Author: I.M. Αγγελής

Title: Προσανατολισμένη γωνία δύο ευθειών

Creator: HDML

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ

Ὑπὸ Ι. Μ. Ἀγγελῆ, Ἐπιτ. Γυμνασιάρχου

Εἰς τὴν Ἐπίπεδον Γεωμετρίαν συναντῶνται προτάσεις, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόδειξις ἀνάγεται εἰς τὴν ἀπόδειξιν κάποιας ἰσότητος γωνιῶν καὶ συμβαίνει τὸ ἀντίστοιχον σχῆμα νὰ παρουσιάζῃ περιπτώσεις περισσοτέρας ἀπὸ μίαν.

Διὰ νὰ εἶναι πλήρης ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως πρέπει νὰ ἐξετασθοῦν ὅλαι αἱ δυναταὶ περιπτώσεις τοῦ σχήματος, καὶ αὐτὸ εἶναι ἐνοχλητικόν.

Ἂν ὅμως γίνῃ χρῆσις προσανατολισμένων γωνιῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου, ὁδηγούμεθα εἰς ἀπόδειξιν ἀνεξάρτητον τοῦ σχήματος.

Εἶναι λοιπὸν πολὺ ὠφέλιμον νὰ κατέχωμεν τὰ περὶ προσανατολισμένων γωνιῶν δύο εὐθειῶν προσανατολισμένου ἐπιπέδου. Ἀρχίζομεν ἀπὸ τὰ περὶ προσανατολισμένης γωνίας δύο ἡμιευθειῶν προσανατολισμένου ἐπιπέδου.

1. Προσανατολισμένη γωνία δύο ἡμιευθειῶν προσανατολισμένου ἐπιπέδου

1.1. *Προσανατολισμένον ἐπίπεδον.* Ἕνα ἐπίπεδον λέγεται προσανατολισμένον, ὅταν ἔχῃ ὁρισθῆ ποία φορὰ στροφῆς μιᾶς ἡμιευθείας αὐτοῦ περὶ τὴν ἀρχήν της θεωρεῖται ὡς θετική. Συνήθως θεωρεῖται τέτοια ἡ ἀντίθετος τῆς φορᾶς στροφῆς τῶν δεικτῶν ὡρολογίου.

Ἡ θετικὴ φορὰ προσανατολισμένου ἐπιπέδου λέγεται καὶ *ὀρθὴ φορὰ* αὐτοῦ. Διὰ τοῦτο ἡ ἀντίθετος αὐτῆς λέγεται *ἀνάδρομος φορὰ* τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου.

1.2. *Προσανατολισμένη γωνία δύο ἡμιευθειῶν.*

Ὁρισμός. Προσανατολισμένη γωνία δύο ἡμιευθειῶν προσανατολισμένου ἐπιπέδου, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν ἀρχήν, ὀνομάζεται κάθε διατεταγμένον ζεῦγος, τὸ ὁποῖον ἔχει μέλη αὐτὰς τὰς δύο ἡμιευθείας, ὅταν ἀποσκοπῆται δι' αὐτοῦ νὰ δοθῆ ἰδέα τῆς μετατοπίσεως τῆς πρώτης ἡμιευθείας διὰ στροφῆς περὶ τὴν ἀρχήν της.

Ἂν Οx, Οy εἶναι δύο ἡμιευθεῖαι προσανατολισμένου ἐπιπέδου Π καὶ ὁρισθῆ ὡς πρώτη ἡ Οx, τότε ἡ ἀντίστοιχος προσανατολισμένη γωνία τῶν δύο ἡμιευθειῶν παριστάνεται μὲ τὸν συμβολισμὸν $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$, ὁ ὁποῖος διαβάζεται «γωνία Οx, Οy».

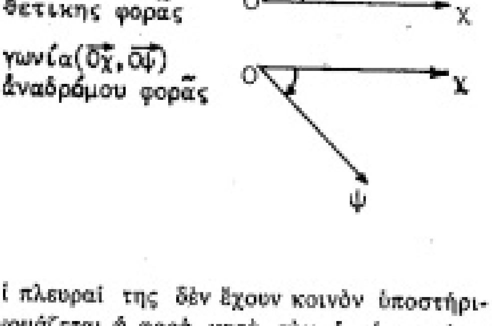
Ἡ Οx λέγεται *ἀρχικὴ πλευρὰ* καὶ ἡ Οy, *τελικὴ πλευρὰ* τῆς γωνίας.

Ἂν ὁρισθῆ ὡς πρώτη ἡ Οy, ἡ ἀντίστοιχος προσανατολισμένη γωνία τῶν δύο ἡμιευθειῶν παριστάνεται διὰ τοῦ συμβολισμοῦ $(\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Ox})$, καὶ διαβάζεται «γωνία Οy, Οx».

Παρατήρησις. Διὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἐννοίας «προσανατολισμένη γωνία δύο ἡμιευθειῶν Οx, Οy» δὲν ἀρκεῖ ἡ πρότασις «εἶναι κάθε διατεταγμένον ζεῦγος, τοῦ ὁποίου μέλη εἶναι αὐταὶ αἱ δύο ἡμιευθεῖαι», διότι ἕνα διατεταγμένον ζεῦγος ἡμιευθειῶν, αὐτὸ καθεαυτὸ εἶναι τίποτε. Εἶναι ἕνα κενὸν πλαίσιον, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ γεμίσῃ μὲ τὸ πιὸ διαφορετικὸν περιεχόμενον, π.χ. διατεταγμένον ὑποσύνολον τοῦ συνόλου: ἡμιευθ. Οx $\cup$ ἡμιευθ. Οy.

Ἔχομεν περίπτωσιν ἀνάλογον μὲ τὸ διατεταγμένον ζεῦγος ἀριθμῶν. Πράγματι, ἕνα διατεταγμένον ζεῦγος ἀριθμῶν, αὐτὸ καθ' ἑαυτό, εἶναι τίποτε, διότι τὸ αὐτὸ ζεῦγος ἀριθμῶν δύναται νὰ παριστάνῃ, σύμφωνα μὲ τοὺς κανόνας εἰς τοὺς ὁποίους ὑπακούῃ, εἴτε ἕνα ἀκέραιον ἀριθμόν, εἴτε ἕνα ῥητὸν ἀριθμὸν (ἀντιπρόσωπον ῥητοῦ ἀριθμοῦ), εἴτε ἕνα μιγαδικὸν ἀριθμόν. Δι' αὐτὸ εἶναι ἀνάγκη νὰ καθορισθῆ τὸ εἶδος τῆς χρήσεως τοῦ διατεταγμένου ζεύγους ἡμιευθειῶν, ἂν θέλωμεν νὰ παριστάνῃ προσανατολισμένην γωνίαν τῶν δύο ἡμιευθειῶν.

1.3. *Φορὰ προσανατολισμένης γωνίας δύο ἡμιευθειῶν.* Φορὰ μιᾶς προσανατολισμένης γωνίας $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ ἐντὸς προσανατολισμένου ἐπιπέδου Π,



ὅταν αἱ πλευραί της δὲν ἔχουν κοινὸν ὑποστήριγμα, ὀνομάζεται ἡ φορὰ κατὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ στραφῆ ἡ ἀρχικὴ πλευρὰ αὐτῆς περὶ τὴν ἀρχὴν της διὰ νὰ γράφῃ τὸν *κυρτὸν* γωνιακὸν τομέα $x\widehat{O}y$. Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς δὲν ἀναγνωρίζει φορὰν εἰς τὴν προσανατολισμένην γωνίαν δύο ἡμιευθειῶν, αἱ ὁποῖαι συμπίπτουν ἢ εἶναι ἀντίθετοι ἡμιευθεῖαι

1.4. *Ἰσότης*. Δύο προσανατολισμέναι γωνίαι $(\vec{Ox}, \vec{Oy})$ καὶ $(\vec{O'x'}, \vec{O'y'})$ ἐντὸς προσανατολισμένου ἐπιπέδου εἶναι ἴσαι, ἂν ἔχουν τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ συνάμα αἱ γεωμετρικαὶ γωνίαι $x\widehat{O}y$ καὶ $x'\widehat{O}_1y'$ εἶναι ἴσαι.

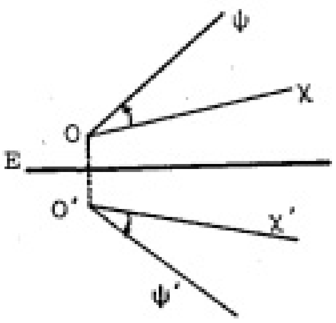
Γράφομεν τότε $(\vec{Ox}, \vec{Oy}) = (\vec{O'x'}, \vec{O'y'})$. Ἐπειδὴ ἡ σχέσις ἰσότητος εἰς τὸ σύνολον τῶν γεωμετρικῶν γωνιῶν εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας, συνάγεται ὅτι καὶ εἰς τὸ σύνολον τῶν προσανατολισμένων γωνιῶν δύο ἡμιευθειῶν ἰσχύει τὸ αὐτό.

1.5. *Ἀντίθεσις*. Δύο προσανατολισμέναι γωνίαι $(\vec{Ox}, \vec{Oy})$ καὶ $(\vec{O'x'}, \vec{O'y'})$ ἐντὸς προσανατολισμένου ἐπιπέδου λέγονται ἀντίθετοι γωνίαι ἂν ἔχουν ἀντίθετον φορὰν ἡ μία μὲ τὴν ἄλλην ἀλλὰ αἱ γεωμετρικαὶ γωνίαι $x\widehat{O}y$, $x'\widehat{O'}y'$ εἶναι ἴσαι.

Γράφομεν τότε $(\vec{Ox}, \vec{Oy}) = -(\vec{O'x'}, \vec{O'y'})$ καὶ διαβάζομεν «γωνία Ox, Oy εἶναι ἀντίθετος τῆς γωνίας Ox', Oy'».

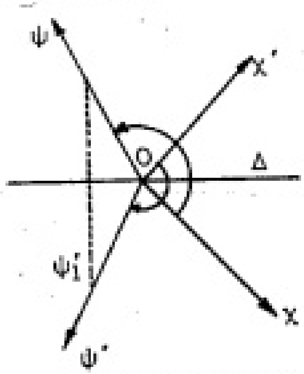
Σύμφωνα λοιπὸν μὲ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν ἔχομεν:

$$(\vec{Ox}, \vec{Oy}) = -(\vec{Oy}, \vec{Ox}).$$



Ἐπίσης, εὐκόλως φαίνεται ὅτι δύο προσανατολισμέναι γωνίαι $(\vec{Ox}, \vec{Oy})$ καὶ $(\vec{O'x'}, \vec{O'y'})$ ἐντὸς προσανατολισμένου ἐπιπέδου, ὅταν εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς εὐθεῖαν Ε, εἶναι ἀντίθετοι, διότι ἔχουν ἀντίθετον φορὰν ἡ μία μὲ τὴν ἄλλην. ἀλλὰ εἶναι, λόγῳ τῆς συμμετρίας, $x\widehat{O}y = x'\widehat{O'}y'$.

1.6. *Θεώρημα*. Ἂν δύο προσανατολισμέναι γωνίαι $(\vec{Ox}, \vec{Oy})$ καὶ $(\vec{Ox'}, \vec{Oy'})$ ἡμιευθειῶν ἐντὸς προσανατολισμένου ἐπιπέδου εἶναι ἀντίθετοι καὶ ἐπὶ πλέον συμβαίνει ἡ ἀρχὴ τῶν πλευρῶν τῆς μιᾶς νὰ εἶναι ἀρχὴ καὶ τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης, τότε θὰ εἶναι αἱ δύο γωνίαι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν Δ, ἡ ὁποία διχοτομεῖ τὴν γεωμετρικὴν γωνίαν, ποὺ ὁρίζουν ἡ ἀρχικὴ πλευρὰ τῆς μιᾶς μὲ τὴν ἀρχικὴν πλευρὰν τῆς ἄλλης ἐκ τῶν δύο προσανατολισμένων γωνιῶν.



Πράγματι. Ἡ εὐθεῖα Δ, διχοτόμος τῆς γωνίας $x\widehat{O}x'$ (δεδομένον), εἶναι ἄξων συμμετρίας τῶν Ox, Ox'.

Ἄς ὀνομάσωμεν Oy_1' τὴν συμμετρικὴν τῆς Oy ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν Δ. Τότε αἱ προσανατολισμέναι γωνίαι $(\vec{Ox}, \vec{Oy})$ καὶ $(\vec{Ox'}, \vec{Oy_1'})$ εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς ἄξονα τὴν Δ.

Τὸ πρόβλημα λοιπὸν τώρα εἶναι νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ $(\vec{Ox'}, \vec{Oy_1'})$ εἶναι ἀκριβῶς ἡ $(\vec{Ox'}, \vec{Oy'})$.

Ἔχομεν:

$(\vec{Ox'}, \vec{Oy'}) = -(\vec{Ox}, \vec{Oy})$ (δεδομένον) (1).

Ἀλλὰ

$$-(\vec{Ox}, \vec{Oy}) = (\vec{Ox'}, \vec{Oy_1'}) \quad (2)$$

λόγῳ συμμετρίας πρὸς εὐθεῖαν (Δ).

Ἀπὸ αὐτά, ἐπειδὴ ἡ σχέσις «=» εἶναι μεταβατική, συνάγεται ὅτι:

$$(\vec{Ox'}, \vec{Oy'}) = (\vec{Ox'}, \vec{Oy_1'}) \quad (3).$$

Ἀπὸ τὴν (3) συνάγεται ἐξ ὁρισμοῦ ὅτι: $x'\widehat{O}y' = x'\widehat{O}y_1'$ καὶ ὅτι αἱ γωνίαι $(\vec{Ox'}, \vec{Oy'})$, $(\vec{Ox'}, \vec{Oy_1'})$ εἶναι τῆς αὐτῆς φορᾶς. Ἄρα αἱ ἡμιευθεῖαι Oy' καὶ Oy_1' εἶναι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς Ox'.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ἀλλά}: x'\widehat{O}y' = x'\widehat{O}y_1' \\ \text{καὶ } Oy', Oy_1' \text{ πρὸς} \\ \text{τὸ αὐτὸ μέρος τῆς } Ox'\end{array}\right| \Rightarrow Oy' \text{ ταυτίζεται μὲ } Oy_1'.$$

Συνεπῶς ἡ γωνία $(\vec{Ox'}, \vec{Oy_1'})$ εἶναι ἀκριβῶς ἡ $(\vec{Ox'}, \vec{Oy'})$.

Αὐτὸ σημαίνει μὲ ἄλλα λόγια: ἡ συμμετρικὴ τῆς $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν Δ, εἶναι ἡ $(\overrightarrow{Ox'}, \overrightarrow{Oy'})$.

1.7. *Θεώρημα.* Εἰς μίαν ἰσότητα δύο προσανατολισμένων γωνιῶν ἡμιευθειῶν προσανατολισμένου ἐπιπέδου, ὅπου ἡ ἀρχὴ τῶν πλευρῶν τῆς μιᾶς εἶναι ἀρχὴ τῶν πλευρῶν καὶ τῆς ἄλλης γωνίας, δύναται νὰ γίνῃ ἀντιμετάθεσις εἴτε τῶν μέσων εἴτε τῶν ἄκρων πλευρῶν. Δηλαδή:

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) = (\overrightarrow{Ox'}, \overrightarrow{Oy'}) \Rightarrow (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Ox'}) = (\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oy'}) \quad (1)$$

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) = (\overrightarrow{Ox'}, \overrightarrow{Oy'}) \Rightarrow (\overrightarrow{Oy'}, \overrightarrow{Oy}) = (\overrightarrow{Ox'}, \overrightarrow{Ox}) \quad (2).$$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) = (\overrightarrow{Ox'}, \overrightarrow{Oy'})$, συνάγεται ὅτι:

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) = -(\overrightarrow{Oy'}, \overrightarrow{Ox'}) \quad (3).$$

Ἀπὸ τὴν (3), σύμφωνα μὲ τὸ θεώρημα (1.6), συνάγεται ὅτι αἱ γωνίαι $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ καὶ $(\overrightarrow{Oy'}, \overrightarrow{Ox'})$ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία διχοτομεῖ τὴν γεωμετρικὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν ὁρίζουν αἱ ἀρχικαὶ πλευραὶ αὐτῶν, δηλαδὴ πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς $x\widehat{O}y'$.

Ἔτσι τὰ ζεύγη (Ox, Oy′) καὶ (Oy, Ox′) εἶναι τὸ καθένα, ζεῦγος ἡμιευθειῶν συμμετρικῶν πρὸς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν Δ. Ἄρα αἱ γωνίαι:

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Ox'}) \quad \text{καὶ} \quad (\overrightarrow{Oy'}, \overrightarrow{Oy})$$

εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς ἄξονα, καὶ συνεπῶς εἶναι ἀντίθετοι. Ἄρα ἔχομεν:

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Ox'}) = -(\overrightarrow{Oy'}, \overrightarrow{Oy}) = (\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oy'}),$$

ἀπὸ ὅπου συνάγεται ὅτι:

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Ox'}) = (Oy, Oy')$$

καὶ ἔτσι ἀληθεύει ἡ συνεπαγωγὴ (1).

Ὁμοίως, λόγῳ τῆς συμμετρίας πρὸς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν τῶν Ox, Oy′ καθὼς καὶ τῶν Oy, Ox′, συνάγεται ὅτι αἱ γωνίαι $(\overrightarrow{Oy'}, \overrightarrow{Oy})$ καὶ $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Ox'})$ εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς μίαν εὐθεῖαν καὶ συνεπῶς ἔχομεν:

$$(\overrightarrow{Oy'}, \overrightarrow{Oy}) = -(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Ox'}) = (\overrightarrow{Ox'}, \overrightarrow{Ox}),$$

ἀπὸ ὅπου προκύπτει $(\overrightarrow{Oy'}, \overrightarrow{Oy}) = (\overrightarrow{Ox'}, \overrightarrow{Ox})$, ποὺ φανερώνει ὅτι ἀληθεύει καὶ ἡ συνεπαγωγὴ (2).

2. Ἀλγεβρικὴ τιμὴ μιᾶς προσανατολισμένης γωνίας δύο ἡμιευθειῶν

2.1. Ἐξ ὁρισμοῦ ἡ προσανατολισμένη γωνία δύο ἡμιευθειῶν Ox, Oy προσανατολισμένου ἐπιπέδου δίδει ἰδέαν τῆς μετατοπίσεως τῆς πρώτης ἐκ τῶν ἡμιευθειῶν διὰ στροφῆς περὶ τὴν ἀρχήν της.

Ἔτσι, ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τῆς προσανατολισμένης γωνίας $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ εἶναι ὁ πραγματικὸς ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ἀπόλυτος τιμὴ εἶναι τὸ μέτρον τῆς στροφῆς, τὴν ὁποίαν πραγματοποιεῖ ἡ ἡμιευθεῖα Ox περὶ τὸ O ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς γωνίας, πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, ἀδιάφορον ἂν ἡ φορὰ αὐτὴ εἶναι ἡ θετικὴ ἢ ἡ ἀνάδρομος φορὰ τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου, μέχρις ὅτου σταματήσει ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς Oy.

Καὶ δὲν ἔχει σημασίαν, ἂν σταματήσῃ ἐπὶ τῆς Oy κατὰ τὴν πρώτην διάβασιν ἀπὸ αὐτὴν ἢ ἀφοῦ πραγματοποιήσει ἀκόμη καὶ ἕνα ἢ περισσοτέρους γύρους μετὰ τὴν πρώτην διάβασίν της ἀπὸ Oy.

Σημασίαν ἔχει τὸ τελικὸν ἀποτέλεσμα: νὰ σταματήσῃ κάποτε ἐπὶ τῆς Oy. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ Ox στρέφεται περὶ τὸ O κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν καὶ ἂς ληφθῇ μονὰς γωνιῶν τὸ ἀκτίνιον: Ἂν σταματήσῃ ἐπὶ τῆς Oy κατὰ τὴν πρώτην διάβασιν ἀπὸ αὐτήν, τὸ μέτρον τῆς στροφῆς θὰ εἶναι ἔστω α ἀκτίνια. Ἂν σταματήσῃ ἐπὶ τῆς Oy κατὰ τὴν δευτέραν διάβασιν ἀπὸ αὐτήν, θὰ ἔχῃ πραγματοποιήσει, ἕνα γῦρον ἐπὶ πλέον καὶ τὸ μέτρον τῆς στροφῆς θὰ εἶναι $\alpha+2\pi$ ἀκτίνια. Ἂν σταματήσῃ κατὰ τὴν τρίτην διάβασιν, τὸ μέτρον τῆς στροφῆς θὰ εἶναι $\alpha+2\cdot 2\pi$, καὶ κατὰ τὴν $(\nu+1)^{\eta\nu}$ διάβασιν, τὸ μέτρον θὰ εἶναι $\alpha+\nu\cdot 2\pi$ ἀκτίνια.

Ἔτσι ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ εἰς ἀκτίνια τῆς γωνίας $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ ὅταν ἡ Ox στρέφεται κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν περὶ τὸ O, εἶναι ἕνας ἀριθμὸς τοῦ τύπου:

$$[\alpha+\nu\cdot 2\pi] \quad (1)$$

ὅπου α τὸ μέτρον εἰς ἀκτίνια τῆς γωνίας $x\widehat{O}y$ (ἐνδεχομένως $x\smile{O}y$), καὶ ν ἕνας ἀκέραιος ἀριθμὸς θετικὸς ἢ ὁ μηδέν.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἡ Ox στρέφεται περὶ τὸ O κατὰ τὴν ἀνάδρομον φορὰν τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου. Τότε:

Ἂν σταματήσῃ ἐπὶ τῆς Oy κατὰ τὴν πρώτην διάβασίν της ἀπὸ ἐκεῖ, θὰ ἔχῃ πραγματοποιηθῆ στροφὴ $2\pi-\alpha$ ἀκτινίων, ἀλλὰ ἐπειδὴ γίνεται κατὰ τὴν φορὰν τὴν ἀντίθετον τῆς θετικῆς, ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς θὰ προσημανθῇ μὲ — καὶ ἑπομένως τὸ μέτρον τῆς στροφῆς θὰ εἶναι $-(2\pi-\alpha)$, δηλ. $\alpha-2\pi$ ἀκτίνια.

Ἂν σταματήσῃ ἐπὶ τῆς Oy κατὰ τὴν δευτέραν διάβασιν ἀπὸ ἐκεῖ θὰ προστεθῇ ἕνας γῦρος κατὰ τὴν ἀνάδρομον φορὰν καὶ τὸ μέτρον τῆς στροφῆς θὰ εἶναι $\alpha - 2\pi - 2\pi = \alpha - 2 \cdot 2\pi$.

Κατὰ τὴν τρίτην διάβασιν τῆς Ox ἀπὸ Oy, τὸ μέτρον τῆς στροφῆς εἰς ἀκτίνια θὰ εἶναι: $\alpha - 2 \cdot 2\pi - 2\pi$, δηλ. $\alpha - 3 \cdot 2\pi$ καὶ κατὰ τὴν $\nu^{\eta\nu}$ διάβασιν θὰ εἶναι $\alpha - \nu \cdot 2\pi$.

Ἔτσι, ὅταν ἡ στροφὴ τῆς Ox γίνεται κατὰ τὴν ἀνάδρομον φοράν, ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τῆς γωνίας $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ εἰς ἀκτίνια θὰ εἶναι ἀριθμὸς τοῦ τύπου:

$$[\alpha + \mu \cdot 2\pi] \quad (2),$$

ὅπου α τὸ μέτρον εἰς ἀκτίνια τῆς $x\widehat{O}y$ (ἐνδεχομένως $\underset{\smile}{xOy}$ ἂν ἡ φορὰ τῆς προσανατολισμένης γωνίας (Ox, Oy) εἶναι ἀνάδρομος) καὶ μ ἕνας ἀρνητικὸς ἀκέραιος.

Οἱ δύο τύποι ὅμως (1) καὶ (2) συγκεντρώνονται εἰς ἕνα μόνον, τόν

$$[\alpha + k \cdot 2\pi] \quad (3) \qquad k \in Z,$$

ὅπου α τὸ μέτρον εἰς ἀκτίνια τῆς $x\widehat{O}y$ (ἐνδεχομένως $\underset{\smile}{xOy}$). Ὁ τύπος (3), ὅπου ὁ k διατρέχει ὁλόκληρον τὸ σύνολον Z τῶν ἀκεραίων, δίδει ἀριθμητικὴν πρόοδον ἀπέραντον πρὸς τὰ δεξιὰ καθὼς καὶ πρὸς τὰ ἀριστερὰ μὲ λόγον 2π.

Ἔχομεν δηλαδὴ μίαν κλάσιν ἰσοδυναμίας, ἡ ὁποία ὁρίζεται διὰ τῆς σχέσεως:

$$x = y + k \cdot 2\pi \quad (k \in Z).$$

ἡ ὁποία γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$x \equiv y \pmod{2\pi}.$$

Πράγματι:

(I) $\alpha_1 = \alpha_1 + 0 \cdot 2\pi$, ἄρα $\alpha_1 \equiv \alpha_1 \pmod{2\pi}$
(ἀνακλαστικότης τῆς σχέσεως)

(II) Ἂν $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \pmod{2\pi}$, ἔχομεν:
$\alpha_1 = \alpha_2 + k_1 \cdot 2\pi \quad (k_1 \in Z)$, ἄρα $\alpha_2 = \alpha_1 - k_1 \cdot 2\pi$, δηλ. $\alpha_2 \equiv \alpha_1 \pmod{2\pi}$.

Ἄρα $(\alpha_1 \equiv \alpha_2 \pmod{2\pi}) \Rightarrow (\alpha_2 \equiv \alpha_1 \bmod 2\pi)$
(συμμετρικότης τῆς σχέσεως)

(III) Ἂν $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \pmod{2\pi}$ καὶ $\alpha_2 \equiv \alpha_3 \pmod{2\pi}$ ἔχομεν:

$$\alpha_1 = \alpha_2 + k_1 \cdot 2\pi \quad (k_1 \in Z) \quad (1)$$
$$\alpha_2 = \alpha_3 + k_2 \cdot 2\pi \quad (k_2 \in Z) \quad (2)$$

καὶ διὰ προσθέσεως τῶν (1) καὶ (2),

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_3 + (k_1 + k_2) \cdot 2\pi,$$

ἄρα $\qquad \alpha_1 = \alpha_3 + (k_1 + k_2)2\pi \quad (3)$

Καὶ ἐπειδή: $k_1, k_2 \in Z \Rightarrow (k_1 + k_2) \in Z$, ἡ (3) φανερώνει ὅτι: $\alpha_1 \equiv \alpha_3 \pmod{2\pi}$. Ἄρα:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 \equiv \alpha_2 \pmod{2\pi} \\ \text{καὶ } \alpha_2 \equiv \alpha_3 \pmod{2\pi} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1 \equiv \alpha_3 \pmod{2\pi}$$

(μεταβατικότης τῆς σχέσεως).

Ἔτσι, ἐντὸς τοῦ συνόλου τῶν ἀριθμῶν (3), ἡ σχέσις:

$$x \equiv y \pmod{2\pi}$$

εἶναι: ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική, ἄρα εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.

Ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ (3) συνδέονται μὲ ἕνα οἱονδήποτε ἐξ αὐτῶν διὰ τῆς σχέσεως $x \equiv y \pmod{2\pi}$.

Ἐπομένως, τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν (3) εἶναι μία κλάσις ἰσοδυναμίας ἑνὸς οἱουδήποτε ἐκ τῶν ἀριθμῶν (3).

Οἱοσδήποτε λοιπὸν ἐκ τῶν ἀριθμῶν (3), εἶναι ἀντιπρόσωπος τῆς κλάσεως αὐτῆς.

Ἔτσι, ἀλγεβρικὴ τιμὴ τῆς γωνίας $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ εἶναι ἡ κλάσις, τὴν ὁποίαν ἀποτελεῖ τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν (3). Καὶ ἐπειδὴ ἀντιπρόσωπος αὐτῆς εἶναι οἱοσδήποτε ἐκ τῶν (3), ἂν α_1 εἶναι κάποιος ἐξ αὐτῶν δυνάμεθα νὰ γράφωμεν:

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) = \alpha_1 \pmod{2\pi}.$$

Συνοψίζοντες παρατηροῦμεν: *Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ εἰς ἀκτίνια μιᾶς προσανατολισμένης γωνίας $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ δύο ἡμιευθειῶν ἐντὸς προσανατολισμένου ἐπιπέδου* εἶναι: *μία ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ λόγον 2π, ἀπέραντος κατὰ τὰς δύο φοράς, τῆς ὁποίας ἕνας ὅρος εἶναι τὸ μέτρον εἰς ἀκτίνια τῆς γωνίας $x\widehat{O}y$, προσημασμένον μὲ τὸ + ἂν ἡ φορὰ τῆς προσανατολισμένης γωνίας $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ εἶναι ἡ ὀρθὴ καὶ μὲ τὸ — ἂν ἡ φορὰ αὐτῆς εἶναι ἀνάδρομος.*

Ὡς ἀντιπρόσωπον τῆς τιμῆς τῆς $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ δυνάμεθα νὰ γράφωμεν οἱονδήποτε ὅρον τῆς ἀνωτέρω ἀριθμητικῆς προόδου, καὶ λέγεται αὐτὸς *ἕνας προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τῆς γωνίας.*

Ἡ περίπτωσις εἶναι ἀνάλογος μὲ τὴν περίπτωσιν ρητοῦ ἀριθμοῦ, διότι καὶ αὐτὸς εἶναι μία κλάσις ἰσοδυνάμων μεταξὺ των κλασμάτων καὶ θεωροῦμεν ὡς τιμὴν του ἀντιπροσωπεύουσαν αὐτόν, ἕνα οἱονδήποτε ἀπὸ τὰ κλάσματα, ποὺ ἀνήκουν εἰς τὴν κλάσιν, ἡ ὁποία ὁρίζει τὸν ρητόν.

Ἐλλείψει ἑνὸς εἰδικοῦ συμβολισμοῦ, ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τῆς προσανατολισμένης γωνίας $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ συμβολίζεται διὰ τοῦ αὐτοῦ συμβολισμοῦ $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$.

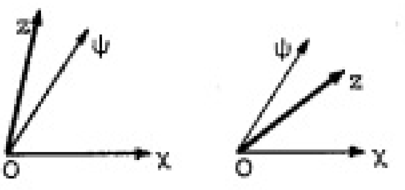
Τὸ κείμενον ἐπιτρέπει σχεδὸν πάντοτε νὰ ἀναγνωρίζωμεν ἂν αὐτός, ὁ ἑνιαῖος συμβολισμὸς παριστάνει τὴν προσανατολισμένην γωνίαν ἢ τὴν ἀλγεβρικὴν τιμήν της. Ἂν εἶναι ὠφέλιμον νὰ διευκρινηθῇ ὅτι μία ἰσότης μεταξὺ συμβόλων ὡσὰν τὸ $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ ἀφορᾷ εἰς ἀλγεβρικὰς τιμάς, δηλώνομεν αὐτὸ διὰ τοῦ συμβολισμοῦ [2π] εἰς τὸ τέλος τῆς γραμμῆς.

3. Σχέσις τοῦ **Chasles** διὰ τὰς ἀλγεβρικὰς τιμὰς προσανατολισμένων γωνιῶν ἡμιευθειῶν

3.1. Μία ἀκολουθία προσανατολισμένων γωνιῶν ἡμιευθειῶν ἐπὶ προσανατολισμένου ἐπιπέδου, ὅπου ἡ ἀρχὴ τῶν πλευρῶν ὅλων τῶν γωνιῶν εἶναι κοινὴ καὶ ὅπου ἡ τελικὴ πλευρὰ ἑκάστης εἶναι ἀρχικὴ πλευρὰ τῆς ἑπομένης γωνίας, ὀνομάζεται ἀκολουθία διαδοχικῶν προσανατολισμένων γωνιῶν ἡμιευθειῶν.

3.2. Θεώρημα. *Τὸ ἄθροισμα προσδιορισμῶν τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν διαδοχικῶν προσανατολισμένων γωνιῶν, ἑνὸς διὰ κάθε μίαν, εἶναι ἕνας προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τῆς προσανατολισμένης γωνίας, ἡ ὁποία ἔχει ἀρχικὴν πλευρὰν τὴν ἀρχικὴν πλευρὰν τῆς πρώτης γωνίας καὶ τελικήν, τὴν τελικὴν τῆς τελευταίας γωνίας.*

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν πρῶτον μίαν ἀκολουθίαν δύο διαδοχικῶν προσανατολισμένων γωνιῶν ἡμιευθειῶν, τὰς $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$, $(\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz})$ ἑνὸς προσανατολισμένου ἐπιπέδου.



Φανταζόμεθα ὅτι ἡ ἡμιευθεῖα Ox στρέφεται περὶ τὸ O κατά τινα φοράν, ἐκείνην ὅμως ἡ ὁποία ἐπιτρέπει νὰ περάσῃ πρῶτον ἀπὸ τὴν Oy χωρὶς νὰ ἔχῃ περάσει ἐν τῷ μεταξὺ ἀπὸ τὴν Oz. Τοιαύτη φορὰ εἶναι διὰ τὸ (σχ. 1) ἡ ὀρθὴ καὶ διὰ τὸ (σχ. 2) ἡ ἀνάδρομος.

Ἂς ὀνομάσωμεν α ἀκτίνια τὸ μέτρον τῆς στροφῆς τῆς Ox μέχρι τῆς Oy καὶ β ἀκτίνια τὸ μέτρον τῆς στροφῆς, ἐν συνεχείᾳ τῆς Ox ἀπὸ Oy μέχρι τῆς Oz κατὰ τὴν μετατόπισιν τῆς Ox σύμφωνα μὲ τὸν ἀνωτέρω τρόπον.

Τότε, ὅταν σταματήσῃ ἡ Ox ἐπὶ τῆς Oz θὰ ἔχῃ πραγματοποιηθῇ στροφὴ τῆς Ox μέχρι τῆς Oz, μὲ μέτρον (α+β) ἀκτίνια, καὶ ἐπομένως ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς θὰ εἶναι ἕνας προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τῆς γωνίας $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz})$.

Ἀλλὰ οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β ἐκφράζοντες: ὁ πρῶτος μέτρον στροφῆς τῆς Ox μέχρι τῆς Oy καὶ ὁ δεύτερος, μέτρον στροφῆς τῆς Ox ἀπὸ Oy μέχρι Oz, εἶναι ὁ καθένας ἕνας προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τῆς γωνίας $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ ὁ πρῶτος καὶ τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τῆς γωνίας $(\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz})$ ὁ δεύτερος.

Ἔτσι τὸ θεώρημα ἀληθεύει διὰ τοὺς προσδιορισμοὺς α καὶ β τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν τῶν δύο γωνιῶν.

Καὶ ἂν γ ἀκτίνια εἶναι τυχὼν προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τῆς γωνίας $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz})$, θὰ ἔχωμεν:

$$\alpha+\beta \equiv \gamma \pmod{2\pi}, \quad \text{ἄρα} \quad \alpha+\beta=\gamma+k_1\cdot 2\pi \quad (1).$$

Ἀπὸ τὴν (1) συνάγεται καὶ ἡ:

$$\alpha+k_2\cdot 2\pi+\beta k_3+2\pi=\gamma+(k_1+k_2+k_3)\,2\pi \quad (2)$$

$$k_1,\ k_2,\ k_3 \in z.$$

Ἀλλά:

$$(k_1, k_2, k_3 \in z) \Rightarrow k_1+k_2+k_3 \in z,$$

καὶ ἔτσι ὁ ἀριθμός:

$$\gamma+(k_1+k_2+k_3)\,2\pi$$

εἶναι ἕνας προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τῆς γωνίας $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz})$ ὡς ἰσότιμος mod 2π ἀριθμοῦ γ, ὁ ὁποῖος εἶναι ἕνας προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τῆς γωνίας $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz})$.

Ἔτσι ἡ (2) ἐκφράζει:

$$(3)\ (\alpha+k_2\,2\pi)+(\beta+k_3\cdot 2\pi)=$$

ἕνας προσδιορισμὸς τῆς τιμῆς $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz})$.

Ἀλλά, ἐπειδὴ οἱ α καὶ β εἶναι ἕνας προσδιορισμὸς τῶν τιμῶν $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ καὶ $(\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz})$ ἀντιστοίχως, ἕπεται ὅτι οἱ ἀριθμοί:

$$\alpha+k_2\,2\pi,\ (k_2 \in z) \quad \text{καὶ} \quad \beta+k_3\,2\pi\ (k_3 \in z),$$

εἶναι ἐπίσης ἕνας προσδιορισμὸς τῶν τιμῶν $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ καὶ $(\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz})$ ἀντιστοίχως.

Ἄρα ἡ (3) ἐκφράζει:

Τὸ ἄθροισμα ἑνὸς προσδιορισμοῦ τῆς τιμῆς $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ καὶ ἑνὸς προσδιορισμοῦ τῆς τιμῆς $(\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz})$ εἶναι ἕνας προσδιορισμὸς τῆς τιμῆς $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz})$.

Τοῦτο δηλώνεται ὡς ἑξῆς :

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) + (\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz}) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz}) \mod 2\pi.$$

Ἐπαγωγικῶς ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι τοῦτο ἰσχύει ὁσαιδήποτε καὶ ἂν εἶναι αἱ διαδοχικαὶ προσανατολισμέναι γωνίαι ἡμιευθειῶν.

Δηλαδή :

$$(\overrightarrow{Ox_1}, \overrightarrow{Ox_2}) + (\overrightarrow{Ox_2}, \overrightarrow{Ox_3}) + \cdots + (\overrightarrow{Ox_{\nu-1}}, \overrightarrow{Ox_\nu}) =$$

$$= \overrightarrow{Ox_1}, \overrightarrow{Ox_\nu}) \mod 2\pi.$$

Ἡ σχέσις αὐτὴ ὀνομάζεται σχέσις **Chasles** διὰ τὰς ἀλγεβρικὰς τιμὰς προσανατολισμένων γωνιῶν ἡμιευθειῶν ἐντὸς προσανατολισμένου ἐπιπέδου.

4. Προσανατολισμένη γωνία δύο ἀξόνων ἐντὸς προσανατολισμένου ἐπιπέδου.

4.1. *Ὁρισμός.* Προσανατολισμένη γωνία δύο ἀξόνων ἐντὸς προσανατολισμένου ἐπιπέδου ὀνομάζεται κάθε διατεταγμένον ζεῦγος, τοῦ ὁποίου τὰ μέλη εἶναι οἱ δύο ἄξονες καὶ διὰ τοῦ ὁποίου δίδεται ἰδέα τῆς μεταβολῆς δύο προσανατολισμένων διευθύνσεων ἐντὸς τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου.

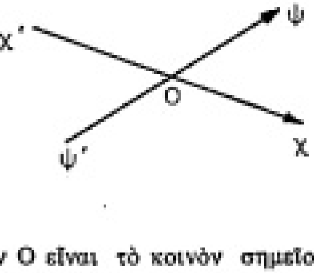
Ἂν x΄x, y΄y εἶναι δύο ἄξονες ἐντὸς προσανατολισμένου ἐπιπέδου Π καὶ ὁρισθῇ ὡς πρῶτος ὁ x΄x, ἡ ἀντίστοιχος προσανατολισμένη γωνία τῶν δύο ἀξόνων παριστάνεται διὰ τοῦ συμβολισμοῦ :

$$(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{y'y}),$$

ὁ ὁποῖος διαβάζεται :

«γωνία x΄x, y΄y».

Ἂν ὁρισθῇ ὡς πρῶτος ἄξων ὁ y΄y, ἡ ἀντίστοιχος προσανατολισμένη γωνία αὐτῶν δηλώνεται διὰ τοῦ συμβολισμοῦ $(\overrightarrow{y'y}, \overrightarrow{x'x})$.



Ἂν O εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον δύο ἀξόνων x΄x, y΄y, τότε φαίνεται ἀμέσως ὅτι μέτρον τῆς μεταβολῆς τῶν προσανατολισμένων διευθύνσεων, τὰς ὁποίας ἀντιπροσωπεύουν οἱ δύο ἄξονες, εἶναι ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τῆς προσανατολισμένης γωνίας τῶν ἡμιευθειῶν Ox, Oy ποὺ ἀποτελοῦν τὰ θετικὰ μέρη τῶν ἀξόνων.

Ἔχομεν λοιπόν :

$$(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{y'y}) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}).$$

Δι' αὐτὸ ἂν δοθοῦν δύο ἄξονες x΄x, y΄y ἐντὸς προσανατολισμένου ἐπιπέδου καὶ χαραχθοῦν ἀπὸ σημεῖον O τοῦ ἐπιπέδου αἱ ἡμιευθεῖαι OA, OB παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι τῶν x΄x, y΄y ἀντιστοίχως, ἔχομεν :

$$(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{yy}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}).$$

Δηλαδή :

Ἡ προσανατολισμένη γωνία δύο ἀξόνων ἐντὸς προσανατολισμένου ἐπιπέδου εἶναι ἴση μὲ τὴν προσανατολισμένην γωνίαν δύο ἡμιευθειῶν παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων πρὸς τοὺς δύο ἄξονας ἀντιστοίχως ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου, θεωρουμένων κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, ἄρα καὶ μὲ τὴν προσανατολισμένην γωνίαν τῶν δύο ἡμιευθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὰ θετικὰ μέρη τῶν δύο ἀξόνων, ἂν αὐτοὶ τέμνωνται, λαμβανομένων κατὰ τὴν τάξιν τῶν ἀντιστοίχων των ἀξόνων.

Ἑπομένως :

Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τῆς προσατολισμένης γωνίας δύο ἀξόνων εἰς ἀκτίνια εἶναι μία ἀριθμητικὴ πρόοδος ἀπέραντος πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ πρὸς τὰ ἀριστερά, μὲ λόγον 2π καὶ τῆς ὁποίας ἕνας ὅρος εἶναι τὸ μέτρον εἰς ἀκτίνια τῆς γεωμετρικῆς γωνίας τῶν δύο ἡμιευθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὰ θετικὰ μέρη τῶν ἀξόνων, προσημασμένον μὲ τὸ + ἂν ἡ προσανατολισμένη γωνία αὐτῶν τῶν ἡμιευθειῶν, λαμβανομένων κατὰ τὴν τάξιν τῶν ἀντιστοίχων ἀξόνων, εἶναι ὀρθῆς φορᾶς καὶ *μὲ τὸ —, ἂν αὐτὴ ἡ προσανατολισμένη γωνία εἶναι ἀναδρόμου φορᾶς.*

Ἂν οἱ δύο ἄξονες συμπίπτουν ἢ εἶναι παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι, ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τῆς προσανατολισμένης γωνίας των εἶναι ὁ ἀριθμὸς 0 καθὼς καὶ οἱοσδήποτε ἄλλος ἰσότιμος τοῦ 0 mod 2π, δηλαδὴ κάθε ἀριθμὸς τῆς μορφῆς $k \cdot 2\pi$ ($k \in z$). Ἂν οἱ δύο ἄξονες εἶναι ἀντίθετοι ἢ παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι, ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τῆς προσανατολισμένης γωνίας των εἶναι ὁ ἀριθμὸς π καὶ κάθε ἰσότιμος αὐτοῦ mod 2π, δηλαδή, κάθε ἀριθμὸς τῆς μορφῆς $\pi + k \cdot 2\pi$, $k \in z$. Ἕνας ἐξ αὐτῶν εἶναι καὶ $-\pi$.

Ἐὰν δύο προσανατολισμέναι γωνίαι ἀξόνων εἶναι ἴσαι θὰ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀλγεβρικαὶ τιμαὶ των ἴσαι, ἐνῶ ἂν δὲν εἶναι ἴσαι, τότε καὶ αἱ ἀλγεβρικαὶ τιμαὶ των δὲν εἶναι ἴσαι.

Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τῆς προσανατολισμένης γωνίας δύο δύο ἀξόνων $\vec{A}, \vec{B}$ παριστάνεται μὲ τὸν αὐτὸν συμβολισμὸν $(\vec{A}, \vec{B})$ ὅπως καὶ ἡ γωνία των. Ἀπὸ τὸ κείμενον ἀναγνωρίζεται ἂν αὐτὸς ὁ συμβολισμὸς παριστάνῃ τὴν γωνίαν ἢ τὴν ἀλγεβρικὴν τιμήν της.

Ἂν εἶναι ὠφέλιμον νὰ διευκρινηθῇ ὅτι εἰς μίαν ἰσότητα μεταξὺ συμβόλων ὡσὰν τὸ $(\vec{A}, \vec{B})$ πρόκειται περὶ ἀλγεβρικῶν τιμῶν, ἐπειδὴ πρόκειται τότε περὶ ἰσοτιμίας mod 2 π, γράφεται ἐπὶ τῆς αὐτῆς γραμμῆς δεξιὰ ὁ συμβολισμὸς [2π] ἢ καὶ ἡ γραφὴ mod 2π.

4.2. *Σχέσις Chasles.* Φανταζόμεθα μίαν ἀκολουθίαν προσανατολισμένων γωνιῶν ἀξόνων προσανατολισμένου ἐπιπέδου, ὅπου ἡ τελικὴ πλευρὰ ἑκάστης εἶναι ἡ ἀρχικὴ τῆς ἑπομένης, π χ. τὰς γωνίας $(\vec{A}, \vec{B})$, $(\vec{B}, \vec{\Gamma})$ $(\vec{\Gamma}, \vec{\Delta})$ καὶ ἀπὸ σημεῖον Ο τοῦ ἐπιπέδου φέρομεν τὰς ἡμιευθείας Οα, Οβ, Ογ, Οδ παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους ἀντιστοίχως πρὸς τοὺς ἄξονας $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{\Gamma}$, $\vec{\Delta}$.

Τότε, ὡς γνωστόν, θὰ εἶναι :

$$(\overrightarrow{O\alpha}, \overrightarrow{O\beta}) = (\vec{A}, \vec{B}) \bmod 2\pi, \quad (\overrightarrow{O\beta}, \overrightarrow{O\gamma}) = (\vec{B}, \vec{\Gamma}) \bmod 2\pi,$$

$$(\overrightarrow{O\gamma}, \overrightarrow{O\delta}) = (\vec{\Gamma}, \vec{\Delta}) \bmod 2\pi, \quad (\overrightarrow{O\alpha}, \overrightarrow{O\delta}) = (\vec{A}, \vec{\Delta}) \bmod 2\pi$$

Ἀλλά, σύμφωνα μὲ τὴν σχέσιν Chasles διὰ τὰς ἀλγεβρικὰς τιμὰς προσανατολισμένων γωνιῶν ἡμιευθειῶν προσανατολισμένου ἐπιπέδου, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν τὴν ἀρχήν, ἔχομεν (3.2 θεώρημα) :

$$(\overrightarrow{O\alpha}, \overrightarrow{O\beta}) + (\overrightarrow{O\beta}, \overrightarrow{O\gamma}) + (\overrightarrow{O\gamma}, \overrightarrow{O\delta}) = (\overrightarrow{O\alpha}, \overrightarrow{O\delta}) \bmod 2\pi.$$

Ἡ ἰσότης αὐτή, σύμφωνα μὲ τὰ ἀνωτέρω, γράφεται :

$$(\vec{A}, \vec{B}) + (\vec{B}, \vec{\Gamma}) + (\vec{\Gamma}, \vec{\Delta}) = (\vec{A}, \vec{\Delta}) \bmod 2\pi \quad (1).$$

Ἡ σχέσις (1) λέγεται σχέσις Chasles διὰ τὰς ἀλγεβρικὰς τιμὰς προσανατολισμένων γωνιῶν ἀξόνων ἑνὸς προσανατολισμένου ἐπιπέδου.

Ἡ σχέσις αὐτὴ δύναται νὰ γενικευθῇ δι' ἕνα οἱονδήποτε ἀριθμὸν ἀξόνων.

4.3. *Ἀντιμετάθεσις τῶν μέσων ἢ τῶν ἄκρων.* Θεωροῦμεν μίαν ἰσότητα δύο προσανατολισμένων γωνιῶν ἀξόνων, τήν :

$$(\vec{A}, \vec{B}) = (\vec{A}', \vec{B}') \bmod 2\pi \quad (1).$$

Προσθέτομεν εἰς τὰ μέλη της τὴν ἀλγεβρικὴν τιμὴν τῆς γωνίας $(\vec{B}, \vec{A}')$. Ἔχομεν :

$$(\vec{A}, \vec{B}) + (\vec{B}, \vec{A}') = (\vec{A}', \vec{B}') + (\vec{B}, \vec{A}') \bmod 2\pi \quad (2).$$

Ἐπειδὴ ἔχομεν ἀθροίσματα πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετικότης εἰς αὐτά, καὶ ἔτσι, ἔχομεν :

$$(\vec{A}, \vec{B}) + (\vec{B}, \vec{A}') = (\vec{B}, \vec{A}') + (\vec{A}', \vec{B}') \bmod 2\pi \quad (3).$$

Ἀλλά, σύμφωνα μὲ τὴν σχέσιν Chasles, ἔχομεν :

$$(\vec{A}, \vec{B}) + (\vec{B}, \vec{A}') = (\vec{A}, \vec{A}') \quad \text{καὶ}$$

$$(\vec{B}, \vec{A}') + (\vec{A}', \vec{B}') = (\vec{B}, \vec{B}') \bmod 2\pi$$

ὁπότε ἡ (3) δίδει :

$$(\vec{A}, \vec{A}') = (\vec{B}, \vec{B}') \bmod 2\pi.$$

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι ἀληθεύει ἡ συνεπαγωγή :

$$(\vec{A}, \vec{B}) = (\vec{A}', \vec{B}') \Rightarrow (\vec{A}, \vec{A}') = (\vec{B}, \vec{B}').$$

Δηλαδή : *Εἰς μίαν ἰσότητα ἀλγεβρικῶν τιμῶν δύο προσανατολισμένων γωνιῶν ἀξόνων, δύναται νὰ γίνῃ ἀντιμετάθεσις τῶν μέσων ἀξόνων.*

Ἂν εἰς τὰ μέλη τῆς (1) προστεθῇ ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τῆς γωνίας $(\vec{B}', \vec{A})$, ἔχομεν :

$$(\vec{B}', \vec{A}) + (\vec{A}, \vec{B}) = (\vec{A}', \vec{B}') + (\vec{B}', \vec{A}) \bmod 2\pi,$$

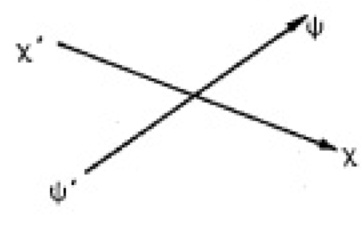
δηλ. $(\vec{B}', \vec{B}) = (\vec{A}', \vec{A}) \bmod 2\pi.$

Παρατηροῦμεν, δηλαδή, ὅτι ἀληθεύει καὶ ἡ συνεπαγωγή :

$$(\vec{A}, \vec{B}) = (\vec{A}', \vec{B}') \Rightarrow (\vec{B}', \vec{B}) = (\vec{A}', \vec{A}) \bmod 2\pi.$$

Δηλαδή : Εἰς μίαν ἰσότητα ἀλγεβρικῶν τιμῶν δύο προσανατολισμένων γωνιῶν ἀξόνων δύναται νὰ γίνῃ ἀντιμετάθεσις τῶν ἄκρων ἀξόνων.

4.4. Θεώρημα. *Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ προσανατολισμένης γωνίας ἀξόνων δὲν μεταβάλλεται ἂν οἱ δύο ἄξονες ἀντικατασταθοῦν διὰ τῶν ἀντιθέτων των.*



Πράγματι. Ἔστωσαν δύο ἄξονες x'x καὶ y'y. Ἔχομεν :

$$(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{y'y}) = (\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{xx'}) + (\overrightarrow{xx'}, \overrightarrow{yy'}) + (\overrightarrow{yy'}, \overrightarrow{y'y}) \bmod 2\pi \ (\text{σχέσις Chasles}) \quad (1).$$

Ὡς γνωστόν, ἕνας προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τῆς προσανατολισμένης γωνίας δύο ἀντιθέτων ἀξόνων, εἶναι εἰς ἀκτίνια, εἴτε ὁ ἀριθμὸς π εἴτε ὁ $-\pi$. Δύναται λοιπὸν νὰ τεθῇ :

$$(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{xx'}) = \pi \bmod 2\pi \text{ καὶ } (\overrightarrow{yy'}, \overrightarrow{y'y}) = -\pi \bmod 2\pi.$$

Ἔτσι, ἡ (1) δίδει :

$$(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{y'y}) = \pi + (\overrightarrow{xx'}, \overrightarrow{yy'}) - \pi \bmod 2\pi, \quad \text{δηλ.}$$

$$(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{y'y}) = (\overrightarrow{xx'}, \overrightarrow{yy'}) \bmod 2\pi \qquad (2).$$

Ἡ (2) ἐκφράζει τὸ θεώρημα.

4.5. Θεώρημα. *Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμή, προσανατολισμένης γωνίας ἀξόνων δὲν μεταβάλλεται ἂν ἕνας ἐκ τῶν ἀξόνων ἀντικατασταθῇ μὲ ἄξονα παράλληλον αὐτοῦ καὶ ὁμόρροπον.*

Πράγματι. Ἔστωσαν ἐντὸς προσανατολισμένου ἐπιπέδου δύο ἄξονες $\vec{A}$, $\vec{B}$ καὶ τρίτος ἄξων $\vec{A'}$, παράλληλος καὶ ὁμόρροπος τοῦ $\vec{A}$.

Θὰ ἔχωμεν :

$$(\vec{A}, \vec{A'}) = 0 \bmod 2\pi \qquad (1).$$

Ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος ἔχομεν :

$$(\vec{A}, \vec{B}) = (\vec{A}, \vec{A'}) + (\vec{A'}, \vec{B}) \bmod 2\pi, \text{ (σχέσις Chasles)}$$

ἡ ὁποία, λόγῳ τῆς (1) γράφεται :

$$(\vec{A}, \vec{B}) = 0 + (\vec{A'}, \vec{B}) \bmod 2\pi,$$

ἁπλούστερον :

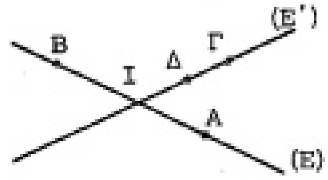
$$(\vec{A}, \vec{B}) = (\vec{A'}, \vec{B}) \bmod 2\pi \qquad (2).$$

Ἡ (2) ἐκφράζει τὸ θεώρημα, διότι ὁ $\vec{A'}$ εἶναι παράλληλος καὶ ὁμόρροπος τοῦ $\vec{A}$ ἐντὸς τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου τῶν $\vec{A}, \vec{B}$.

5. Προσανατολισμένη γωνία δύο εὐθειῶν ἐντὸς προσανατολισμένου ἐπιπέδου

5.1. *Ὁρισμός.* Προσανατολισμένη γωνία δύο εὐθειῶν ἐντὸς προσανατολισμένου ἐπιπέδου ὀνομάζεται κάθε διατεταγμένον ζεῦγος, τοῦ ὁποίου μέλη εἶναι αὐταὶ αἱ δύο εὐθεῖαι ὅταν δι' αὐτοῦ δίδεται ἰδέα τῆς μεταβολῆς τῆς διευθύνσεως τῆς πρώτης εὐθείας ἐντὸς τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου. Ἂν Ε, Ε' εἶναι δύο εὐθεῖαι προσανατολισμένου ἐπιπέδου καὶ ὁρισθῇ ὡς πρώτη ἡ Ε, ἡ ἀντίστοιχος προσανατολισμένη γωνία αὐτῶν παριστάνεται διὰ τοῦ συμβολισμοῦ (Ε, Ε').

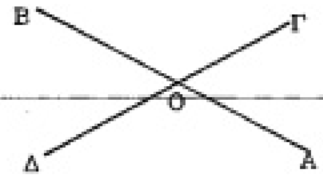
Εἰς τὸν συμβολισμὸν αὐτὸν κάθε εὐθεῖα δηλώνεται ὁλικῶς. Δύναται ὅμως νὰ δηλώνεται κάθε εὐθεῖα διὰ δύο σημείων της.



Π. χ. θὰ γράφωμεν ἀδιαφόρως :

(Ε, Ε'), ἢ (ΙΑ, ΙΓ), ἢ (ΙΒ, ΓΔ), ἢ (ΑΒ, ΔΓ), κλπ.

5.2. *Ἀλγεβρικὴ τιμὴ τῆς προσανατολισμένης γωνίας δύο εὐθειῶν.* Ἔστωσαν ΑΒ, ΓΔ δύο εὐθεῖαι προσανατολισμένου ἐπιπέδου τεμνόμεναι εἰς σημεῖον Ο.



Ἡ προσανατολισμένη γωνία (ΑΒ, ΓΔ) δίδει ἰδέαν τῆς μεταβολῆς τῆς διευθύνσεως τῆς εὐθείας ΑΒ, ὅταν μετατοπιζομένη ἐπὶ τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου διὰ στροφῆς περὶ τὸ Ο κοινὸν σημεῖον αὐτῆς μὲ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ ἔρχεται ἐπὶ τῆς δευτέρας εὐθείας ΓΔ.

Ἀλλὰ ἡ ΑΒ χωρίζεται ὑπὸ τοῦ Ο εἰς δύο ἡμιευθείας ΟΑ, ΟΒ, ἡ δὲ ΓΔ εἰς δύο ἡμιευθείας ΟΓ, ΟΔ.

Διὰ τοῦτο θὰ διέρχεται ἡ ΑΒ ἀπὸ τὴν ΓΔ κατὰ τὴν στροφήν της περὶ τὸ Ο, κάθε φορὰν ποὺ ἡ ἡμιευθεῖα ΟΑ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΔ.

Ἀλλὰ ἡ ἡμιευθεῖα ΟΑ θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΔ κάθε φορὰν ποὺ θὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΓ καὶ κάθε φορὰν ποὺ θὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΔ. Ὅταν κατὰ τὴν στροφὴν τῆς ΑΒ περὶ τὸ Ο συμπίπτῃ ἡ ἡμιευθεῖα ΟΑ μὲ τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΓ, ἔχομεν ἕνα προσδιορισμὸν τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τῆς προσανατολισμένης γωνίας $(\overrightarrow{O\mathrm{A}}, \overrightarrow{O\Gamma})$ καὶ ὅταν συμπίπτῃ μὲ τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΔ, ἔχομεν ἕνα προσδιορισμὸν τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τῆς προσανατολισμένης γωνίας $(\overrightarrow{O\mathrm{A}}, \overrightarrow{O\Delta})$.

Ἑπομένως μέτρον τῆς μεταβολῆς τῆς διευθύνσεως τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι κάθε προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς εἴτε τῆς προσανατολισμένης γωνίας $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Gamma})$ εἴτε τῆς προσανατολισμένης γωνίας $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Delta})$.

Ἀλλὰ ἂν α ἀκτίνια ἕνας προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τῆς γωνίας $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Gamma})$, τότε κάθε ἄλλος προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς αὐτῆς τῆς γωνίας θὰ εἶναι ἀριθμὸς τοῦ τύπου:

$$\alpha + k\,2\pi,\ (k \in z).$$

Καὶ ἀντιστρόφως: Κάθε ἀριθμὸς τοῦ τύπου:

$$\alpha + k\,2\pi\ (k \in z)$$

εἶναι ἕνας προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τῆς γωνίας $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Gamma})$.

Ἀπὸ ἄλλο μέρος, ἐπειδὴ εἶναι:

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Delta}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Gamma}) + (\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{O\Delta}) \bmod 2\pi$$

καὶ ἕνας προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τῆς γωνίας $(\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{O\Delta})$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς π, ἕπεται ὅτι:

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Delta}) = \alpha + \pi \bmod 2\pi,$$

ἀπὸ ὅπου φαίνεται ὅτι τὸ σύνολον τῶν προσδιορισμῶν τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τῆς γωνίας $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Delta})$ εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἀριθμῶν τοῦ τύπου:

$$(\alpha+\pi) + k_1\,2\pi\ (k_1 \in z)$$

Ἑπομένως μέτρον τῆς μεταβολῆς τῆς διευθύνσεως τῆς εὐθείας ΑΒ τῆς ὁριζομένης ὑπὸ τῆς προσανατολισμένης γωνίας (ΑΒ, ΓΔ) δηλαδὴ ἕνας προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς αὐτῆς τῆς γωνίας εἶναι κάθε ἀριθμὸς τῆς ἑνώσεως τοῦ συνόλου τῶν ἀριθμῶν:

$$\alpha + k\,2\pi\ (k \in z).$$

καὶ τοῦ συνόλου τῶν ἀριθμῶν:

$$\alpha + \pi + k_1\,2\pi = \alpha + (2k_1+1)\pi.$$

Οἱ πρῶτοι εἶναι οἱ διαφέροντες ἀπὸ α κατὰ ἄρτιον πολλαπλάσιον τοῦ π καὶ οἱ δεύτεροι εἶναι οἱ διαφέροντες ἀπὸ α κατὰ περιττὸν πολλαπλάσιον τοῦ π.

Ἑπομένως ἡ ἕνωσις τῶν δύο ἀνωτέρω συνόλων εἶναι ὅλοι οἱ διαφέροντες ἀπὸ α κατὰ πολλαπλάσιον τοῦ π, δηλαδὴ ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ τοῦ τύπου:

$$\alpha + \lambda\pi\ (\lambda \in z).$$

Ὥστε προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τῆς γωνίας (ΑΒ, ΓΔ) εἶναι κάθε ἀριθμὸς τοῦ τύπου $\alpha+\lambda\pi$ καὶ μόνον τέτοιος ἀριθμός.

Τὸ σύνολον αὐτῶν εἶναι ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ λόγον π ἀπέραντος πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ἀριστερά.

Εἶναι μία κλάσις ἰσοδυναμίας ὁριζομένη ὑπὸ τῆς σχέσεως:

$$x = y + \lambda\pi\ (\lambda \in z),$$

δηλαδὴ ὑπὸ τῆς ἰσοτιμίας:

$$x \equiv y\ (\bmod\ \pi).$$

Πράγματι:

(I) $\alpha_1 = \alpha_1 + 0\,\pi$, ἄρα $\alpha_1 \equiv \alpha_1 \bmod \pi$ (ἀνακλαστικότης τῆς σχέσεως).

(II) Ἂν $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \bmod \pi$, ἔχομεν:

$\alpha_1 = \alpha_2 + \lambda_1\pi\ (\lambda_1 \in z)$, ἄρα $\alpha_2 = \alpha_1 - \lambda_1\pi$, δηλ. $\alpha_2 \equiv \alpha_1 \bmod \pi$.

Ἄρα $(\alpha_1 \equiv \alpha_2 \bmod \pi) \Rightarrow \alpha_2 \equiv \alpha_1 \bmod \pi$ (συμμετρικότης τῆς σχέσεως).

(III) Ἂν $\alpha_1 \equiv \alpha_2\ (\bmod\ \pi)$ καὶ $\alpha_2 \equiv \alpha_3\ (\bmod\ \pi)$, ἔχομεν:

$$\alpha_1 = \alpha_2 + \lambda_1\pi,\ \lambda_1 \in z \quad (1)$$
$$\alpha_2 = \alpha_3 + \lambda_2\pi,\ \lambda_2 \in z \quad (2)$$

ὁπότε διὰ προσθέσεως:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_3 + (\lambda_1+\lambda_2)\pi,$$

ἀπὸ ὅπου:

$$\alpha_1 = \alpha_3 + (\lambda_1+\lambda_2)\pi \quad (3).$$

Ἀλλά: $(\lambda_1, \lambda_2 \in z) \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \in z$

καὶ συνεπῶς ἡ (3) φανερώνει ὅτι:

$$\alpha_1 \equiv \alpha_3\ (\bmod\ \pi).$$

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι:

$$(\alpha_1 \equiv \alpha_2 \bmod \pi \ \text{ καὶ } \ \alpha_2 \equiv \alpha_3 \bmod \pi) \Rightarrow \alpha_1 \equiv \alpha_3 \bmod \pi$$

(μεταβατικότης τῆς σχέσεως).

Ἄρα τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν τοῦ τύπου:

$$\alpha + \lambda\pi\ (\lambda \in z)$$

εἶναι μία κλάσις ἰσοδυναμίας οἱουδήποτε ἐξ αὐτῶν, διότι ὅλοι συνδέονται μὲ οἱονδήποτε ἐξ αὐτῶν διὰ τῆς σχέσεως:

$$x \equiv y \bmod \pi.$$

Ἄρα, οἱοσδήποτε ἐξ αὐτῶν εἶναι ἀντιπρόσωπος τῆς κλάσεως αὐτῆς.

Ἔτσι:

Ἀλγεβρικὴ τιμὴ τῆς (ΑΒ, ΓΔ) εἶναι ἡ κλάσις, τὴν ὁποίαν ἀποτελεῖ τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν τοῦ τύπου:

$$\alpha + \lambda\pi\ (\lambda \in z)$$

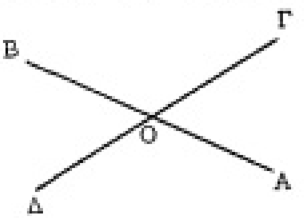
Καὶ ἐπειδὴ οἱοσδήποτε ἐξ αὐτῶν εἶναι ἀντιπρόσωπος τῆς κλάσεως αὐτῆς, ἂν α_1 εἶναι ἕνας ἐξ αὐτῶν, ἔχομεν:

$$(AB, \Gamma\Delta) = \alpha_1 \ (\text{mod } \pi).$$

Ὡς α_1 δύναται νὰ ληφθῇ τὸ μέτρον εἰς ἀκτίνια τῆς γεωμετρικῆς γωνίας τὴν ὁποίαν σχηματίζει μία ἐκ τῶν ἡμιευθειῶν τῆς πρώτης εὐθείας AB, εἰς τὰς ὁποίας χωρίζεται ὑπὸ τῆς δευτέρας εὐθείας, μὲ μίαν ἐκ τῶν ἡμιευθειῶν τῆς δευτέρας εὐθείας, προσημασμένον μὲ τὸ + ἂν ἡ γωνία αὐτὴ γράφεται κατὰ τὴν ὀρθὴν φορὰν καὶ μὲ τὸ — ἂν γράφεται κατὰ τὴν ἀνάδρομον φοράν.

§ 3. *Σχέσις τοῦ Chasles διὰ τὰς ἀλγεβρικὰς τιμὰς προσανατολισμένων γωνιῶν εὐθειῶν.*

1ον) Εἴδομεν ὅτι ἕνας προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τῆς προσανατολισμένης γωνίας (AB, ΓΔ) δύο εὐθειῶν AB, ΓΔ τεμνομένων εἰς σημεῖον O, εἶναι τὸ μέτρον τῆς γεωμ. γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζει μία ἐκ τῶν ἡμιευθειῶν εἰς τὰς ὁποίας χωρίζεται ἡ πρώτη εὐθεία ὑπὸ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν δύο εὐθειῶν, π. χ. ἡ OA μὲ μίαν ἐκ τῶν ἡμιευθειῶν, π. χ. τὴν OΓ εἰς τὰς ὁποίας χωρίζεται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἡ δευτέρα εὐθεία, προσημασμένον μὲ τὸ + ἂν ἡ γωνία αὐτὴ εἶναι ὀρθῆς φορᾶς ὅταν ἀρχίζῃ ἀπὸ OA, καὶ μὲ τὸ — ἂν εἶναι ἀναδρόμου φορᾶς.



Ἀλλὰ αἱ ἡμιευθεῖαι OA, OΓ εἶναι τὰ θετικὰ μέρη τῶν ἀξόνων $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ καὶ συνεπῶς τὸ ἀνωτέρω μέτρον μέτρον τῆς γωνίας $A\widehat{O}\Gamma$ εἶναι ἕνας προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τῆς προσανατολισμένης γωνίας $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{\Delta\Gamma})$.

Ἄρα: ὡς προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τῆς προσανατολισμένης γωνίας δύο εὐθειῶν, δύναται νὰ ληφθῇ κάποιος προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τῆς προσανατολισμένης γωνίας δύο ἀξόνων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ὑποστηρίγματα τὰς δύο εὐθείας.

Ἂν λοιπὸν $\vec{D}$ καὶ $\vec{D}'$ δηλώνουν δύο ἄξονας μὲ ὑποστηρίγματα ἀντιστοίχως τὰς εὐθείας (D) καὶ (D'), ἕνας προσδιορισμὸς τῆς προσανατολισμένης γωνίας (D, D') εἶναι κάποιος προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς $(\vec{D}, \vec{D}')$.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τῆς προσανατολισμένης γωνίας δύο εὐθειῶν εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἰσότιμοι modulo π ἑνὸς οἱουδήποτε προσδιορισμοῦ αὐτῆς τῆς τιμῆς, ἔχομεν:

$$(D, D') = (\vec{D}, \vec{D}') \text{ mod } \pi.$$

2ον) Φανταζόμεθα τώρα τρεῖς εὐθείας D, D', D'' προσανατολισμένου ἐπιπέδου.

Θὰ ἔχωμεν:

$$(D, D') = (\vec{D}, \vec{D}') + k_1\pi \qquad (k_1 \in Z)$$

$$(D' \, D'') = (\vec{D}', \vec{D}'') + k_2\pi \qquad (k_2 \in Z)$$

ἀπὸ ὅπου διὰ προσθέσεως ἔχομεν:

$$(D, D') + (D', D'') =$$

$$= (\vec{D}, \vec{D}') + (\vec{D}', \vec{D}'') + (k_1 + k_2)\pi \qquad (1).$$

Ἀλλὰ εἰς τὸ δεύτερον μέλος ὅπου ἔχομεν ἀλγεβρικὰς τιμὰς προσανατολισμένων γωνιῶν ἀξόνων δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ ἡ σχέσις τοῦ Chasles, ὁπότε ἔχομεν:

$$(D, D') + (D', D'') = (\vec{D}, \vec{D}'') + (k_1 + k_2)\pi \qquad (2).$$

Ἀλλά: $(k_1, k_2 \in Z) \Rightarrow (k_1 + k_2) \in Z$ καὶ διὰ τοῦτο τὸ δεύτερον μέλος τῆς (2) εἶναι ἀριθμὸς ἰσότιμος modulo π ἑνὸς προσδιορισμοῦ τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς $(\vec{D}, \vec{D}'')$, ἄρα, ὡς ἐδείχθη, θὰ εἶναι προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς (D, D''), δηλ. $(D, D'') = (\vec{D}, \vec{D}'') + \lambda\pi (\lambda \in Z)$.

Ἔτσι ἡ (2) δίδει:

$$(D, D') + (D', D'') = (D, D'') \text{ mod } \pi.$$

Εἶναι ἡ σχέσις Chasles διὰ τὰς ἀλγεβρικὰς τιμὰς προσανατολισμένων γωνιῶν εὐθειῶν.

Ἡ σχέσις αὐτὴ δύναται νὰ γενικευθῇ ἐπαγωγικῶς δι' οἱονδήποτε ἀριθμὸν εὐθειῶν τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου.

5.4. *Ἀντιμετάθεσις τῶν μέσων ἢ καὶ τῶν ἄκρων εὐθειῶν.* Ἔστωσαν A, B, Γ, Δ εὐθεῖαι προσανατολισμένου ἐπιπέδου καὶ ἔστω ὅτι ἰσχύει:

$$(A, B) = (\Gamma, \Delta) \text{ mod } \pi \qquad (1).$$

Προσθέτομεν εἰς τὰ δύο μέλη τὴν ἀλγεβρικὴν τιμὴν τῆς προσανατολισμένης γωνίας (B, Γ).

Θὰ ἔχωμεν:

$$(A, B) + (B, \Gamma) = (B, \Gamma) + (\Gamma, \Delta) \text{ mod } \pi \qquad (2).$$

(Ἐπειδὴ ἔχομεν ἀθροίσματα πραγμ. ἀριθμῶν, ἡ τάξις τῶν ὅρων εἶναι ἀδιάφορος).

Ἐφαρμόζοντες τὴν σχέσιν Chasles διὰ τὰς

ἀλγεβρικὰς τιμὰς προσανατολισμένων γωνιῶν εὐθειῶν εἰς τὰ μέλη τῆς (2), καταλήγομεν ὅτι:

$$(A,\Gamma)=(B,\Delta) \bmod \pi.$$

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι ἀληθεύει ἡ συνεπαγωγή:

$$((A,B)=(\Gamma,\Delta)) \bmod \pi \Rightarrow (A,\Gamma)=(B,\Delta) \bmod \pi.$$

Δηλαδή: Εἰς μίαν ἰσότητα ἀλγεβρικῶν τιμῶν δύο προσανατολισμένων γωνιῶν εὐθειῶν, δύναται νὰ γίνῃ ἀντιμετάθεσις τῶν μέσων εὐθειῶν.

Ἂν εἰς τὰ μέλη τῆς (1) προστεθῇ ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τῆς προσανατολισμένης γωνίας (Δ, Α), ἔχομεν:

$$(\Delta,A)+(A,B)=(\Gamma,\Delta)+\Delta,A) \bmod \pi$$

ὁπότε, ἐφαρμόζοντες τὴν σχέσιν Chasles εἰς κάθε μέλος, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$(\Delta,B)=(\Gamma,A) \bmod \pi.$$

Ἀληθεύει λοιπὸν καὶ ἡ συνεπαγωγή:

$$((A,B)=(\Gamma,\Delta)) \Rightarrow (\Delta,B)=(\Gamma,A) \bmod \pi.$$

Δηλαδή:

Εἰς μίαν ἰσότητα ἀλγεβρικῶν τιμῶν δύο προσανατολισμένων γωνιῶν εὐθειῶν, δύναται νὰ γίνῃ ἀντιμετάθεσις τῶν ἄκρων εὐθειῶν.

5.5 Θεώρημα. Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ προσανατολισμένης γωνίας εὐθειῶν δὲν μεταβάλλεται ἂν μία ἐκ τῶν εὐθειῶν ἀντικατασταθῇ μὲ οἱανδήποτε παράλληλον αὐτῆς.

Πράγματι:

Ἔστωσαν εὐθεῖαι A, B, Γ προσανατολισμένου ἐπιπέδου καὶ ἔστω ὅτι $A \parallel \Gamma$.

Ἔχομεν:

$$(A,B)=(A,\Gamma)+(\Gamma,B) \bmod \pi \quad (2).$$

(σχέσις Chasles).

Ἀλλὰ ἕνας προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς προσανατολισμένης γωνίας δύο παραλλήλων εὐθειῶν εἶναι ὁ ἀριθμὸς 0. Εἶναι λοιπόν:

$$(A,\Gamma)=0 \bmod$$

καὶ ἡ (1) γίνεται:

$$(A,B)=0+(\Gamma,B) \bmod \pi$$

δηλ. $(A,B)=(\Gamma,B) \bmod \pi$ (2).

Ἡ (2) ἐκφράζει τὸ θεώρημα.

Ἐπὶ τῆς ἀνισότητος $\frac{\sqrt{E}}{R} \leq \frac{\sqrt[4]{27}}{2}$

Ὑπὸ Δ. Βάθη, Καθηγητοῦ.

Εἰς τὸν «Εὐκλείδην» Ἰουνίου 1968, σελ. 230—231, ἐδημοσιεύθη ἡ ἀνισότης:

$$\frac{\sqrt{E}}{R} \leq \frac{\sqrt[4]{27}}{2} \quad (1)$$

ἰσχύουσα διὰ πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ.

Ἀποδεικνύομεν κατωτέρω μίαν ἀνισότητα ἰσχυροτέραν αὐτῆς.

Πρὸς τοῦτο ἀναχωροῦμεν ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν:

$$\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

ἰσχύουσαν διὰ πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ, ἀπὸ τὴν ὁποίαν, ἐπειδὴ ἔχομεν:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=2R,$$

συνάγεται ὅτι:

$$\alpha+\beta+\gamma \leq 3R\sqrt{3} \quad (3).$$

Ἀλλὰ εἶναι $(\alpha+\beta+\gamma)\rho=2E$, ὁπότε ἡ (3) δίδει:

$$2E \leq 3R\rho\sqrt{3} \Rightarrow \frac{2E}{R} \leq \rho\sqrt{27} \quad (4).$$

Ἀλλὰ εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει $2\rho \leq R$,

ἄρα $\rho\sqrt{27} \leq \frac{R}{2}\sqrt{27}$ (5).

Ἀληθεύουν λοιπὸν αἱ συνεπαγωγαί:

$$(4) \wedge (5) \Rightarrow \frac{2E}{R} \leq \rho\sqrt{27} \leq \frac{R}{2}\sqrt{27} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4E}{R^2} \leq \frac{2\rho}{R}\sqrt{27} \leq \sqrt{27} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{E}}{R} \leq \sqrt{\frac{2\rho}{R}} \cdot \sqrt[4]{27} \leq \sqrt[4]{27} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{E}}{R} \leq \sqrt{\frac{2\rho}{R}} \cdot \frac{\sqrt[4]{27}}{2} \leq \frac{\sqrt[4]{27}}{2} \quad (6).$$

Ἀπὸ τὴν (6) φαίνεται ὅτι ἡ:

$$\frac{\sqrt{E}}{R} \leq \sqrt{\frac{2\rho}{R}} \cdot \frac{\sqrt[4]{27}}{2}$$

εἶναι ἰσχυροτέρα τῆς (1). Ὅπου ἀνωτέρω ὑπάρχει ἰσότης, αὐτὴ ἰσχύει ἄν, καὶ μόνον ἄν, εἶναι: Α=Β=Γ.