ἀλγεβρικὰς τιμὰς προσανατολισμένων γωνιῶν εὐθειῶν εἰς τὰ μέλη τῆς (2), καταλήγομεν ὅτι:

$$(A, \Gamma) = (B, \Delta) \bmod \pi.$$

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι ἀληθεύει ἡ συνεπαγωγή:

$$((A, B) = (\Gamma, \Delta)) \bmod \pi \Rightarrow (A, \Gamma) = (B, \Delta) \bmod \pi.$$

Δηλαδή: Εἰς μίαν ἰσότητα ἀλγεβρικῶν τιμῶν δύο προσανατολισμένων γωνιῶν εὐθειῶν, δύναται νὰ γίνῃ ἀντιμετάθεσις τῶν μέσων εὐθειῶν.

Ἂν εἰς τὰ μέλη τῆς (1) προστεθῇ ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τῆς προσανατολισμένης γωνίας (Δ, Α), ἔχομεν:

$$(\Delta, A) + (A, B) = (\Gamma, \Delta) + \Delta, A) \bmod \pi$$

ὁπότε, ἐφαρμόζοντες τὴν σχέσιν Chasles εἰς κάθε μέλος, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$(\Delta, B) = (\Gamma, A) \bmod \pi.$$

Ἀληθεύει λοιπὸν καὶ ἡ συνεπαγωγή:

$$((A, B) = (\Gamma, \Delta)) \Rightarrow (\Delta, B) = (\Gamma, A) \bmod \pi.$$

Δηλαδή:

Εἰς μίαν ἰσότητα ἀλγεβρικῶν τιμῶν δύο προσανατολισμένων γωνιῶν εὐθειῶν, δύναται νὰ γίνῃ ἀντιμετάθεσις τῶν ἄκρων εὐθειῶν.

5.5 Θεώρημα. Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ προσανατολισμένης γωνίας εὐθειῶν δὲν μεταβάλλεται ἂν μία ἐκ τῶν εὐθειῶν ἀντικατασταθῇ μὲ οἱανδήποτε παράλληλον αὐτῆς.

Πράγματι:

Ἔστωσαν εὐθεῖαι Α, Β, Γ προσανατολισμένου ἐπιπέδου καὶ ἔστω ὅτι $A \parallel \Gamma$.

Ἔχομεν:

$$(A, B) = (A, \Gamma) + (\Gamma, B) \bmod \pi \quad (2).$$

(σχέσις Chasles).

Ἀλλὰ ἕνας προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς προσανατολισμένης γωνίας δύο παραλλήλων εὐθειῶν εἶναι ὁ ἀριθμὸς 0. Εἶναι λοιπόν:

$$(A, \Gamma) = 0 \bmod$$

καὶ ἡ (1) γίνεται:

$$(A, B) = 0 + (\Gamma, B) \bmod \pi$$

δηλ. $(A, B) = (\Gamma, B) \bmod \pi \quad (2).$

Ἡ (2) ἐκφράζει τὸ θεώρημα.

Ἐπὶ τῆς ἀνισότητος $\frac{\sqrt{E}}{R} \leq \frac{\sqrt[4]{27}}{2}$

Ὑπὸ Δ. Βάθη, Καθηγητοῦ.

Εἰς τὸν «Εὐκλείδην» Ἰουνίου 1968, σελ. 230—231, ἐδημοσιεύθη ἡ ἀνισότης:

$$\frac{\sqrt{E}}{R} \leq \frac{\sqrt[4]{27}}{2} \quad (1)$$

ἰσχύουσα διὰ πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ.

Ἀποδεικνύομεν κατωτέρω μίαν ἀνισότητα ἰσχυροτέραν αὐτῆς.

Πρὸς τοῦτο ἀναχωροῦμεν ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν:

$$\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

ἰσχύουσαν διὰ πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ, ἀπὸ τὴν ὁποίαν, ἐπειδὴ ἔχομεν:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = 2R,$$

συνάγεται ὅτι:

$$\alpha + \beta + \gamma \leq 3R\sqrt{3} \quad (3).$$

Ἀλλὰ εἶναι $(\alpha+\beta+\gamma)\rho = 2E$, ὁπότε ἡ (3) δίδει:

$$2E \leq 3R\rho\sqrt{3} \Rightarrow \frac{2E}{R} \leq \rho\sqrt{27} \quad (4).$$

Ἀλλὰ εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει $2\rho \leq R$,

ἄρα $\rho\sqrt{27} \leq \frac{R}{2}\sqrt{27} \quad (5).$

Ἀληθεύουν λοιπὸν αἱ συνεπαγωγαί:

$$(4) \wedge (5) \Rightarrow \frac{2E}{R} \leq \rho\sqrt{27} \leq \frac{R}{2}\sqrt{27} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4E}{R^2} \leq \frac{2\rho}{R}\sqrt{27} \leq \sqrt{27} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{E}}{R} \leq \sqrt{\frac{2\rho}{R}} \cdot \sqrt[4]{27} \leq \sqrt[4]{27} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{E}}{R} \leq \sqrt{\frac{2\rho}{R}} \cdot \frac{\sqrt[4]{27}}{2} \leq \frac{\sqrt[4]{27}}{2} \quad (6).$$

Ἀπὸ τὴν (6) φαίνεται ὅτι ἡ:

$$\frac{\sqrt{E}}{R} \leq \sqrt{\frac{2\rho}{R}} \cdot \frac{\sqrt[4]{27}}{2}$$

εἶναι ἰσχυροτέρα τῆς (1). Ὅπου ἀνωτέρω ὑπάρχει ἰσότης, αὐτὴ ἰσχύει ἄν, καὶ μόνον ἄν, εἶναι: $A = B = \Gamma$.

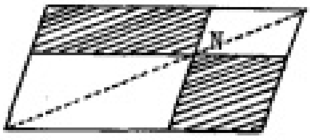
(I) *Τὰ μέσα τῶν διαγωνίων πλήρους τετραπλεύρου κεῖνται ἐπ' εὐθείας*. Μία ἁπλῆ ἀπόδειξις.

Ὑπὸ Δημ. Βάθη, Μαθηματικοῦ.

Ἡ πρότασις αὐτὴ ἀποδεικνύεται συνήθως διὰ τοῦ θεωρήματος τοῦ Μενελάου καὶ τοῦ ἀντιστρόφου του.

Ἀποδεικνύομεν κατωτέρω αὐτὴν διὰ τῶν ἐμβαδῶν στηριζόμενοι εἰς τὰς ἑξῆς προτάσεις, αἱ ὁποῖαι εὐκόλως ἀποδεικνύονται.

(II) *Ἐὰν διὰ σημείου μιᾶς διαγωνίου παραλληλογράμμου* (σχ. 1) *ἀχθοῦν παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτοῦ, τότε τὰ παραλληλόγραμμα τὰ μὴ περιέχοντα τμήματα ἐκείνης τῆς διαγωνίου, εἶναι ἰσοδύναμα.*

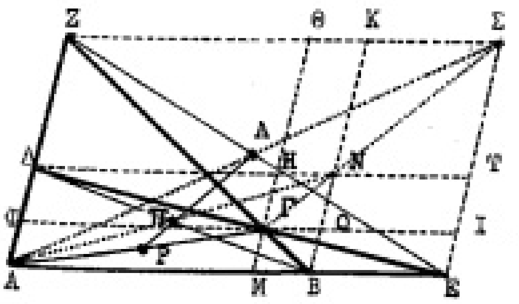


Σχ. 1

(III) Ἀντιστρόφως. *Ἐὰν διὰ ἐσωτερικοῦ σημείου N παραλληλογράμμου ἀχθοῦν παράλληλοι πρὸς τὰς πλευράς του καὶ συμβῇ δύο κατὰ κορυφὴν ἐκ τῶν σχηματισθέντων παραλληλογράμμων νὰ εἶναι ἰσοδύναμα, τότε τὸ σημεῖον N κεῖται ἐπὶ ἐκείνης τῆς διαγωνίου τοῦ ἀρχικοῦ παραλληλογράμμου, τὴν ὁποίαν ὁρίζουν αἱ κορυφαὶ αὐτοῦ, αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι κορυφαὶ τῶν δύο ἰσοδυνάμων παραλληλογράμμων.*

Ἰδοὺ ἡ ἀπόδειξις τῆς (I) διὰ τῶν ἐμβαδῶν.

Ἀπόδειξις τῆς (I). Διὰ τῶν κορυφῶν Β καὶ Ε τοῦ πλήρους τετραπλεύρου ΑΒΓΔΕΖ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΔΖ, καὶ διὰ τῶν κορυφῶν Δ καὶ Ζ αὐτοῦ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒΕ (σχ. 2).



Σχ. 2

Ἔπειτα ἀπὸ τὴν κορυφὴν Γ φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒΕ καὶ τὴν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΔΖ.

Τὸ σημεῖον Γ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΒΖ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΚΖ καὶ σύμφωνα μὲ τὴν πρότασιν (II), ἔχομεν:

$$(ΑΜΓΦ) = (ΚΘΓΟ) \quad (1).$$

Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ Γ εὑρίσκεται καὶ ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΔΕ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΕΤΔ. Διὰ τοῦτο, σύμφωνα πάλιν μὲ τὴν πρότασιν (II), ἔχομεν:

$$(ΑΜΓΦ) = (ΓΙΤΗ) \quad (2).$$

Ἀληθεύουν τώρα αἱ ἑξῆς συνεπαγωγαί:

$$(1) \wedge (2) \Rightarrow (ΚΘΓΟ) = (ΓΙΤΗ) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (ΗΝΚΘ) = (ΝΟΙΤ) \quad (3).$$

Ἀλλὰ τὸ Ν εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ παραλληλογράμμου ΓΙΣΘ καὶ διὰ τοῦτο ἀπὸ τὴν (3), σύμφωνα μὲ τὴν πρότασιν (III), συνάγεται ὅτι τὸ Ν κεῖται ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΓΣ τοῦ παραλληλογράμμου ΓΙΣΘ.

Ὀνομάζομεν τώρα Ρ, Π, Λ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ, ΕΖ ἀντιστοίχως τοῦ πλήρους τετραπλεύρου ΑΒΓΔΕΖ.

Τὰ Π καὶ Λ εἶναι μέσα διαγωνίου παραλληλογράμμων ΑΒΝΔ, ΑΕΣΖ ἀντιστοίχως, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι μέσα καὶ τῆς δευτέρας διαγωνίου αὐτῶν τῶν παραλληλογράμμων, δηλαδὴ εἶναι μέσα τῶν ΑΝ καὶ ΑΣ ἀντιστοίχως.

Οὕτω τὰ Ρ, Π, Λ εἶναι ἀντιστοίχως μέσα τμημάτων ΑΓ, ΑΝ, ΑΣ, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν ἀρχὴν Α καὶ ἔχουν τὰ πέρατα αὐτῶν Γ, Ν, Σ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας (ἀφοῦ, ὡς ἐδείχθη, τὸ Ν κεῖται ἐπὶ τῆς ΓΣ).

Διὰ τοῦτο τὰ μέσα αὐτῶν θὰ ἀνήκουν, ὡς γνωστόν, εἰς τὴν παράλληλον τῆς ΓΣ τὴν ἀγομένην ἀπὸ ἕνα ἐξ αὐτῶν.

Ἄρα, τὰ Ρ, Π, Λ δηλ. τὰ μέσα τῶν διαγωνίων τοῦ πλήρους τετραπλεύρου, κεῖνται ἐπ' εὐθείας. ὅ.ἔ.δ.

Ἡ εὐθεῖα ΡΠΛ ὀνομάζεται εὐθεῖα τοῦ Gauss ἢ εὐθεῖα τοῦ Νεύτωνος.