi_3(x)$ δίδει πηλίκον x καὶ ὑπόλοιπον $-2x-1$, νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως :

$f(x) : \varphi_1(x)\varphi_2(x)\varphi_3(x)$ καὶ νὰ ὁρισθῇ τὸ πολυώνυμον $f(x)$.

Λύσις. Ἡ ταυτότης (i) τοῦ θεωρήματος γίνεται :

$$f(x) \equiv [\varphi_1(x)\varphi_2(x)\varphi_3(x)]\,\Pi_3(x) +$$
$$+ [\varphi_1(x)\varphi_2(x)\cdot\upsilon_3(x) + \varphi_1(x)\upsilon_2(x) + \upsilon_1(x)].$$

Ἐπομένως :

$$f(x) \equiv [(x^2+x+1)(x^2-x+2)(x^2+2x+3)]x +$$
$$+ [(x^2+x+1)(x^2-x+2)(-2x-1) +$$
$$+ (x^2+x+1)(-x-2) + (8x+11)].$$

Ἄρα $\upsilon(x) \equiv -2x^5-x^4-5x^3-7x^2+7$ καὶ

$$f(x) \equiv x^7+2x^6+3x^5+4x^4+5x^3+6x+7.$$

2ον) *Ἂν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως :*

$f(x) : \varphi_1(x)\varphi_2(x)\varphi_3(x)$ εἶναι $-2x^5-x^4-5x^3-7x^2+7$, ἔνθα $\varphi_1(x) \equiv x^2-x+2$, $\varphi_2(x) \equiv x^2+2x+3$,

$$\varphi_3(x) \equiv x^2+x+1,$$

νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων :

$f(x) : \varphi_1(x)$, $\Pi_1(x) : \varphi_2(x)$, $\Pi_2(x) : \varphi_3(x)$, ἔνθα $\Pi_1(x)$, $\Pi_2(x)$ τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων :

$$f(x) : \varphi_1(x) \quad \text{καὶ} \quad \Pi_1(x) : \varphi_2(x).$$

Λύσις. Ἐκ τῆς ταυτότητος τῆς διαιρέσεως τοῦ θεωρήματος (i) λαμβάνομεν :

$$f(x) \equiv [(x^2-x+2)(x^2+2x+3)(x^2+x+1)]\Pi_3(x) +$$
$$+[(x^2-x+2)(x^2+2x+3)\upsilon_3(x)+(x^2-x+2)\upsilon_2(x)+\upsilon_1(x)].$$

Ἐπομένως :

$$f(x) \equiv [(x^2-x+2)(x^2+2x+3)(x^2+x+1)]\,\Pi_3(x) +$$
$$+ [(x^2-x+2)(x^2+2x+3)(\alpha x+\beta) +$$
$$+ (x^2-x+2)(\gamma x+\delta) + (\varepsilon x+\zeta)].$$

Ἄρα πρέπει :

$$(x^2-x+2)(x^2+2x+3)(\alpha x+\beta) + (x^2-x+2)(\gamma x+\delta) +$$
$$+ (\varepsilon x+\zeta) \equiv -2x^5-x^4-5x^3-7x^2+7.$$

Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν :

$$\alpha x^5 + (\alpha+\beta)x^4 + (3\alpha+\beta+\gamma)x^3 + (\alpha+3\beta-\gamma+\delta)x^2 +$$
$$+ (6\alpha+\beta+2\gamma-\delta+\varepsilon)x + (6\beta+2\delta+\zeta) \equiv$$
$$\equiv -2x^5-x^4-5x^3-7x^2+7.$$

Ἐπομένως :

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= -2 \\ \alpha+\beta &= -1 \\ 3\alpha+\beta+\gamma &= -5 \\ \alpha+3\beta-\gamma+\delta &= -7 \\ 6\alpha+\beta+2\gamma-\delta+\varepsilon &= 0 \\ 6\beta+2\delta+\zeta &= 7 \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{aligned} \alpha &= -2 \\ \beta &= 1 \\ \gamma &= 0 \\ \delta &= -8 \\ \varepsilon &= 3 \\ \zeta &= 17 \end{aligned}$$

Τὰ ζητούμενα ὑπόλοιπα εἶναι :

$$\alpha x+\beta = -2x+1, \quad \gamma x+\delta = -8, \quad \varepsilon x+\zeta = 3x+17.$$

3ον) *Ἂν 6, 30, 0, −42 εἶναι τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων ἑνὸς πολυωνύμου $f(x)$ τρίτου βαθμοῦ διὰ τῶν $x-1$, $x-2$, $x+1$, $x+2$ ἀντιστοίχως, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὑπόλοιπον καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως : $f(x) : (x-1)(x-2)(x+1)$ ὡς καὶ τὸ πολυώνυμον $f(x)$.*

Λύσις. Γνωρίζομεν ὅτι :

$$f(x) \equiv [(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_\nu)]\,\Pi_\nu +$$
$$+ [(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{\nu-1})\upsilon_\nu +$$
$$\cdots + (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\upsilon_3 + (x-\alpha_1)\upsilon_2 + \upsilon_1].$$

Ἄρα :

$$f(x) \equiv (x-1)(x-2)(x+1)\,\Pi_3 +$$
$$+ (x-1)(x-2)\upsilon_3 + (x-1)\upsilon_2 + \upsilon_1.$$

Θέτοντες εἰς αὐτήν, ὅπου $x = 1, 2, -1, -2$, λαμβάνομεν ἀντιστοίχως :

(Συνέχεια εἰς σελ. 17)

ασκησεις δια την α' ταξιν

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ. Α.43 Δοχεῖον περιέχει 100 gr οἴνου. Ἐξάγομεν τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ περιεχομένου οἴνου καὶ τὸ ἀντικαθιστῶμεν δι' ἴσης ποσότητος ὕδατος. Κατόπιν ἐξάγομεν τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ σχηματισθέντος μείγματος. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπομένουσα ποσότης οἴνου εἰς τὸ δοχεῖον.

Λύσις. Μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τοῦ $\frac{1}{4}$ τοῦ περιεχομένου εἰς τὸ δοχεῖον οἴνου, δι' ὕδατος, ἀπομένουν:

$$\frac{3}{4}\cdot 100 \text{ kg} = 75 \text{ kg οἴνου.}$$

Κατὰ τὴν δευτέραν ἐξαγωγήν, ἐξάγονται $\frac{100}{3}$ kg μείγματος, τὰ ὁποῖα περιέχουν $\frac{75}{100}\cdot\frac{100}{3}$ kg οἴνου, δηλ. 25 kg οἴνου. Ἑπομένως, ἡ ἀπομένουσα εἰς τὸ δοχεῖον ποσότης οἴνου εἶναι: $75 \text{ kg} - 25 \text{ kg} = 50 \text{ kg}$.

Α.43 Κρουνὸς α' γεμίζει δεξαμενὴν εἰς 20 ὥρας. Δεύτερος κρουνὸς παρέχει εἰς αὐτὴν τετραπλασίαν ποσότητα ὕδατος εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον. Ἐὰν ἀνοιχθοῦν συγχρόνως καὶ ἐπὶ 3 ὥρας οἱ δύο κρουνοί, ἡ δεξαμενὴ χρειάζεται ἀκόμη 400 kg ὕδατος διὰ νὰ γεμίσῃ. Πόσα kg ὕδατος χωρεῖ ἡ δεξαμενή;

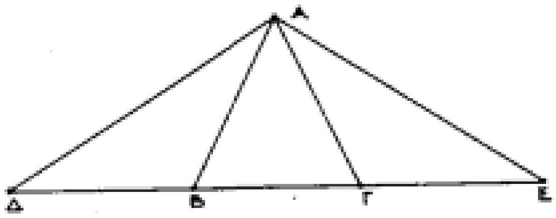
Λύσις. Εἰς μίαν ὥραν ὁ μὲν πρῶτος κρουνὸς γεμίζει τό: $\frac{1}{20}$ τῆς δεξαμενῆς, ὁ δὲ δεύτερος τό: $\frac{4}{20}$ αὐτῆς. Καὶ οἱ δύο συγχρόνως εἰς μίαν ὥραν γεμίζουν τό:

$$\frac{1}{20}+\frac{4}{20}=\frac{1}{4}$$

τῆς δεξαμενῆς καὶ εἰς 3 ὥρας τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτῆς.

Τὸ ὑπόλοιπον $\frac{1}{4}$ τῆς δεξαμενῆς εἶναι 400 kg καὶ ἑπομένως ἡ δεξαμενὴ χωρεῖ: $4\cdot 400 \text{ kg} = 1600 \text{ kg}$ ὕδατος.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. Α.44 Ἡ γωνία τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι 20°. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΓ, πρὸς τὸ μέρος τοῦ Γ, λαμβάνομεν τμῆμα ΓΕ = ΑΓ, ἐπὶ δὲ τῆς προεκτάσεως τῆς ΓΒ, πρὸς τὸ



μέρος τῆς Β, λαμβάνομεν τμῆμα ΒΔ = ΑΒ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΔΕ.

Λύσις. Ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ ἔχομεν:

$$\widehat{B}=\widehat{\Gamma}=\frac{180^\circ-20^\circ}{2}=80^\circ.$$

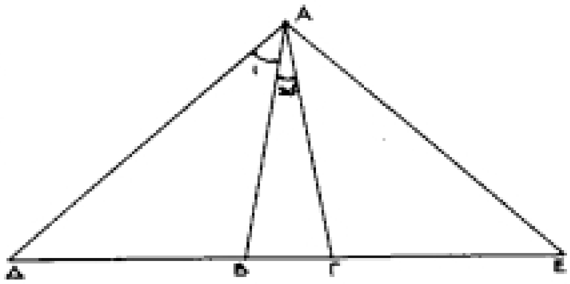
Ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΔ τὸ ἄθροισμα τῶν ἴσων γωνιῶν του Α, καὶ Δ ἰσοῦται πρὸς τὴν $A\widehat{B}\Gamma = 80^\circ$ (ἐξωτερικὴ γωνία). Ἄρα εἶναι:

$$2\widehat{\Delta} = A\widehat{B}\Gamma = 80^\circ \text{ καὶ συνεπῶς } \Delta = 40^\circ$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν:

$$\widehat{E} = 40^\circ \quad \text{καὶ} \quad \Delta\widehat{A}E = 180^\circ-(40^\circ+40^\circ) = 100^\circ.$$

Α.45 Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\widehat{B}=35^\circ$ καὶ $\widehat{\Gamma}=85^\circ$. Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας Α καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Δ, εἰς τὸ ὁποῖον αὕτη τέμνει τὴν ΒΓ, φέρομεν τὴν ΔΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, τέμνουσαν τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΔΕ.



Λύσις. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι:

$$\widehat{A} = 180^\circ-(35^\circ+85^\circ) = 60^\circ \quad \text{καὶ ἑπομένως:}$$

$$\Delta\widehat{A}E = \Delta\widehat{A}\Gamma = 30^\circ.$$

Ἐξ ἄλλου $A\widehat{\Delta}E = B\widehat{A}\Delta = 30^\circ$ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΔΕ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΔ.

Θὰ εἶναι συνεπῶς:

$$A\widehat{E}\Delta = 180^\circ-(\Delta\widehat{A}E + A\widehat{\Delta}E) = 180^\circ-(30^\circ+30^\circ) = 120^\circ.$$

(Συνέχεια ἐκ τῆς σελ. 16)

$$\left.\begin{aligned} f(1) &= \upsilon_1 = 6 \\ f(2) &= \upsilon_2+\upsilon_1 = 30 \\ f(-1) &= 6\upsilon_3-2\upsilon_2+\upsilon_1 = 0 \\ f(-2) &= -12\Pi_3+12\upsilon_3-3\upsilon_2+\upsilon_1 = -42 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \upsilon_1 &= 6 \\ \upsilon_2 &= 24 \\ \upsilon_3 &= 7 \\ \Pi_3 &= 5 \end{aligned}$$

Ἄρα τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον εἶναι:

$$\upsilon \equiv (x-1)(x-2)\upsilon_3+(x-1)\upsilon_2+\upsilon_1 \equiv$$
$$\equiv (x-1)(x-2)\cdot 7+(x-1)24+6 \equiv 7x^2+3x-4.$$

Τὸ πηλίκον $\Pi_3 = 5$ καὶ τὸ πολυώνυμον:

$$f(x) \equiv (x-1)(x-2)(x+1)\cdot 5+(x-1)(x-2)\cdot 7+$$
$$+(x-1)24+6 \equiv 5x^3-3x^2-2x+6.$$