Author:

Title: Γενικαί ασκήσεις και ανακατασκευή ασκήσεων

Creator: HDML

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Διὰ τοὺς ὑποψηφίους τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. ΓΑ.40 Δίδεται ἡμιπεριφέρεια διαμέτρου $AB = 2R$. Τὴν διάμετρον αὐτῆς AB χωρίζομεν διὰ σημείου M ἐσωτερικῶς εἰς λόγον $\frac{\mu}{\nu}$ (μ, ν δεδομένοι ἀπόλυτοι ἀριθμοί), ἤτοι $\frac{AM}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$ καὶ γράφομεν ἡμιπεριφερείας διαμέτρων ἀντιστοίχως AM καὶ MB κειμένας εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς πρώτης. Κατασκευάζομεν κύκλον O ἐφαπτόμενον τῶν τριῶν ἡμιπεριφερειῶν, τῆς μὲν πρώτης κέντρου K ἐσωτερικῶς, τῶν δὲ δύο ἄλλων κέντρων K_1 καὶ K_2 ἀντιστοίχως ἐξωτερικῶς. Νὰ ὑπολογισθῇ: 1ον) Ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου O συναρτήσει τῶν R, μ, ν καὶ 2ον) Τῇ βοηθείᾳ τῶν παραγώγων, νὰ εὑρεθῇ διὰ ποίαν θέσιν τοῦ M ἐπὶ τῆς AB ὁ κύκλος O ἔχει μέγιστον ἐμβαδόν.

Λύσις. 1ον) Ὑπολογισμὸς τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου (Ο).

Ὀνομάζομεν K, K_1, K_2 τὰ κέντρα τῶν ἡμιπεριφερειῶν διαμέτρων AB, AM, MB ἀντιστοίχως καὶ R, ρ_1, ρ_2 τὰς ἀκτῖνας αὐτῶν ἀντιστοίχως.

Ὡς γνωστόν, ἡ διάκεντρος δύο ἐφαπτομένων περιφερειῶν εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων ἂν ἐφάπτωνται ἐξωτερικῶς καὶ μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων, ἐὰν αἱ περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἐσωτερικῶς.

Ἑπομένως, ἂν x εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου (Ο), θὰ ἔχομεν:

$$OK_1 = x+\rho_1, \quad OK_2 = x+\rho_2, \quad OK = R-x.$$

Ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος, ἐπειδὴ εἶναι:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\mu}{\nu}, \text{ ἄρα } \frac{\overline{AM}}{\mu} = \frac{\overline{MB}}{\nu}, \text{ ἕπεται ὅτι:}$$

$$\frac{\overline{AM}}{\mu} = \frac{\overline{MB}}{\nu} = \frac{\overline{AM}+\overline{MB}}{\mu+\nu} = \frac{\overline{AB}}{\mu+\nu} = \frac{AB}{\mu+\nu},$$

ἂν ληφθῇ θετικὴ φορὰ ἐπὶ τῆς AB ἡ φορὰ ἀπὸ A πρὸς B.

Ἔτσι ἔχομεν:

$$\frac{AM}{\mu} = \frac{MB}{\nu} = \frac{AB}{\mu+\nu} = \frac{2R}{\mu+\nu}, \text{ ἀπὸ ὅπου ἔχομεν:}$$

$$AM = \frac{2R\mu}{\mu+\nu} \text{ καὶ } MB = \frac{2R\nu}{\mu+\nu}, \text{ ὅτε}$$

$$\rho_1 = \frac{1}{2}AM = \frac{R\mu}{\mu+\nu} \text{ καὶ } \rho_2 = \frac{R\nu}{\mu+\nu}.$$

Ἐπειδὴ τὰ τρία σημεῖα K, K_1, K_2 κεῖνται ἐπ' εὐθείας, αἱ ἀμοιβαῖαι ἀποστάσεις αὐτῶν καὶ αἱ ἀποστάσεις των ἀπὸ τὸ σημεῖον O τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἡμιπεριφερειῶν, συνδέονται, ὡς γνωστόν, διὰ τῆς ἀλγεβρικῆς σχέσεως:

$$\frac{OK_1^2}{\overline{K_1K}\cdot\overline{K_1K_2}} + \frac{OK^2}{\overline{KK_1}\cdot\overline{KK_2}} + \frac{OK_2^2}{\overline{K_2K}\cdot\overline{K_2K_1}} = 1,$$

μετασχηματιζομένης εἰς τήν:

$$\frac{OK_1^2}{\overline{K_1K}\cdot\overline{K_1K_2}} - \frac{OK^2}{\overline{K_1K}\cdot\overline{KK_2}} + \frac{OK_2^2}{\overline{KK_2}\cdot\overline{K_1K_2}} = 1 \qquad (1)$$

(σχέσις Stewart)

Ἡ (1), μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν, μετασχηματίζεται ἰσοδυνάμως εἰς τὴν

$$OK_1^2\cdot\overline{KK_2} - OK^2\cdot\overline{K_1K_2} + OK_2^2\cdot\overline{K_1K} =$$
$$= \overline{K_1K}\cdot\overline{KK_2}\cdot\overline{K_1K_2} \qquad (2).$$

Ἀλλὰ $\overline{KK_2} = \overline{KB} + \overline{BK_2} = \overline{KB} - \overline{K_2B} =$

$$= R-\rho_2 = R - \frac{R\nu}{\mu+\nu} = \frac{R\mu}{\mu+\nu}, \text{ ἄρα } \overline{KK_2} = \frac{R\mu}{\mu+\nu} \quad (3),$$

$$\overline{K_1K_2} = \overline{K_1M} + \overline{MK_2} = K_1M+MK_2 =$$

$$= \rho_1+\rho_2 = \frac{R\mu}{\mu+\nu} + \frac{R\nu}{\mu+\nu} = \frac{R(\mu+\nu)}{\mu+\nu} = R, \text{ ἄρα}$$

$$\overline{K_1K_2} = R \qquad (4),$$

$$\overline{K_1K} = \overline{K_1A} + \overline{AK} = -\overline{AK_1} + \overline{AK} =$$

$$= -AK_1+AK = -\rho_1+R = -\frac{R\mu}{\mu+\nu} + R, \text{ ἄρα}$$

$$\overline{K_1K} = \frac{R\nu}{\mu+\nu} \qquad (4).$$

Κατόπιν αὐτῶν ἡ (2) ἀνάγεται εἰς τήν:

$$(x+\rho_1)^2\cdot\frac{R\mu}{\mu+\nu} - (R-x)^2\cdot R + (x+\rho_2)^2\cdot\frac{R\nu}{\mu+\nu} = \frac{R\nu}{\mu+\nu}\cdot\frac{R\mu}{\mu+\nu}R$$

καὶ μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν διὰ R, εἰς τήν:

$$(x+\rho_1)^2\cdot\frac{\mu}{\mu+\nu} - (R-x)^2 + (x+\rho_2)^2\cdot\frac{\nu}{\mu+\nu} = \frac{R^2\mu\nu}{(\mu+\nu)^2} \qquad (5).$$

Συντελεστὴς τοῦ x^2 εἰς τὴν (5), εἶναι ὁ:

$$\frac{\mu}{\mu+\nu} - 1 + \frac{\nu}{\mu+\nu} = \frac{\mu+\nu}{\mu+\nu} - 1 = 1-1 = 0.$$

Ἄρα, δὲν ὑπάρχει τελικὰ ὅρος μὲ x^2 εἰς τὴν (5).

Συντελεστὴς τοῦ x εἶναι ὁ:

$$\frac{2\rho_1\mu}{\mu+\nu} + 2R + \frac{2\rho_2\nu}{\mu+\nu} = \frac{2\mu}{\mu+\nu}\cdot\frac{R\mu}{\mu+\nu} +$$

$$+ 2R + \frac{2\nu}{\mu+\nu}\cdot\frac{R\nu}{\mu+\nu} = \frac{2R(\mu^2+\nu^2)}{(\mu+\nu)^2} + 2R.$$

Ὅρος ἀνεξάρτητος τοῦ x εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς 5), εἶναι ὁ:

$$\frac{\rho_1^2\mu}{\mu+\nu} - R^2 + \rho_2^2\cdot\frac{\nu}{\mu+\nu} = \left(\frac{R\mu}{\mu+\nu}\right)^2\cdot\frac{\mu}{\mu+\nu} - R^2 +$$

$$+\left(\frac{R\nu}{\mu+\nu}\right)^2\cdot\frac{\nu}{\mu+\nu} = R^2\left(\frac{\mu^3}{(\mu+\nu)^3} - 1 + \frac{\nu^3}{(\mu+\nu)^3}\right) =$$

$$= R^2\frac{\mu^3-(\mu+\nu)^3+\nu^3}{(\mu+\nu)^3} = R^2\cdot\frac{-3\mu\nu(\mu+\nu)}{(\mu+\nu)^3} = -\frac{3R^2\mu\nu}{(\mu+\nu)^2}.$$

Ἔτσι ἡ (5) ἁπλοποιεῖται εἰς τήν:

$$\left[\frac{2R(\mu^2+\nu^2)}{(\mu+\nu)^2} + 2R\right]x - \frac{3R^2\mu\nu}{(\mu+\nu)^2} = \frac{R^2\mu\nu}{(\mu+\nu)^2},$$

μετασχηματιζομένη ἰσοδυνάμως εἰς:

$$2R\frac{\mu^2+\nu^2+(\mu+\nu)^2}{(\mu+\nu)^2}x = \frac{4R^2\mu\nu}{(\mu+\nu)^2},$$

ἀπὸ ὅπου προκύπτει: $x = \dfrac{R\mu\nu}{\mu^2+\nu^2+\mu\nu}$.

Ἄρα τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου (Ο) εἶναι:

(Συνέχεια εἰς σελ. 30)

'Ανασκευή ἤ συμπλήρωσις μερικῶν ἀσκήσεων τοῦ περιοδικοῦ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ,,

'Από Σεπτεμβρίου 1973 ἕως 'Ιουνίου 1974

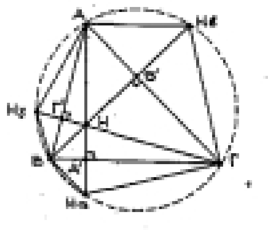
ὑπό 'Ιωάννου Μ. 'Αγγελῆ
Γυμνασιάρχου — Συντονιστοῦ τῶν ἀσκήσεων τοῦ Εὐκλείδου.

'Ανασκευή τῆς Δ2. (Σεπτέμβριος 1973 σελίς 20). 'Εάν Η εἶναι τό ὀρθόκεντρον δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ, μή ὀρθογωνίου, καί H_α, H_β, H_γ τά συμμετρικά αὐτοῦ ὡς πρός τάς εὐθείας ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως, δείξατε ὅτι: 1ον) ὅτι ἄν τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀξυγώνιον, τότε αἱ γωνίαι $\widehat{AHB}$, $\widehat{BH\Gamma}$, $\widehat{\Gamma HA}$, ὑπό τάς ὁποίας φαίνονται ἀπό τό Η αἱ πλευραί ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἀντιστοίχως εἶναι κάθε μία παραπληρωματική τῆς γωνίας τοῦ τριγ. ΑΒΓ τῆς ἀντικειμένης εἰς τήν ἀντίστοιχον πλευράν.

2ον) ὅτι ἄν τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἀμβλυγώνιον, τότε ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης ἰσχύει μόνον διά τήν πλευράν τήν ἀντικειμένην τῆς ἀμβλείας γωνίας τοῦ τριγώνου, ἐνῷ αἱ ἄλλαι πλευραί τοῦ τριγώνου φαίνονται ἀπό τό Η ἡ κάθε μία ὑπό γωνίαν ἴσην πρός τήν γωνίαν τοῦ τριγώνου τῆς ἀντικειμένης ἐκείνης τῆς πλευρᾶς.

3ον) ὅτι τά σημεῖα H_α, H_β, H_γ, Α, Β, Γ εἶναι ὁμόκυκλα.

'Απόδειξις. 1ον) 'Όταν τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀξυγώνιον (σχ. 1). Τό ὀρθόκεντρον Η αὐτοῦ εἶναι ἐσωτερικόν σημεῖον τοῦ τριγώνου. Διά τοῦτο ἡ γωνία ὑπό τήν ὁποίαν φαίνεται ἀπό τό Η μία πλευρά τοῦ τριγώνου εἶναι ἐξωτερική γωνία ὅπως π. χ. ἡ $\widehat{BH\Gamma}$ εἶναι ἐξωτερική γωνίου τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου Β'ΗΓ παρά τήν ὑποτείνουσαν ΗΓ. Διά τοῦτο εἶναι ἀμβλεῖα γωνία.



'Από τό ἄλλο μέρος, ἡ γωνία ὑπό τήν ὁποίαν φαίνεται ἀπό τό Η μία πλευρά τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καί ἡ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῆς τῆς πλευρᾶς, εἶναι γωνίαι, τῶν ὁποίων αἱ πλευραί εἶναι κάθετοι μίαν πρός μίαν καί ἐπομένως, ὡς γνωστόν, πρέπει νά εἶναι ἤ ἴσαι ἤ παραπληρωματικαί.

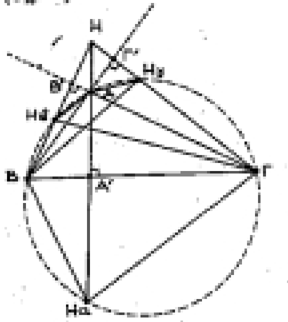
'Επειδή ὅμως ἡ μία—ἡ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΓ—εἶναι ὀξεῖα (δεδομένον)—καί ἡ ἄλλη, ὡς ἐδείχθη, εἶναι ἀμβλεῖα, ἀποκλείεται νά εἶναι ἴσαι καί συνεπῶς θά εἶναι παραπληρωματικαί.

'Αρα, δηλώνοντες τάς γωνίας τριγώνου ΑΒΓ, κάθε μίαν μέ τήν κορυφήν της, θά ἔχωμεν:

$$\widehat{AHB} = 2\ \text{ὀρθ} - \Gamma,\quad \widehat{BH\Gamma} = 2\text{ὀρθ.} - A,\quad \widehat{\Gamma HA} = 2\text{ὀρθ.} - B,$$

ὅταν τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀξυγώνιον.

2ον) 'Έστω ὅτι τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἀμβλυγώνιον, $A > 90°$. Τότε τό Η εἶναι ἐξωτερικόν σημεῖον τοῦ τριγώνου, εὑρισκόμενον ἰδιαιτέρως ἐντός τοῦ γωνιακοῦ τομέως, τόν ὁποῖον ὁρίζει ἡ κατά κορυφήν τῆς ἀμβλείας γωνίας τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 2).



Διά τοῦτο ἡ γωνία ὑπό τήν ὁποίαν φαίνεται ἀπό τό Η οἱαδήποτε πλευρά τοῦ τριγώνου ΑΒΓ θά ταυτίζεται μέ γωνίαν ἑνός ὀρθογωνίου παρά τήν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ,

'Ετσι: 'Η $\widehat{BH\Gamma}$ ταυτίζεται μέ τήν $B'\widehat{H}\Gamma$ τοῦ τριγώνου Β'ΗΓ ὀρθογωνίου εἰς τό Β', ἡ $\widehat{AHB}$ ταυτίζεται μέ τήν $A'\widehat{H}B$ τοῦ τριγώνου Α'ΗΒ ὀρθογωνίου εἰς τό Α', καί ἡ $\widehat{AH\Gamma}$ ταυτίζεται μέ τήν $A'\widehat{H}\Gamma$ τοῦ τριγώνου Α'ΗΓ ὀρθογωνίου εἰς τό Α'.

'Από αὐτό συνάγεται ὅτι αἱ γωνίαι $\widehat{BH\Gamma}$, $\widehat{AHB}$, $\widehat{AH\Gamma}$ εἶναι ὀξεῖαι γωνίαι.

'Έχουν ἀπό τό ἄλλο μέρος πλευράς καθέτους, μίαν πρός μίαν, πρός τάς πλευράς τῶν γωνιῶν $\widehat{A}$, $\widehat{\Gamma}$, $\widehat{B}$ ἀντιστοίχως τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, καί ἐπομένως κάθε μία πρέπει νά εἶναι ἡ ἴση ἡ παραπληρωματική τῆς ἀντιστοίχου της. Τό ζεῦγος ὅμως ($\widehat{BH\Gamma}$, $\widehat{A}$) ἀποκλείεται νά εἶναι ζεῦγος ἴσων γωνιῶν, διότι ἡ μία —ἡ $\widehat{BH\Gamma}$— εἶναι ὀξεῖα καί ἡ ἄλλη —ἡ $\widehat{A}$— εἶναι ἀμβλεῖα. Διά τοῦτο ἡ $\widehat{BH\Gamma}$ εἶναι παραπληρωματική τῆς $\widehat{A}$.

Τά ἄλλα δύο ζεύγη ($\widehat{AHB}$, $\widehat{\Gamma}$ καί $\widehat{AH\Gamma}$, Β) εἶναι ζεύγη ὀξειῶν γωνιῶν καί ἀποκλείεται νά εἶναι ἡ μία παραπληρωματική τῆς ἄλλης. 'Αρα εἶναι ζεύγη ἴσων γωνιῶν.

Θά ἔχωμεν συνεπῶς:

$$\widehat{BH\Gamma} = 2\text{ὀρθ} - \widehat{A},\quad \widehat{AHB} = \widehat{\Gamma},\quad \widehat{AH\Gamma} = \widehat{B},$$

ὅταν τό τριγ. ΑΒΓ εἶναι ἀμβλυγώνιον εἰς τό Α.

3ον) ὅτι τά H_α, H_β, H_γ Α, Β, Γ εἶναι ὁμόκυκλα. 'Ότι ἀπεδείχθη εἰς τά 1ον καί 2ον μέρη, συνδυαζόμενον μέ τά (σχ. 1) καί (σχ. 2) φανερώνει ὅτι εἶναι ἀληθής ἡ ἑξῆς πρότασις: «Μία πλευρά τριγώνου, ἄν ἀφήνῃ τό ὀρθόκεντρον αὐτοῦ πρός τό μέρος, ὅπου ἡ ἀντικειμένη της κορυφή τοῦ τριγώνου, φαίνεται ἀπό τό ὀρθόκεντρον ὑπό γωνίαν παραπληρωματικήν τῆς ἀντικειμένης πρός αὐτήν τήν πλευράν γωνίας τοῦ τριγώνου· ἄν ὅμως ἀφήνῃ τό ὀρθόκεντρον πρός τό μέρος της τό ἀντίθετον τῆς ἀντικειμένης τῆς κορυφῆς τοῦ τριγώνου, τότε φαίνεται ἀπὸ τὸ ὀρθόκεντρον ὑπὸ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ἀντικειμένην τῆς γωνίαν τοῦ τριγώνου.

Ἔτσι, ἂν τὸ Η εἶναι πρὸς τὸ μέρος τῆς πλευρᾶς ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ὅπου καὶ ἡ κορυφὴ Γ, τότε ἔχομεν :

$$\widehat{AHB} = 2\text{ὀρθ} - \widehat{\Gamma} \quad (1).$$

Τὸ συμμετρικὸν H_γ τοῦ Η ὡς πρὸς τὴν ΑΒ θὰ εἶναι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν πρὸς τὸ μέρος τῆς ΑΒ τὸ ἀντίθετον τῆς κορυφῆς Γ, ὁπότε τὸ τετράπλευρον $A\Gamma BH_\gamma$ εἶναι κυρτὸν μέ : $\widehat{AHB_\gamma} = \widehat{AHB}$ (2). λόγῳ τῆς συμμετρίας ὡς πρὸς ἄξονα ΑΒ, ὁπότε, συνδυάζοντες τὴν (2) μὲ τὴν (1), ἔχομεν $\widehat{AH_\gamma B} = 2\text{ὀρθ} - \widehat{\Gamma}$ (3).

Ἡ (3) φανερώνει ὅτι δύο ἀπέναντι γωνίαι τοῦ κυρτοῦ τετραπλεύρου $A\Gamma BH_\gamma$ εἶναι παραπληρωματικαί. Συνεπῶς τὸ τετράπλευρον αὐτὸ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. Ἀπὸ αὐτὸ συνάγεται ὅτι τὸ H_γ ἀνήκει εἰς τὸν κύκλον τὸν διερχόμενον ἀπὸ τὰ Α, Β, Γ, δηλ. εἰς τὸν περίκυκλον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἂν πάλιν τὸ Η εἶναι πρὸς τὸ μέρος τῆς πλευρᾶς ΑΒ, τὸ ἀντίθετον τῆς κορυφῆς Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 2), τότε ἔχομεν $AHB = \widehat{\Gamma}$ (4).

Τὸ συμμετρικὸν H_γ τοῦ Η ὡς πρὸς τὴν ΑΒ θὰ εἶναι τώρα πρὸς τὸ μέρος τῆς ΑΒ ὅπου καὶ ἡ κορυφὴ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἔτσι ἔχομεν κυρτὸν τετράπλευρον $AB\Gamma H_\gamma$ (σχ. 2), συνάμα δὲ ἔχομεν $\widehat{AH_\gamma B} = \widehat{AHB}$, λόγῳ τῆς συμμετρίας πρὸς ΑΒ, ἡ ὁποία, συνδυαζομένη μὲ τὴν (5), δίδει :

$$\widehat{AH_\gamma B} = \widehat{\Gamma} \quad (5).$$

Ἡ (5) φανερώνει ὅτι ἡ μία πλευρὰ τοῦ κυρτοῦ τετραπλεύρου $AB\Gamma H_\gamma$ —ἡ ΑΒ— φαίνεται ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΓH_γ ὑπὸ ἴσας γωνίας. Ἀπὸ αὐτὸ συνάγεται ὅτι τὸ τετράπλευρον αὐτὸ εἶναι ἐγγράψιμμον εἰς κύκλον καὶ ἑπομένως τὸ H_γ ἀνήκει εἰς τὸν κύκλον τὸν διερχόμενον ἀπὸ τὰ Α, Β, Γ, δηλ. εἰς τὸν περίκυκλον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἄρα ὅπως βλέπομεν, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ θέσις τοῦ ὀρθοκέντρου ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ὡς πρὸς μίαν πλευράν του, τὸ συμμετρικὸν τοῦ ὀρθοκέντρου ὡς πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτήν, θὰ ἀνήκῃ εἰς τὸν περίκυκλον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἔτσι τὰ H_α, H_β, H_γ ἀνήκουν εἰς τὸν περίκυκλον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, καὶ συνεπῶς τὰ 6 σημεῖα Α, Β, Γ, H_α, H_β, H_γ εἶναι ὁμόκυκλα.

Παρατηρήσεις : 1) Σημεῖον τὸ ὁποῖον ἀνήκει μὲ 2, ἢ περισσότερα ἄλλα εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, εἶναι γραμματικῶς ὀρθὸν νὰ λέγεται ὁμόκυκλον σημεῖον ἐκείνων, κατὰ τά : ὁμόζυγος, ὁμότυπος, ὁμόθυμος, ὁμόδειπνος, ὁμόστεγος κλπ.

2) Εἰς τὴν λύσιν τῆς Δ.2 κατὰ Σεπτέμβριον γίνεται παρανόησις τῆς ἐννοίας «σταθερὸν μέγεθος». Ἐκεῖ χαρακτηρίζεται «ὡς σταθερὸν μέγεθος» κάθε μέγεθος τὸ ὁποῖον ἔχει δεδομένην τιμήν, ἢ εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένον βάσει τῶν δεδομένων. Ὁ ὁρισμὸς τοῦ σταθεροῦ μεγέθους εἶναι ὁ ἑξῆς «Ἓν μέγεθος λέγεται σταθερόν, ἂν καὶ μόνον ἄν, συνδέεται μὲ ἄλλα τὰ ὁποῖα μεταβάλλονται καὶ συμβαίνει κατὰ τὴν διαδικασίαν τῆς μεταβολῆς ἐκείνων νὰ διατηρῇ τοῦτο τὴν αὐτὴν τιμήν».

Ἀνασκευὴ τῆς Ε.2 (Σεπτέμβριος 1973, σελ. 21). Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\sqrt{\alpha^2 + x\sqrt{\beta^2 + x^2 - \alpha^2}} = x - \alpha \quad (1)$$

ἐντὸς τοῦ σώματος R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Λύσις. Ἔστω $x = 0$. Τότε τὸ $\sqrt{\beta^2 + x^2 - \alpha^2}$ γίνεται $\sqrt{\beta - \alpha^2}$ καὶ πρέπει νὰ εἶναι : $\beta^2 \geqslant \alpha^2$. Ἡ (1) γίνεται τότε $\sqrt{\alpha^2} = -\alpha$, δηλ. $|\alpha| = -\alpha$ καὶ ἀληθεύει, ἂν καὶ μόνον ἄν, εἶναι $\alpha \leqslant 0$. Ὥστε μία λύσις τῆς (1) εἶναι ἡ $x = 0$, ἂν καὶ μόνον ἄν, εἶναι $\alpha \leqslant 0$ καὶ συνάμα $\alpha^2 \leqslant \beta^2$.

Ἔστω $x \neq 0$. Ὑποθέτομεν ὅτι ἀληθεύει ἡ (1) διὰ κάποιαν τιμὴν $x \neq 0$ ἐν R. Τότε θὰ ἀληθεύῃ διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν τοῦ x καὶ ἡ :

$$\beta^2 + x\sqrt{\beta^2 + x^2 - \alpha^2} = (x - \alpha)^2 \quad (2)$$

Ἀντιστρόφως. Ἂν ἀληθεύῃ ἡ (2) διὰ κάποιαν τιμὴν $x \neq 0$ ἐν R, τότε ὁ ἀριθμὸς $\alpha^2 + x\sqrt{\beta^2 + x^2 - \alpha^2}$ θὰ εἶναι πραγματικὸς ἀριθμὸς μὴ ἀρνητικός. ἀφοῦ εἶναι ἴσος μὲ τετράγωνον πραγματικοῦ ἀριθμοῦ $x - \alpha$ καὶ ἑπομένως θὰ ἀληθεύῃ διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν τοῦ x καὶ ἡ :

$$\sqrt{\alpha^2 + x\sqrt{\beta^2 + x^2 - \alpha^2}} = \sqrt{(x-\alpha)^2} = |x - \alpha| \quad (3).$$

Ἂν δὲ ἐπὶ πλέον ἐκείνη ἡ τιμὴ τοῦ x ἱκανοποιῇ καὶ τὴν σχέσιν $x - \alpha \geqslant 0$, τότε εἶναι $|x - \alpha| = x - \alpha$ καὶ ἡ (3) γίνεται :

$$\sqrt{\alpha^2 + x\sqrt{\beta^2 + x^2 - \alpha^2}} = x - \alpha,$$

ποὺ εἶναι ἀκριβῶς ἡ (1).

Ἄρα, ὅταν εἶναι $x \neq 0$, ἡ (1) ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ σύστημα :

$$\alpha^2 + x\sqrt{\beta^2 + x^2 - \alpha^2} = (x - \alpha)^2 \quad (4) \quad x - \alpha \geqslant 0 \quad (1).$$

Ἡ (2) μετασχηματίζεται ἰσοδυνάμως εἰς τήν :

$$\sqrt{\beta^2 + x^2 - \alpha^2} = x - 2\alpha \quad (5).$$

Ἀλλὰ ἡ (5) πάλιν, ἰσοδυναμεῖ, ὡς γνωστόν, μὲ τὸ σύστημα :

$$\beta^2 + x^2 - \alpha^2 = (x - 2\alpha)^2, \quad x - 2\alpha \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$4\alpha x = 5\alpha^2 - \beta^2, \quad x - 2\alpha \geqslant 0.$$

Ἔτσι τὸ σύστημα (1) διὰ $x \neq 0$ ἰσοδυναμεῖ μὲ τό :

$$4\alpha x = 5\alpha^2 - \beta^2 \quad (6), \quad x - 2\alpha \geqslant 0 \quad (7), \quad x - \alpha \geqslant 0 \quad (8) \quad (\text{II}).$$

Ἀπὸ τὴν (6) προσδιορίζεται ἡ τιμὴ τοῦ x καὶ γίνεται δεκτὴ ἂν ἡ τιμὴ αὐτὴ εἶναι $\neq 0$ καὶ ἱκανοποιῇ καὶ τὰς σχέσεις (7) καὶ (8).

Διὰ τὴν λύσιν τῆς (6) διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις ὡς πρὸς τὸν συντελεστὴν τοῦ x.

1ον. $\alpha = 0$. Τότε, ἡ (6) γίνεται : $0x = \beta^2$, ἡ ὁποία, ὅταν εἶναι $\beta \neq 0$, εἶναι ψευδὴς πρότασις διὰ κάθε $x \in R$. Συνεπῶς ἡ (6), ἄρα καὶ τὸ (II), οὐδεμίαν λύσιν ἔχει ἂν εἶναι $\alpha = 0$ καὶ $\beta \neq 0$

Ἂν ὅμως εἶναι καὶ $\beta = 0$, ἡ (6) γίνεται $0 \cdot x = 0$, ἡ ὁποία εἶναι ἀληθὴς πρότασις διὰ κάθε $x \in R$, ἄρα καὶ διὰ κάθε $x \neq 0$ ἐν R.

Ἀλλά, ἂν εἶναι $\alpha = 0$, $\beta = 0$, αἱ σχέσεις (7) καὶ (8) ἀνάγονται εἰς τὴν $x \geqslant 0$, ἑπομένως ἱκανοποιοῦνται διὰ $x \neq 0$, ὅταν ἔχωμεν $x > 0$.

Ἄρα, ὅταν εἶναι $\alpha = 0$ καὶ $\beta = 0$, τότε σύνολον λύσεων τοῦ συστήματος (II) εἶναι ἡ ἡμιευθεῖα $x > 0$.

2ον. $\alpha \neq 0$. Τότε ἡ (6) ἔχει μοναδικὴν λύσιν τήν:

$$x = \frac{5\alpha^2 - \beta^2}{4\alpha} \quad (9).$$

Διὰ τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ x ἡ σχέσις (7) γίνεται :

$$\frac{5\alpha^2-\beta^2}{4\alpha}-2\alpha \geqslant 0,$$

μετασχηματιζομένη ἰσοδυνάμως εἰς τήν:

$$(3\alpha^2+\beta^2)\alpha \leqslant 0 \qquad (10).$$

Ἀλλά, μέ τό νά εἶναι $\alpha \neq 0$, ἕπεται ὅτι εἶναι $3\alpha^2+\beta^2 > 0$ καί συνεπῶς ἡ (10) ἰσοδυναμεῖ μέ $\alpha \leqslant 0$ καί αὐτή μέ $\alpha < 0$, ἀφοῦ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\alpha \neq 0$.

Ὥστε ἡ τιμή (9) τοῦ x ἱκανοποιεῖ τήν σχέσιν (7), ἄν καί μόνον ἄν, εἶναι $\alpha < 0$.

Διά νά ἱκανοποιῇ καί τήν σχέσιν (4), πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι:

$$\frac{5\alpha^2-\beta^2}{4\alpha}-\alpha \geqslant 0,$$

μετασχηματιζομένη ἰσοδυνάμως εἰς τήν $\alpha(\alpha^2-\beta^2) \geqslant 0$, ἡ ὁποία, ἐπειδή πρέπει νά εἶναι $\alpha < 0$, ὡς ἐδείχθη, ἀνάγεται εἰς τήν $\alpha^2 \leqslant \beta^2$.

Ὥστε ἡ τιμή (9) γίνεται δεκτή, ἄν καί μόνον ἄν, εἶναι $\alpha < 0$ καί συνάμα $\alpha^2 \leqslant \beta^2$. Διά $\alpha^2 = \beta^2$ ἡ (9) δίδει $x = \alpha$. Πρέπει ὅμως ἀκόμη νά εἶναι $5\alpha^2 \neq \beta^2$, διότι διά τό σύστημα (II) πρέπει νά ἔχωμεν $x \neq 0$.

Παρατηροῦντες εἶναι ἀληθής ἡ συνεπαγωγή:

$$(\alpha = 0 \text{ καί } \beta \neq 0) \Rightarrow \alpha^2 < \beta^2$$

καί συνοψίζοντες ὅλα τά ἀνωτέρω, καταλήγομεν εἰς τά ἑξῆς συμπεράσματα διά τήν ἐπίλυσιν τῆς (1) ἐν R.

$\alpha = 0 \{ \beta \neq 0$, 1 λύσις: $x = 0$ καί $\beta = 0$, ἄπειραι λύσεις: $x \geqslant 0$.

$$\alpha \neq 0 \begin{cases} \alpha > 0, \text{ οὐδεμία λύσις} \\ \alpha < 0 \begin{cases} \alpha^2 = \beta^2, \text{ 2 λύσεις: } x = 0,\ x = \alpha \\ \alpha^2 < \beta^2, \text{ δύο λύσεις: } x = 0,\ x = \dfrac{5\alpha^2-\beta^2}{4\alpha}, \\ \text{διακεκριμέναι, ἄν } 5\alpha^2 \neq \beta^2 \\ \alpha^2 > \beta^2, \text{ οὐδεμία λύσις.} \end{cases} \end{cases}$$

Ἀνασκευή τῆς ΓΑ.1 (Σεπτέμβριος 1973, σελ. 26).

Ἀπόδειξις. Ἐπειδή $A, B, \Gamma \neq 90^\circ$ οἱ ἀριθμοί σφA, σφB, σφΓ εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός.

Ἑπομένως τά κλάσματα τῆς (1) ἔχουν νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἐπειδή $A+B+\Gamma = 180^\circ$, ὡς γνωστόν, θά εἶναι:

$$\sigma\varphi A\sigma\varphi B+\sigma\varphi B\sigma\varphi \Gamma+\sigma\varphi \Gamma\sigma\varphi A = 1 \qquad (2).$$

Ἀπό τήν (2) συνάγεται ὅτι ἰσχύει καί ἡ:

$$\sigma\varphi^2 A+\sigma\varphi A\sigma\varphi B+\sigma\varphi B\sigma\varphi \Gamma+\sigma\varphi \Gamma\sigma\varphi A = 1+\sigma\varphi^2 A.$$

Αὐτή μετασχηματίζεται εἰς τήν:

$$(\sigma\varphi A+\sigma\varphi B)(\sigma\varphi A+\sigma\varphi \Gamma) = 1+\sigma\varphi^2 A \qquad (3).$$

Ἔχομεν ὁμοίως:

$$(\sigma\varphi B+\sigma\varphi \Gamma)(\sigma\varphi B+\sigma\varphi A) = 1+\sigma\varphi^2 B \qquad (4)$$

$$(\sigma\varphi \Gamma+\sigma\varphi A)(\sigma\varphi \Gamma+\sigma\varphi B) = 1+\sigma\varphi^2 \Gamma \qquad (5).$$

Ἡ (1), λόγῳ τῶν (3), (4), (5), γίνεται:

$$\Sigma\frac{1}{\sigma\varphi A\sigma\varphi B(1+\sigma\varphi^2\Gamma)} = \frac{1}{\sigma\varphi A\sigma\varphi B(\sigma\varphi A+\sigma\varphi \Gamma)(\sigma\varphi B+\sigma\varphi \Gamma)} + \frac{1}{\sigma\varphi B\sigma\varphi \Gamma(\sigma\varphi B+\sigma\varphi A)(\sigma\varphi \Gamma+\sigma\varphi A)} + \frac{1}{\sigma\varphi \Gamma\sigma\varphi A(\sigma\varphi \Gamma+\sigma\varphi B)(\sigma\varphi A+\sigma\varphi B)},$$

δηλαδή:

$$\Sigma\frac{1}{\sigma\varphi A\sigma\varphi B(1+\sigma\varphi^2\Gamma)} = \frac{\sigma\varphi\Gamma(\sigma\varphi A+\sigma\varphi B)+\sigma\varphi A(\sigma\varphi B+\sigma\varphi \Gamma)+\sigma\varphi B(\sigma\varphi \Gamma+\sigma\varphi A)}{\sigma\varphi A\sigma\varphi B\sigma\varphi\Gamma(\sigma\varphi A+\sigma\varphi B)(\sigma\varphi B+\sigma\varphi \Gamma)(\sigma\varphi \Gamma+\sigma\varphi A)} =$$

$$= \frac{2\sigma\varphi A\sigma\varphi\Gamma+2\sigma\varphi B\sigma\varphi A+2\sigma\varphi\Gamma\sigma\varphi B}{\sigma\varphi A\sigma\varphi B\sigma\varphi\Gamma(\sigma\varphi A+\sigma\varphi B)(\sigma\varphi B+\sigma\varphi \Gamma)(\sigma\varphi \Gamma+\sigma\varphi A)}$$

καί, τελικά, λόγῳ τῆς (2):

$$\Sigma\frac{1}{\sigma\varphi A\sigma\varphi B(1+\sigma\varphi^2\Gamma)} = \frac{2}{\sigma\varphi A\sigma\varphi B\sigma\varphi\Gamma(\sigma\varphi A+\sigma\varphi B)(\sigma\varphi B+\sigma\varphi \Gamma)(\sigma\varphi \Gamma+\sigma\varphi A)} \qquad (6).$$

Εἰς κάθε τρίγωνον δύο τοὐλάχιστον ἐκ τῶν γωνιῶν του εἶναι ὀξεῖαι. Διά τοῦτο, δύο ἐκ τῶν τριῶν ἀριθμῶν σφA, σφB, σφΓ εἶναι θετικοί ἀριθμοί καί συνεπῶς, ἕνα ἀπό τά ἀθροίσματα σφA+σφB, σφB+σφΓ, σφΓ+σφA εἶναι ἄθροισμα δύο θετικῶν ἀριθμῶν, ἄρα εἶναι καί αὐτό θετικός ἀριθμός.

Ἀπό τό ἄλλο μέρος, λόγῳ τῶν (3), (4), (5), τά ἀνωτέρω ἀθροίσματα εἶναι ὁμόσημα (ὡς ἔχοντα, ἀνά δύο, θετικόν γινόμενον). Καί ἀφοῦ ἕνα ἐξ αὐτῶν εἶναι θετικόν, ὡς ἐδείχθη, συνάγεται ὅτι καί τά τρία ἀνωτέρω ἀθροίσματα εἶναι θετικά. Διά τοῦτο ἰσχύει:

$$(\sigma\varphi A+\sigma\varphi B)(\sigma\varphi B+\sigma\varphi \Gamma)(\sigma\varphi \Gamma+\sigma\varphi A) = \sqrt{(\sigma\varphi A+\sigma\varphi B)^2\cdot(\sigma\varphi B+\sigma\varphi \Gamma)^2\cdot(\sigma\varphi \Gamma+\sigma\varphi A)^2} \qquad (7).$$

Ἐκ τῶν (3), (4), (5) ἔχομεν:

$$(\sigma\varphi A+\sigma\varphi B)^2\cdot(\sigma\varphi B+\sigma\varphi \Gamma)^2\cdot(\sigma\varphi \Gamma+\sigma\varphi A)^2 = (1+\sigma\varphi^2 A)(1+\sigma\varphi^2 B)(1+\sigma\varphi^2 \Gamma)$$

καί ἔτσι ἡ (7) δίδει:

$$(\sigma\varphi A+\sigma\varphi B)(\sigma\varphi B+\sigma\varphi \Gamma)(\sigma\varphi \Gamma+\sigma\varphi A) = \sqrt{(1+\sigma\varphi^2 A)(1+\sigma\varphi^2 B)(1+\sigma\varphi^2 \Gamma)},$$

συνεπῶς ἡ (6) δίδει:

$$\Sigma\frac{1}{\sigma\varphi A\sigma\varphi B(1+\sigma\varphi^2\Gamma)} = \frac{2}{\sigma\varphi A\sigma\varphi B\sigma\varphi\Gamma\sqrt{(1+\sigma\varphi^2 A)(1+\sigma\varphi^2 B)(1+\sigma\varphi^2 \Gamma)}}$$

πού εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἀποδεικτέα (1).

Παρατηρήσεις ἐπί τῆς Στ. 8, (τεῦχος Ὀκτωβρίου 1973, σελ. 25).

Εἰς τήν λύσιν τῆς ἀνωτέρω ἀσκήσεως ἀποκαλύπτεται παρανόησις τῆς ἐννοίας: «λύσις τοῦ προβλήματος».

Κάθε τέσσαρα ἐπίπεδα παράλληλα μεταξύ των περιέχοντα ἀπό 1 τό καθένα ἐκ τῶν 4 σημείων τοῦ χώρου καί ἰσαπέχοντα, ἀποτελοῦν μίαν λύσιν τοῦ προβλήματος.

Ὅταν τά 4 δοθέντα σημεῖα τοῦ χώρου δέν κεῖνται ἐπί ἐπιπέδου, ἔχομεν 48 ἐπίπεδα ($6 \times 8 = 48$), τά ὁποῖα ἀποτελοῦν 12 τετράδας παραλλήλων ἐπιπέδων, αἱ ὁποῖαι, κάθε μία χωριστά, λύουν τό πρόβλημα. Καί ὄχι «ἐν γένει», ἀλλά «πάντοτε».

Ἑπομένως ἡ φράσις: «ἔχει ἐν γένει 48 λύσεις» νά ἀντικατασταθῇ διά τῆς ὀρθῆς: «ἔχει πάντοτε 12 λύσεις».

Ἀνασκευή τῆς Γ.Α9 (Ὀκτώβριος 1973, σελ. 28).

Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$\sigma\upsilon\nu 3x\,\sigma\upsilon\nu^3 x - \eta\mu 3x\,\eta\mu^3 x = \mu \qquad (1).$$

Ἐφαρμογή διά $\mu = \frac{1}{4}+\frac{3}{8}\sqrt{3}$ καί $\mu = \frac{5}{8}$.

Λύσις. Ἀπό τούς γνωστούς τύπους:

$\sigma\upsilon\nu 3x = 4\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu x$ καί $\eta\mu 3x = 3\eta\mu x - 4\eta\mu^3 x$,

λαμβάνομεν:

$$\sigma\upsilon\nu^3 x = \frac{1}{4}(\sigma\upsilon\nu 3x+3\sigma\upsilon\nu x) \qquad (2),$$

$$\eta\mu^3 x = \frac{1}{4}(3\eta\mu x-\eta\mu 3x) \qquad (3).$$

Λόγῳ αὐτῶν, ἡ (1) γίνεται :

$$\frac{1}{4}\text{συν}3x(\text{συν}3x+3\text{συν}x)-\frac{1}{4}\text{ημ}3x(3\text{ημ}x-\text{ημ}3x)=\mu,$$

μετασχηματιζομένη κατὰ σειρὰν ὡς ἑξῆς :

$$\frac{1}{4}\text{συν}^2 3x+\frac{3}{4}\text{συν}3x\text{συν}x-\frac{3}{4}\text{ημ}3x\text{ημ}x+\frac{1}{4}\text{ημ}^2 3x=\mu,$$

$$(\text{συν}^2 3x+\text{ημ}^2 3x)+3(\text{συν}3x\text{συν}x-\text{ημ}3x\text{ημ}x)=4\mu,$$

$$1+3\text{συν}(3x+x)=4\mu,$$

$$\text{συν}4x=\frac{4\mu-1}{3} \quad (4).$$

Ἀπὸ τὴν (4) συνάγεται ὅτι θὰ ὑπάρχῃ λύσις, ἄν καὶ μόνον ἄν, ἰσχύουν :

$$-1\leqslant\frac{4\mu-1}{3}\leqslant 1 \quad (5).$$

Ἐκ ταύτης, προκύπτει :

$$-\frac{1}{2}\leqslant\mu\leqslant 1 \quad (6).$$

Θέτομεν : $\omega=\text{τοξ συν}\dfrac{4\mu-1}{3}$, ὅτε ἡ (4) γίνεται : $\text{συν}4x=\text{συν}\omega$, τῆς ὁποίας σύνολον λύσεων εἶναι ἡ ἕνωσις τῶν συνόλων :

$$x=\frac{\omega}{4}+\frac{k\cdot\pi}{2} \quad \text{καὶ} \quad x=-\frac{\omega}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}, \text{ δηλ.}$$

$$x=\frac{1}{4}\text{τοξ συν}\frac{4\mu-1}{3}+\frac{k\cdot\pi}{2} \quad (7)$$

$$\text{καὶ} \quad x=-\frac{1}{4}\text{τοξ συν}\frac{4\mu-1}{3}+\frac{k\cdot\pi}{2}, \quad k\in Z \quad (8).$$

Ἐφαρμογὴ διὰ $\mu=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{8}\sqrt{3}$. Ὁ περιορισμὸς (6) ἱκανοποιεῖται. Εἶναι δὲ $\text{τοξ συν}\dfrac{4\mu-1}{3}=\dfrac{\pi}{6}$, ὅτε οἱ τύποι (7) καὶ (8) δίδουν τὰς λύσεις :

$$x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\cdot\pi}{2}, \quad \text{ἢ} \quad x=-\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}, \quad k\in Z.$$

Ἐφαρμογὴ διὰ $\mu=\dfrac{5}{8}$. Ὁ περιορισμὸς (6) ἱκανοποιεῖται, εἶναι δὲ $\text{τοξ συν}\dfrac{4\mu-1}{3}=\dfrac{\pi}{3}$ καὶ οἱ τύποι (7) καὶ (8) δίδουν τὰς λύσεις :

$$\text{ἢ} \quad x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\cdot\pi}{2}, \quad \text{ἢ} \quad x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\cdot\pi}{2}, \quad (k\in Z).$$

Ἀνασκευὴ τῆς Γ.Α16 (τεῦχος Νοεμβρίου 1973).

Λύσις. Περιορισμὸς $xy\neq 0$, διότι διὰ $xy=0$ δὲν ἀληθεύει ἡ (1). Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

(I) $xy>0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ εἶναι : ἢ $(x>0$ καὶ $y>0)$, ἢ $(x<0$ καὶ $y<0)$.

(α) Ἄν εἶναι $x>0$ καὶ $y>0$; Τότε ἡ (1) γίνεται : $2xy=-4$, ὅπερ ἀσυμβίβατον.

(β) Ἄν εἶναι $x<0$ καὶ $y<0$. Τότε ἡ (1) γίνεται $xy=2$.

Ἡ δὲ (2) γίνεται $0=0$, ἡ ὁποία εἶναι ἀληθὴς πρότασις. Ἔτσι, ἀναγόμεθα εἰς τὸ σύστημα :

$$xy=2 \quad (3), \qquad x<0,\ y<0 \quad (4), \qquad x,\ y\in Z \quad (A).$$

Ἡ (3) ἔχει, ἐν Z, μόνον τὰς τέσσαρας λύσεις :

$$(x,y)=(1,2), \quad (x,y)=(-1,-2),$$
$$(x,y)=(2,1), \quad (x,y)=(-2,-1).$$

Ἐξ αὐτῶν ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν (4) μόνον αἱ :

$$(x,y)=(-1,-2) \quad \text{καὶ} \quad (x,y)=(-2,-1)$$

(II) $xy<0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ (1) γίνεται : $0=-4$, ἤτοι πρότασις ψευδὴς καὶ συνεπῶς τὸ σύστημα τῶν (1) καὶ (2) οὐδεμίαν λύσιν ἔχει.

Συμπέρασμα. Τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει λύσιν, μόνον ὅταν εἶναι $xy>0$. Αἱ λύσεις δὲ τοῦ συστήματος ἐν Z εἶναι αἱ : $(x,y)=(-1,-2)$ καὶ $(x,y)=(-2,-1)$.

Ἀνασκευὴ τῆς ΓΑ.15 (Νοεμβρίου 1973, σελίς 30).

ΓΑ.15 Ἐὰν $A+B+\Gamma+\Delta=360^\circ$, ὅπου κάθε μία ἐκ τῶν A, B, Γ, Δ εἶναι διάφορος τοῦ $k\cdot 90^\circ$ $(k\in Z)$ καὶ ὅπου ὑπάρχουν μεταξὺ αὐτῶν δύο, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι διάφορον τοῦ $90^\circ+k\cdot 180^\circ$, δείξατε ὅτι :

$$\text{εφ}A+\text{εφ}B+\text{εφ}\Gamma+\text{εφ}\Delta=$$
$$=\text{εφ}A\text{εφ}B\text{εφ}\Gamma+\text{εφ}B\text{εφ}\Gamma\text{εφ}\Delta+\text{εφ}\Gamma\text{εφ}\Delta\text{εφ}A+\text{εφ}\Delta\text{εφ}A\text{εφ}B \quad (1)$$

καὶ

$$\text{σφ}A+\text{σφ}B+\text{σφ}\Gamma+\text{σφ}\Delta=$$
$$\text{σφ}A\text{σφ}B\text{σφ}\Gamma+\text{σφ}B\text{σφ}\Gamma\text{σφ}\Delta+\text{σφ}\Gamma\text{σφ}\Delta\text{σφ}A+\text{σφ}\Delta\text{σφ}A\text{σφ}B \quad (2).$$

Ἀπόδειξις τῆς (1). Ἔστω ὅτι εἶναι :

$$A+B\neq 90^\circ+k\cdot 180^\circ.$$

Τότε ἡ γωνία (A+B) ἔχει ἐφαπτομένην.

Ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος, ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν $A+B+\Gamma+\Delta=360^\circ$, ἕπεται ὅτι $A+B=360^\circ-(\Gamma+\Delta)$ (3), ἀπὸ ὅπου συνάγεται ὅτι ἔχομεν :

$$\text{εφ}(A+B)=\text{εφ}(\Gamma+\Delta) \quad (4).$$

Ἐπειδὴ αἱ A, B, Γ, $\Delta\neq k\cdot 90^\circ$, $k\in Z$, θὰ ἔχουν ἐφαπτομένην. Διὰ τοῦτο ἡ ἐφαπτομένη τῶν (A+B) καὶ (Γ+Δ) δύναται νὰ ἀναπτυχθῇ καὶ θὰ ἔχομεν :

$$\text{εφ}(A+B)=\frac{\text{εφ}A+\text{εφ}B}{1-\text{εφ}A\text{εφ}B} \quad \text{καὶ} \quad \text{εφ}(\Gamma+\Delta)=\frac{\text{εφ}\Gamma+\text{εφ}\Delta}{1-\text{εφ}\Gamma\cdot\text{εφ}\Delta}$$

Ἔτσι, ἡ (4) γίνεται :

$$\frac{\text{εφ}A+\text{εφ}B}{1-\text{εφ}A\text{εφ}B}=-\frac{\text{εφ}\Gamma+\text{εφ}\Delta}{1-\text{εφ}\Gamma\text{εφ}\Delta} \quad (5).$$

Μὲ τὸ νὰ ἀληθεύῃ ὅμως ἡ (5), ἕπεται ὅτι ἀληθεύει καὶ ἡ $(\text{εφ}A+\text{εφ}B)(1-\text{εφ}\Gamma\text{εφ}\Delta)=-(\text{εφ}\Gamma+\text{εφ}\Delta)(1-\text{εφ}A\text{εφ}B)$, ἡ ὁποία μετασχηματίζεται ἰσοδυνάμως τελικῶς εἰς τὴν :

$$\text{εφ}A+\text{εφ}B+\text{εφ}\Gamma+\text{εφ}\Delta=$$
$$=\text{εφ}A\text{εφ}B\text{εφ}\Gamma+\text{εφ}B\text{εφ}\Gamma\text{εφ}\Delta+\text{εφ}\Gamma\text{εφ}\Delta\text{εφ}A+\text{εφ}B\text{εφ}A\text{εφ}\Delta$$

ἡ ὁποία εἶναι ἡ (1).

Ἀπόδειξις τῆς (2). Ἐπειδὴ A, B, Γ, $\Delta\neq k\cdot 90^\circ$, $k\in Z$, αἱ γωνίαι A, B, Γ, Δ ἔχουν ἐφαπτομένην $\neq 0$ καὶ κατὰ συνέπειαν θὰ ἔχουν καὶ συνεφαπτομένην $\neq 0$. Κατόπιν αὐτοῦ, ἐπειδὴ εἶναι :

$$\text{εφ}A=\frac{1}{\text{σφ}A}, \ \text{εφ}B=\frac{1}{\text{σφ}B}, \ \text{εφ}\Gamma=\frac{1}{\text{σφ}\Gamma}, \ \text{εφ}\Delta=\frac{1}{\text{σφ}\Delta},$$

ἡ (1) γίνεται ἡ (2) ὅταν γίνῃ ἡ ἀντικατάστασις καὶ γίνῃ ἐπίσης καὶ ἡ ἀπαλλαγὴ τῶν παρονομαστῶν.

Ἀνασκευὴ τῆς Δ.15 (Ἰανουάριος 1974).

Λύσις. Σπουδὴ τοῦ σχήματος. Παρατηροῦμεν κατὰ πρῶτον ὅτι ἂν ληφθῇ τυχὸν σημεῖον O τοῦ ἐπιπέδου, τότε δύναται νὰ κατασκευασθῇ ἀμέσως ὁ κύκλος (O, R), διότι εἶναι δεδομένον τὸ μῆκος R τῆς ἀκτῖνος του.

Ἔτσι τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ ἐγγραφῇ εἰς δεδομένον κύκλον (O, R) τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῆς πλευρᾶς α καὶ τοῦ γινομένου $\gamma(\beta+\gamma)=C^2$, ὅπου C δεδομένον μῆκος. Πρέπει νὰ εἶναι $\alpha\leqslant 2R$.

(Συνέχεια εἰς σελ. 30)

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(Συνέχεια ἐκ τῆς σελ. 25)

$$\frac{R\mu\nu}{\mu^2+\nu^2+\mu\nu}.$$

2ον) Προσδιορισμὸς τῆς θέσεως τοῦ Μ, ὥστε ὁ κύκλος (Ο) νὰ ἔχῃ μέγιστον ἐμβαδόν.

Τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ κύκλου (Ο) εἶναι:

$$E=\frac{\pi R^2\mu^2\nu^2}{(\mu^2+\nu^2+\mu\nu)^2}=\frac{\pi R^2\mu^2\nu^2}{\nu^4\left(\frac{\mu^2}{\nu^2}+1+\frac{\mu}{\nu}\right)^2},$$

δηλ. $E=\dfrac{\pi R^2\,\frac{\mu^2}{\nu^2}}{\left(\frac{\mu^2}{\nu^2}+\frac{\mu}{\nu}+1\right)^2}$, δηλ. $E=\pi R^2\cdot\dfrac{z^2}{(z^2+z+1)^2}$ (6),

ἔνθα ἐτέθη $\dfrac{\mu}{\nu}=z$.

Ἔχομεν λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὸ μέγιστον τῆς συναρτήσεως:

$$E: z\in R^+ \to E(z)=\pi R^2\cdot\frac{z^2}{(z^2+z+1)^2}\in R^+.$$

Ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως αὐτῆς εἶναι ἡ:

$$E'(z)=\pi R^2\cdot\left(\frac{2z(z^2+z+1)^2-2z^2(z^2+z+1)(2z+1)}{(z^2+z+1)^4}\right)=$$

$$=\pi R^2\cdot\frac{2z(z^2+z+1)[z^2+z+1-z(2z+1)]}{(z^2+z+1)^4}=$$

$$=\pi R^2\cdot\frac{2z(-z^2+1)}{(z^2+z+1)^3}=-2\pi R^2\cdot\frac{z(z-1)(z+1)}{(z^2+z+1)^3}.$$

Εἶναι ἐντὸς τοῦ συνόλου R^+ (συνόλου ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως Ε) ὁμόσημος μὲ τὸ $-(z-1)$ καὶ συνεπῶς ἡ μεταβολὴ τοῦ προσήμου τῆς $E'(z)$ φαίνεται εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα:

z		1	
$E'(z)$	$+$	0	$-$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως:

$$E(z)=\pi R^2\cdot\frac{z^2}{(z^2+z+1)^2}$$

ἀλλάσσει πρόσημον εἰς τὸ σημεῖον $z=1$, μεταπίπτουσα ἐκ τοῦ θετικοῦ εἰς τὸ ἀρνητικόν.

Ἑπομένως, ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις παύει νὰ αὐξάνῃ εἰς τὸ σημεῖον, $z=1$ καὶ ἀρχίζει νὰ γίνεται φθίνουσα. Ἄρα εἰς τὸ $z=1$ παρουσιάζει μέγιστον.

Ἔτσι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου (Ο) γίνεται μέγιστον διὰ $z=1$, δηλ. διὰ $\dfrac{\mu}{\nu}=1$, δηλ. ὅταν $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=1$, ἤτοι $\overline{AM}=\overline{MB}$, ποὺ σημαίνει: ὅταν τὸ Μ εἶναι εἰς τὸ μέσον τοῦ ΑΒ, δηλαδὴ εἰς τὸ κέντρον τῆς δοθείσης ἡμιπεριφερείας. Τὸ μέγιστον αὐτὸ εἶναι τό:

$$E(1)=\pi R^2\cdot\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}\pi R^2 \text{ τετρ. μονάδες.}$$

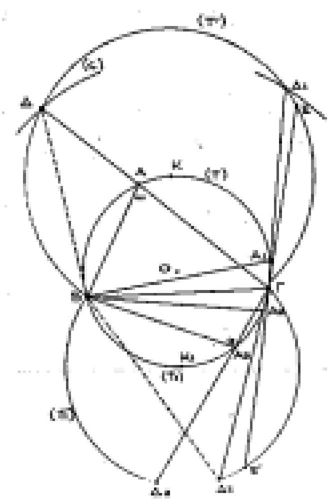
Ἀνασκευὴ ἢ συμπλήρωσις μερικῶν ἀσκήσεων

(Συνέχεια ἐκ τῆς σελ. 29)

α) Ἔστω $\alpha<2R$. Τότε δύναται νὰ τοποθετηθῇ χορδὴ ΒΓ μήκους α εἰς τὸν δεδομένον κύκλον (Ο, R).

Χωρίζει τὸν κύκλον εἰς δύο ἄνισα τόξα Τ καὶ T_1 ($T>T_1$). Ἡ κορυφὴ Α τοῦ ζητουμένου τριγώνου δύναται νὰ εἶναι εἴτε εἰς τὸ ἕνα, εἴτε εἰς τὸ ἄλλο ἐκ τῶν τόξων αὐτῶν. Ἑπομένως ἡ γωνία Α δύναται νὰ εἶναι, εἴτε ἴση μὲ τὴν γωνίαν ω, τὴν ὁποίαν δέχεται τὸ τόξον Τ (ἂν ἡ κορυφὴ Α ἀνήκῃ εἰς τὸ τόξον αὐτό), εἴτε μὲ τὴν γωνίαν φ, τὴν ὁποίαν δέχεται τὸ τόξον T_1 (ἂν ἡ κορυφὴ Α ἀνήκῃ εἰς τὸ τόξον T_1).

Ἔστω $A\in T$. Θὰ εἶναι τότε $\widehat{A}=\widehat{\omega}$. Προεκτείνομεν τὴν ΓΑ κατὰ μῆκος ΑΔ=ΑΒ (1). Τότε ἔχομεν ΓΔ=β+γ (2) καὶ ΑΔ=γ (3), τὸ δὲ Δ θὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ ὑποστήριγμα χορδῆς ΑΓ τοῦ κύκλου (Ο, R) ἐξωτερικῶς αὐτοῦ.



Θὰ ἔχωμεν συνεπῶς:

$$\Delta A\cdot\Delta\Gamma=O\Delta^2-R^2,\ \text{δηλ. } \gamma(\beta+\gamma)=O\Delta^2-R,\ \text{ὅτε:}$$

$$O\Delta^2=C^2+R^2,\ \text{ἄρα } O\Delta=\sqrt{C^2+R^2}\quad(4).$$

Ἄρα τὸ ΟΔ εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένον. Ἔτσι, τὸ σημεῖον Δ ἀνήκει εἰς τὴν περιφέρειαν τὴν ἔχουσαν κέντρον δεδομένον σημεῖον Ο καὶ ἀκτῖνα μήκους $\sqrt{C^2+R^2}$.

Ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος, ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ἔχει ΑΒ=ΑΔ, ἡ γωνία $\widehat{B\Delta\Gamma}$, ταυτίζεται μὲ τὴν γωνίαν Δ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΔ παρὰ τὴν βάσιν του, καὶ συνεπῶς ἔχομεν $\widehat{B\Delta\Gamma}=\frac{1}{2}\widehat{BA\Gamma}=\frac{1}{2}\omega$.

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἀπὸ τὸ Δ φαίνεται τὸ ΒΓ ὑπὸ ὡρισμένην γωνίαν $\frac{1}{2}\omega$, εὑρισκόμενον δὲ πρὸς τὸ μέρος τῆς ΒΓ ὅπου καὶ τὸ ἀνωτέρω τόξον (Τ).

Διὰ τοῦτο τὸ Δ ἀνήκει εἰς τὸ τόξον (Τ'), τὸ ὁποῖον ἔχει χορδὴν τὸ ὡρισμένον εὐθ. τμῆμα ΒΓ, δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ $\frac{1}{2}\omega$ καὶ εὑρίσκεται πρὸς τὸ μέρος τῆς ΒΓ, ὅπου καὶ τὸ τόξον (Τ)

«Ὁ Εὐκλείδης» εὔχεται στοὺς φίλους του μαθητὰς καλὲς διακοπές

Ἔστω $A \in (T_1)$. Προεκτείνομεν τὴν ΓΑ κατὰ ΑΒ=ΑΔ. Ἐργαζόμενοι ὁμοίως εὑρίσκομεν: $O\Delta = \sqrt{C^2+R^2}$.

Τώρα εἶναι $\widehat{B\Delta\Gamma} = \frac{1}{2}\varphi$, ὅπου φ ἡ γωνία τὴν ὁποίαν δέχεται τὸ τόξον (T_1).

Ἔτσι τὸ Δ θὰ ἀνήκῃ πάλιν εἰς τὴν περιφέρειαν $(O, \sqrt{C^2+R^2})$, ἀλλὰ συνάμα καὶ εἰς τὸ τόξον (T_1'), τὸ ὁποῖον ἔχει χορδὴν τὸ ΒΓ, δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ $\frac{1}{2}\varphi$ καὶ εὑρίσκεται πρὸς τὸ μέρος τῆς ΒΓ ὅπου καὶ τὸ τόξον (T_1). Ἄρα τὸ Δ ἀνήκει εἰς τὴν τομήν:

$$\text{περιφ.}\ (O, \sqrt{C^2+R^2}) \cap (\text{τοξ}\ T' \cup \text{τοξ}\ T_1').$$

Ὅταν τοποθετηθῇ τὸ Δ, τότε ὁρίζεται καὶ ἡ κορυφὴ Α τοῦ ζητουμένου τριγώνου ΑΒΓ, διότι εἶναι τομὴ τοῦ δεδομένου κύκλου (O, R) καὶ τῆς ἀνοικτῆς ἡμιευθείας $]\Gamma, \Delta)$.

Κατασκευή. Μὲ κέντρον τυχὸν σημεῖον Ο τοῦ ἐπιπέδου κατασκευάζομεν ἐπ' αὐτοῦ κύκλον ἀκτῖνος R καὶ ὅταν εἶναι $\alpha < 2R$ χαράσσομεν κάποιαν χορδὴν ΒΓ αὐτοῦ μήκους α. Ἔστω (T) τὸ μεγαλύτερον καὶ (T_1) τὸ μικρότερον ἀπὸ τὰ δύο τόξα τῆς χορδῆς ΒΓ.

Κατασκευάζομεν τὸ τόξον (T'), τὸ χορδῆς ΒΓ, δεχόμενον γωνίαν $\frac{1}{2}\omega$. Ἔχει κέντρον τὸ μέσον Κ τοῦ τόξου (T).

Κατασκευάζομεν τὸ τόξον (T_1'), τὸ ὁποῖον ἔχει χορδὴν τὴν ΒΓ, δεχόμενον γωνίαν $\frac{1}{2}\varphi$, τὴν ὁποίαν δέχεται τὸ (T_1) καὶ τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται πρὸς τὸ μέρος τῆς ΒΓ, ὅπου καὶ τὸ (T_1). Ἔχει κέντρον τὸ μέσον K_1 τοῦ τόξου (T_1). Τέλος, κατασκευάζομεν τὴν περιφέρειαν $(O, \sqrt{C^2+R^2})$.

Ἔστω Δ ἕνα σημεῖον τῆς τομῆς:

$$\text{περιφ.}\ (O, \sqrt{C^2+R^2}) \cap (\text{τοξ}\ T' \cup T_1'),$$

τοιοῦτον ὥστε ἡ ἡμιευθεῖα $]\Gamma, \Delta)$ νὰ τέμνῃ τὸν κύκλον (O, R) εἰς σημεῖον Α. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ λύῃ τὸ πρόβλημα.

Ἀπόδειξις. Ἔχομεν πρῶτον τρίγωνον ΑΒΓ μὲ ΒΓ=α τοῦ ὁποίου ὁ περιγεγραμμένος κύκλος ἔχει ἐκ κατασκευῆς ἀκτῖνα μήκους R. Ἔπειτα, ἂν τὸ Δ ἀνήκῃ ἰδιαιτέρως εἰς τὸ τόξον (T'), τότε τὸ Α, εἰς τὸ ὁποῖον τέμνει τὸν κύκλον (O, R) ἡ ἡμιευθεῖα $]\Gamma, \Delta)$ ἀνήκει εἰς τὸ τόξον (T) καὶ ἑπομένως εἶναι $\widehat{B A\Gamma} = \omega$ καὶ $\widehat{B\Delta\Gamma} = \frac{1}{2}\omega$. Ἄρα $\widehat{B\Delta\Gamma} = \frac{1}{2}\ \widehat{BA\Gamma}$, δηλ. ἡ γωνία Δ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ εἶναι ἴση μὲ τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α αὐτοῦ τοῦ τριγώνου. Ἀπὸ αὐτὸ συνάγεται ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ κορυφὴν Α καὶ συνεπῶς ἔχομεν ΑΔ = ΑΒ, δηλ. ΑΔ = γ (1'). Ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος ἔχομεν $\Delta\Gamma = \Delta A + A\Gamma = AB + A\Gamma = \gamma + \beta$, ἄρα $\Delta\Gamma = \gamma+\beta$ (2'). Ἔτσι ἔχομεν:

$$\gamma(\gamma+\beta) = \Delta A \cdot \Delta\Gamma = \mathfrak{D}_{(O,\,R)}(\Delta) = O\Delta^2 - R^2, \quad \text{ἄρα:}$$

$$\gamma(\gamma+\beta) = O\Delta^2 - R^2 \quad (3').$$

Ἀλλά, ἐπειδὴ τὸ Δ ἀνήκει καὶ εἰς τὸν κύκλον $(O, \sqrt{R^2+C^2})$ ἔχομεν $O\Delta = \sqrt{R^2+C^2}$, ἄρα $O\Delta^2 = R^2 + C^2$, ὁπότε ἡ (3') δίδει: $\gamma(\gamma+\beta) = C^2$ (4').

Ἂν πάλιν τὸ Δ ἀνήκῃ εἰς τὸ τόξον (T_1'), τότε τὸ Α ἀνήκει εἰς τὸ τόξον (T_1) καὶ ἔχομεν:

$$\widehat{BA\Gamma} = \varphi,\ \widehat{B\Delta\Gamma} = \frac{1}{2}\ \varphi, \text{ ἄρα πάλιν } \widehat{B\Delta\Gamma} = \frac{1}{2}\ \widehat{BA\Gamma}$$

καὶ συνεπῶς πάλιν τὸ ἀντίστοιχον τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ κορυφὴν Α, ἔχει δηλ. ΑΔ = ΑΒ = γ, καὶ συλλογιζόμενοι ὡς εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν εὑρίσκομεν πάλιν ὅτι ἀληθεύουν αἱ (1'), (2') καὶ [illegible]

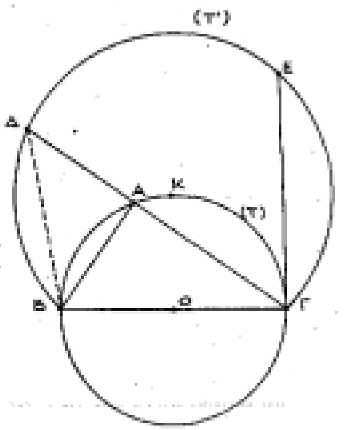
Ὥστε, ἂν τὸ Δ εἶναι ὅπως ἀναφέρεται, τότε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἱκανοποιεῖ ὅλας τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ προβλήματος.

Τὸ πρόβλημα, ὅπως ἐδείχθη, ἂν εἶναι $\alpha < 2R$, ἔχει τόσας λύσεις ὅσα εἶναι καὶ τὰ σημεῖα Δ τῆς τομῆς:

$$\text{περιφ}\ (O, \sqrt{C^2+R^2}) \cap (\text{τοξ}\ T' \cup \text{τοξ}\ T_1'),$$

διὰ τὰ ὁποῖα ἡ ἀνοικτὴ ἡμιευθεῖα $]\Gamma, \Delta)$ τέμνει τὸν κύκλον (O, R). Ἔτσι, ἂν Ε, Ε' εἶναι τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (O, R) κατὰ τὸ Γ τέμνει τὴν γραμμήν, τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦν τὰ δύο τόξα (T') καὶ (T_1'), τὸ πρόβλημα θὰ ἔχῃ τόσας λύσεις, ὅσα εἶναι καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς περιφερείας $(O, \sqrt{C^2+R^2})$ καὶ τῆς καμπύλης γραμμῆς ΕΒΕ'.

Δύναται λοιπὸν νὰ ἔχῃ τὸ πολὺ 4 λύσεις, ἂν $\alpha < 2R$, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα: τρίγωνα ΑΒΓ, $A_1B\Gamma$, $A_2B\Gamma$, $A_3B\Gamma$.



Ἂν εἶναι $\alpha = 2R$, τότε ἡ χορδὴ ΒΓ εἶναι διάμετρος καὶ τὰ δύο τόξα (T) καὶ (T_1) τοῦ κύκλου (O, R) εἶναι ἡ ἡμιπεριφέρεια αὐτοῦ τοῦ κύκλου τὸ καθένα, τὰ δὲ τόξα (T') καὶ (T_1') εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν ΒΓ. Διὰ τοῦτο περιοριζόμεθα εἰς τὸ ἕνα ἐξ αὐτῶν, τὸ (T') καὶ ἔτσι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ πρόβλημα ἔχει τόσας λύσεις, ὅσα εἶναι καὶ τὰ σημεῖα τομῆς:

$$\text{περιφ.}\ (O, \sqrt{R^2+C^2}) \cap \text{τοξ}\ BE,$$

ὅπου Ε ἡ τομὴ τοῦ τόξου (T') καὶ τῆς ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου (O, R) κατὰ τὸ Γ.

Δύναται λοιπὸν νὰ ἔχῃ τὸ πολὺ 2 λύσεις, ὅταν $\alpha = 2R$,