

Author: Γ. Δάσιος

Title: Μαθηματική μελέτη της σκεδάσεως ακτίνων X από την κύρια ελικά του DNA

Abstract: Μαθηματική μελέτη της σκεδάσεως ακτίνων X από ένα απλοποιημένο πρότυπο του DNA, αποτελούμενο από μια απλή έλικα με κατανεμημένους σημειακούς σκεδαστές σε ίσες μεταξύ τους αποστάσεις

Creator: HDML

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΚΕΔΑΣΕΩΣ ΑΚΤΙΝΩΝ
Χ ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΥΡΙΑ ΕΛΙΚΑ ΤΟΥ DNA

Γεώργιος Δάσιος (Ph.D)

Έπιμελητής Ε.Μ.Π.

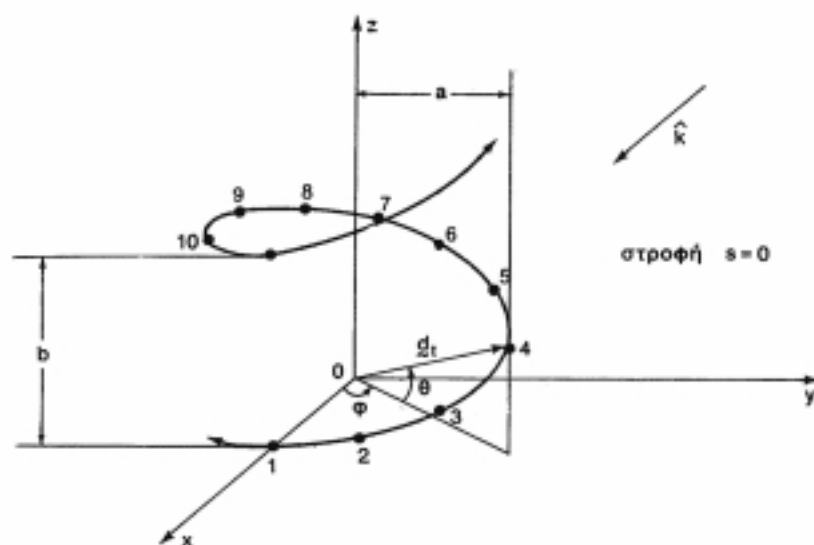
Τό 1953, ό Άγγλος Φυσικοχημικός F.H.C.Crick καί ό Άμερικανός βιολόγος J.D.Watson πρότειναν ένα πρότυπο για τόν στερεοχημικό τύπο του DNA (Deoxyribo Nucleic Acid) που αποτελεί χημική ένωση, μεγάλου μοριακού βάρους, στον κυτταρικό πυρήνα. Η δουλειά αυτή των Crick καί Watson τιμήθηκε με τό βραβείο Nobel φυσιολογίας καί Ιατρικής τό 1962. Σύμφωνα με αυτό τό πρότυπο τά άτομα κατανέμονται σε τέσσερεις βασικές ομάδες (Ad, Th, Cy, Gu) που καταλαμβάνουν ανά δύο (Ad-Th, Gu-Cy) τις αντίστοιχες (άπέναντι) θέσεις πάνω σε δύο όμόστροφες, όμοαξονικές, κυκλικές έλικες, με τό ίδιο βήμα καί τήν ίδια άκτίνα.

Περισσότερες περιγραφικές λεπτομέρειες καθώς καί ή σημασία του DNA στη σύγχρονη βιολογία (γεννητικός κώδικας, κληρονομικότητα κ.τ.λ.), αν καί γνωστά σε πολλούς, παραλείπονται από τό εισαγωγικό αυτό σημείωμα γιατί ό συγγραφέας δεσμεύεται από τήν έλλειψη ειδικότητας στο θέμα.

Στό άρθρο αυτό θα δοθεϊ μια Μαθηματική μελέτη της σκεδάσεως ακτίνων Χ από ένα άπλοποιημένο πρότυπο του DNA αποτελούμενο από μια άπλή έλικα με κατανεμημένους σημειακούς σκεδαστές σε ίσες μεταξύ τους άποστάσεις. Τό πρόβλημα αυτό βρύσεται στην κατηγορία της κολλακλής σκεδάσεως καί θα αντιμετωπισθεϊ με προσέγγιση πρώτης σκεδάσεως (κολλακλή σκέ-

δαση πρώτης τάξεως). Αν και τό πρόβλημα άπλοποιείται πολύ με την άπλούστευση του πρότυπου και της τάξεως προσεγγίσεως του μηχανισμού της κολλακλής σκεδάσεως τά άποτελέσματα βρίσκονται σε άμεση ποιοτική σύμπτωση με τά πειραματικά δεδομένα και δδγήσαν τους Crick και Watson στη διατύπωση της θεωρίας των. Τό θεωρητικό αυτό πρότυπο προβλέπει την έμφάνιση των φωτεινών σημείων και δημιουργούν τό ρομβοειδές σχήμα στη φωτογραφική κλάκα του έργαστηρίου.

Θεωρούμε μιá ύποθετική κυκλική έλικα με άκτίνα a και βήμα b . Σε κάθε στροφή της έλικας ύπάρχουν ίσοκαταμεμημένοι N σημειακοί σκεδαστές (βλέπε σχήμα 1). Στην περίπτωση του DNA $N=10$ και $b=34 \text{ \AA} = 34 \times 10^{-8} \text{ cm}$.



Σχήμα 1.

Τό διάνυσμα θέσεως κάθε σκεδαστή είναι

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_{st} &= sb\hat{z} + \vec{d}_t \\ \vec{d}_t &= a\cos\left(\frac{2\pi t}{N}\right)\hat{x} + a\sin\left(\frac{2\pi t}{N}\right)\hat{y} + \frac{tb}{N}\hat{z} \end{aligned} \right] \quad (1)$$

όπου ο δείκτης s καθορίζει τη στροφή της έλικας και ο δείκτης t καθορίζει τη θέση του σκεδαστή μέσα στην s στροφή της έλικας και συνεπώς παίρνει τις τιμές $t=0,1,2,\dots,N-1$, για κάθε τιμή του s . Θεωρούμε ότι η έλικα έχει $M+1$ στροφές στο θετικό ημίαξονα των z και M στον αρνητικό, δηλαδή η έλικα είναι πεπερασμένη με $2M+1$ στροφές που αντιστοιχούν στις τιμές $s=-M, -M+1,\dots,-1,0,1,\dots,M-1, M$. Η στροφή $s=0$ είναι η πρώτη στροφή πάνω από το επίπεδο xy (βλέπε σχήμα 1). Για να βρισκόμαστε σε όμοιομορφία με την όρολογία της βιβλιογραφίας των ακτύνων X θα χρησιμοποιήσουμε τη γωνία $\frac{\pi}{2}-\theta$ αντί της γωνίας θ σαν γωνία ύψους των σφαιρικών συντεταγμένων (βλέπε σχήμα 1). Έτσι το διάνυσμα θέσεως σε σφαιρικές συντεταγμένες θα είναι

$$\underline{r} = r \cos\varphi \cos\theta \hat{x} + r \sin\varphi \cos\theta \hat{y} + r \sin\theta \hat{z} \quad (2)$$

Αν σκεδάσουμε όρατο φως ($\lambda_{\text{κίτρινο}} \approx 5 \times 10^{-5} \text{ cm}$) από την έλικα του DNA θα έχουμε

$$\frac{\lambda}{b} \approx \frac{5 \times 10^{-5} \text{ cm}}{3,4 \times 10^{-7} \text{ cm}} = 1,47 \times 10^2 \approx 150 \quad (3)$$

που σημαίνει ότι το μήκος κύματος του προσκείμενου κύματος έχει το μήκος 150 στροφών της έλικας και κατά συνέπεια η σκέδαση γίνεται από την έλικα σαν ένας σκεδαστής και όχι από τους σκεδαστές που κατανομούνται κατά μήκος της έλικας. Αν λοιπόν θέλουμε να έχουμε πολλαπλή σκέδαση από τους σημειακούς σκεδαστές πρέπει να σκεδάσουμε ένα κυματικό πεδίο πολύ μικρότερου μήκους κύματος. Για την περίπτωση αυτή άπαιτούνται κυματικά πεδία στην περιοχή των ακτύνων X π.χ. για $b=4\lambda$ άπαιτεται προσκείμενο κυματικό πεδίο μήκους κύματος

$$\lambda = \frac{b}{4} = 10^{-8} \text{ cm} = 1\text{\AA}$$

που είναι κατά τρεις τάξεις μεγέθους μικρότερο του μήκους κύ-

ματος της όρατης ακτινοβολίας.

Θά θεωρήσουμε προσέγγιση πρώτης σκεδάσεως κατά την ό-
ποία υποθέτουμε ότι τό όλικό σκεδασμένο κεδίο $U(\underline{r})$ είναι τό
άθροισμα τών κεδίων u_{st} που σκεδάζει κάθε ένας από τούς ση-
μειακούς σκεδαστές, άγνοώντας τίσ συνεισφορές στο κεδίο σκε-
δάσεως που όφείλονται σε κολλαπλές σκεδάσεις άνώτερης τάξεως
που είναι άποτέλεσμα της ύπάρξεως κολλών σκεδαστών. Τό προσ-
κύπτου κύμα είναι ένα επίπεδο κύμα μέ διάνυσμα διαδώσεως στη
διεύθυνση \hat{x} .

Στό κεδίο ακτινοβολίας (άσυμπτωτική περιοχή του κεδίου
σκεδάσεως) τό σκεδασμένο κεδίο u_{st} που όφείλεται στον σκεδα-
στή b_{st} είναι

$$u_{st} \sim f(\hat{r}, \hat{x}) e^{ik \cdot b_{st}} \frac{e^{ik|r-b_{st}|}}{|r-b_{st}|}, \quad r \rightarrow \infty \quad (4)$$

όπου f είναι τό πλάτος σκεδάσεως καί $k \cdot b_{st}$ ή φάση του προσ-
κύπτοντος κεδίου στο σημείο του b_{st} σκεδαστή. Η (4) άποτελεεί
τή συνθήκη ακτινοβολίας του Rayleigh (ή χρονική έξάρτηση του
προβλήματος ύπετέθει άρμονική). Χρησιμοποιώντας την άσυμπτω-
τική σχέση

$$|r-b_{st}| \sim r - b_{st} \cdot \hat{r}, \quad r \rightarrow \infty \quad (5)$$

ή (4) γράφεται

$$u_{st} \sim f(\hat{r}, \hat{x}) e^{ik \cdot b_{st} - ik \cdot b_{st} \cdot \hat{r}} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad r \rightarrow \infty \quad (6)$$

Γιά προσέγγιση πρώτης σκεδάσεως έχουμε

$$U(\underline{r}) \sim \sum_{s=-M}^M \sum_{t=0}^{N-1} f(\hat{r}, \hat{x}) e^{ik \cdot b_{st}} \frac{e^{ik|r-b_{st}|}}{|r-b_{st}|}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{s=-M}^M \sum_{t=0}^{N-1} f(\hat{r}, \hat{x}) e^{ik \cdot \hat{b}_{st} - ikb_{st} \hat{r}} \frac{e^{ikr}}{r} \\ & = F(\hat{r}, \hat{x}) \frac{e^{ikr}}{r} \end{aligned} \quad (7)$$

όπου

$$F(\hat{r}, \hat{x}) = f(\hat{r}, \hat{x}) \sum_{s=-M}^M \sum_{t=0}^{N-1} e^{ik(\hat{x}-\hat{r}) \cdot \hat{b}_{st}} \quad (8)$$

είναι τό πλάτος σκεδάσεως που όφείλεται στην κολλαπή κατανομή σκεδαστών.

Γιά τόν ύπολογισμό του $F(\hat{r}, \hat{x})$ έχουμε

$$\begin{aligned} (\hat{x}-\hat{r}) \cdot \hat{b}_{st} & = a(1-\cos\theta\cos\varphi)\cos\left(\frac{2\pi t}{N}\right) - \\ & - a\cos\theta\sin\varphi\sin\left(\frac{2\pi t}{N}\right) - \frac{tb}{N}\sin\theta - sb\sin\theta \\ & = A\cos\left(\tau + \frac{2\pi t}{N}\right) - \left(\frac{tb}{N} - sb\right)\sin\theta \end{aligned} \quad (9)$$

μέ

$$A = a(1-2\cos\theta\cos\varphi + \cos^2\theta)^{1/2} \quad (10)$$

$$\tau = \tan^{-1} \frac{\cos\theta\sin\varphi}{1-\cos\theta\cos\varphi} \quad (11)$$

'Η (8) γράφεται

$$F(\hat{r}, \hat{x}) = f(\hat{r}, \hat{x}) \cdot S \cdot T \quad (12)$$

όπου

$$S = \sum_{s=-M}^M e^{-iksbs\sin\theta} = \frac{\sin[(2M+1)\gamma]}{\sin\gamma}, \quad \gamma = \frac{kb}{2}\sin\theta \quad (13)$$

$$T = \sum_{t=0}^{N-1} e^{ikA \cos(\tau + \frac{2\pi t}{N}) - ik \frac{bt}{N} \sin\theta} \quad (14)$$

Συνεπώς τό σκεδασμένο όλικό πεδίο σέ προσέγγιση πρώτης σκεδάσεως εΐναι

$$U(\underline{r}) \sim f(\hat{r}, \hat{x}) T \frac{\sin[(2M+1)\gamma]}{\sin\gamma} \frac{e^{ikr}}{r} \quad (15)$$

Ἡ μεγιστοποίηση τοῦ παράγοντα $\frac{\sin[(2M+1)\gamma]}{\sin\gamma}$ δημιουργεῖ τὶς "κύριες διευθύνσεις" ἢ "τρόπους διαδόσεως" (propagation modes). Οἱ τρόποι αὐτοῦ διαδόσεως καθορίζονται ἀπὸ τὶς διευθύνσεις θ_v γιὰ τὶς ὁποῖες ἔχουμε

$$kbs \sin\theta_v = 2v\pi, \quad v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \left[\frac{b}{\lambda} \right] \quad (16)$$

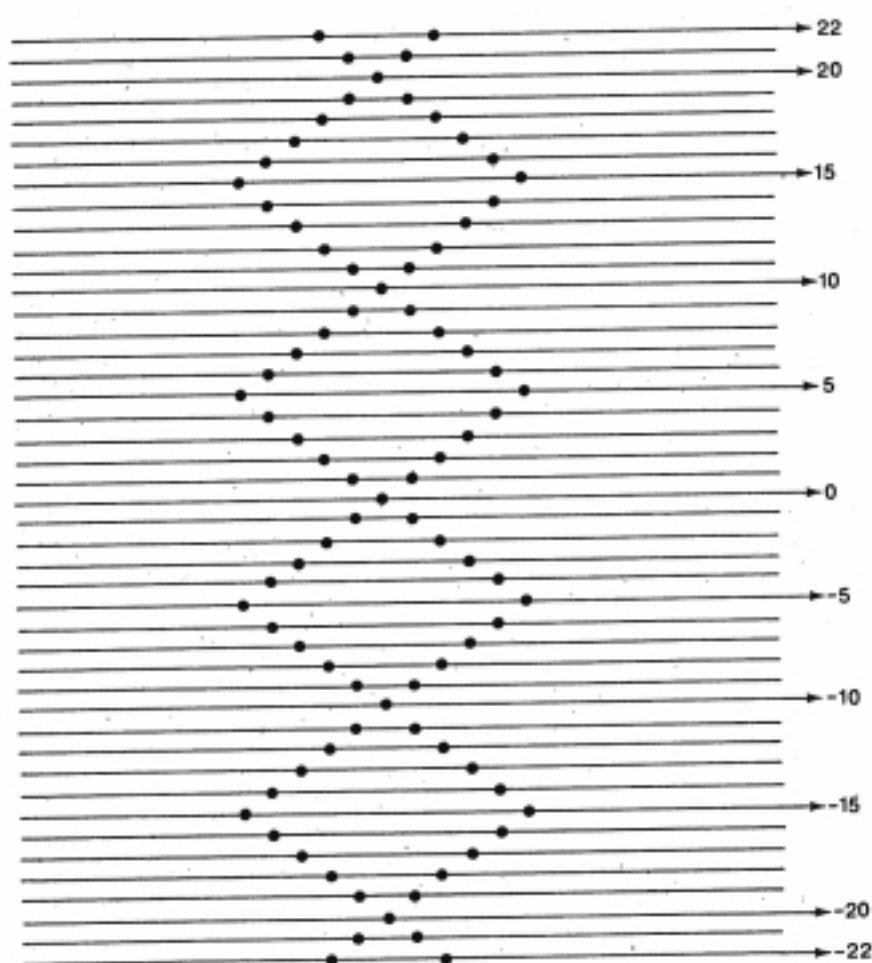
ὅπου $\left[\frac{b}{\lambda} \right]$ ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος μικρότερος ἢ ἕσος τοῦ b/λ . Στὶς διευθύνσεις αὐτές οἱ μέγιστες τιμές εἶναι

$$\max \frac{\sin[(2M+1)\gamma]}{\sin\gamma} = 2M+1 \quad (17)$$

Τό μέγιστο εἶναι ἀνάλογο τοῦ κλήθους τῶν στροφῶν τῆς ἔλικας.

Σέ τυπικά πειράματα σκεδάσεως ἀκτῶν Χ ἀπὸ DNA ἔχουμε $\left[\frac{b}{\lambda} \right] = 22$. Συνεπώς ὑπάρχουν 45 τρόποι διαδόσεως καὶ δημιουργοῦν 44 ὁμοαξονικούς φωτεινούς κώνους (22 στή διεύθυνση $z > 0$ καὶ 22 στή διεύθυνση $z < 0$) καὶ ἓνα φωτεινὸ ἐπίπεδο γιὰ $z=0$. Τοποθετώντας ἓνα φωτογραφικὸ φιλμ κυλινδρικοῦ σχήματος παράλληλα μὲ τὴν ἔλικα τὴν ὁποία τοποθετοῦμε στὸν ἄξονα τοῦ κυλινδρικοῦ φιλμ παίρνουμε μιὰ φωτογραφία τοῦ σκεδασμένου πεδίου καὶ παρουσιάζει 45 φωτεινές γραμμές (τομές τῶν φωτεινῶν κώνων μὲ τὴν κυλινδρική ἐπιφάνεια τοῦ φιλμ). Πάνω σέ κά-

Θε μιά από τές φωτεινές αυτές γραμμές υπάρχουν δύο ή ένα φωτεινότερα σημεία που σχηματίζουν ένα ρόμβο ανά κάθε 10 γραμμές (βλέπε σχήμα 2).



Σχήμα 2

Στή συνέχεια θα μελετήσουμε τή συμπεριφορά του σκεδασμένου κέδου πάνω στους τρόπους διαδόσεως. Στις διευθύνσεις αυτές έχουμε

$$T = \sum_{t=0}^{N-1} e^{ikA \cos(\tau + \frac{2\pi t}{N}) - i2\pi \frac{\nu}{N} t} \quad (18)$$

Χρησιμοποιώντας την κυλινδρική ανάπτυξη

$$e^{i r \cos \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(r) e^{in\varphi} \quad (19)$$

του επίπεδου κύματος $e^{i r \cos \varphi}$ ή (18) δίνει

$$T = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(kA) e^{in\tau} R_n \quad (20)$$

μέ

$$R_n = \sum_{t=0}^{N-1} e^{i \frac{2\pi t(n-\nu)}{N}} \quad (21)$$

όπου J_n ή συνάρτηση Bessel n -τάξεως.

Στοιχειώδεις υπολογισμοί δίνουν

$$R_n = e^{i\pi(n-\nu)(1-\frac{1}{N})} \frac{\sin\pi(n-\nu)}{\sin\pi(\frac{n-\nu}{N})} \quad (22)$$

Τά μέγιστα του $\frac{\sin\pi(n-\nu)}{\sin\pi(\frac{n-\nu}{N})}$ συμβαίνουν όταν

$$\frac{n-\nu}{N} = m = \text{άκέραιος} \quad (23)$$

άπό όπου έχουμε

$$n = \nu + mN, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (24)$$

Η σχέση (24) είναι γνωστή στη βιβλιογραφία σαν "κανόνας έ -

κιλογής της Έλικας".

Ο κανόνας (24) επιλέγει τις τάξεις των συναρτήσεων Bessel που συνεισφέρουν στον ν-στό τρόπο διαδόσεως, π.χ. για τη φωτεινή γραμμή ν=4, με N=10 θα συνεισφέρουν οι συναρτήσεις Bessel τάξεως n=4,14,24,34,44,54,...,-6,-16,-26,-36,-46,...
Συνοπώς

$$T = N G_\nu, \quad \nu=0,\pm 1,\pm 2,\dots,\pm \left[\frac{b}{\lambda}\right] \quad (25)$$

όπου

$$G_\nu = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(kA) e^{in\tau} (-1)^{m(N-1)} \delta_{n,\nu+mN} \quad (26)$$

μέ $\delta_{n,\nu+mN}$ τό δ τοῦ Kronecker.

Στόν ν-στό τρόπο διαδόσεως ισχύει ότι

$$U_\nu \sim f(\hat{r}, \hat{x}) N(2M+1) G_\nu \frac{e^{ikr}}{r} \quad (27)$$

Όλη ή παραπάνω Μαθηματική ανάλυση βασίστηκε σέ ένα πολύ άπλοκουμένο πρότυπο. Στην πραγματικότητα δέν έχουμε άκομωμένα μιά μόνη έλικα αλλά πολλές παράλληλες διπλές έλικες. Ένας τυπικός στόχος DNA αποτελείται άπό έναν κύλινδρο ύψους 1 μm καί διαμέτρου 0,1 μm. Τό πλήθος των σημαντικών σκεδαστών σέ έναν τέτοιο πειραματικό στόχο βρίσκεται ως έξης:

$N=10$, $b=34\text{\AA}$, $a \sim 10\text{\AA}$ άριθμός σκεδαστών σέ μιά διπλή έλικα $\sim 6 \times 10^6$, διάμετρος στόχου $\sim 10^6\text{\AA}$, διάμετρος έλικας $\sim 20\text{\AA}$, άριθμός έλικων στό στόχο $\sim \frac{10^{12}}{4 \times 10^2} = \frac{10^{10}}{4}$. Άρα άριθμός σκεδαστών στόν στόχο $\sim 6 \times 10^6 \times \frac{10^{10}}{4} \sim 1,5 \times 10^{16}$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι τό χρησιμοποιούμενο πρότυπο απέχει πολύ της πραγματικότητας. Είναι όμως αξιοσημείωτο ότι τό άπλό αυτό πρότυπο έξηγεύ πλήρως την ποιοτική ανάλυση τοῦ προβλήματος. Στη συνέχεια θα έξηγηθεε ή προέλευση των φωτεινών σημείων τά-

νω στίς γραμμές που δημιουργούν οι τρόποι διαδόσεως. Όπως είδαμε προηγουμένως τα θετικά αυτά σημεία είναι υπεύθυνα για τη δημιουργία του ρομβοειδούς σχήματος.

Από τον κανόνα επίλογής (24) και τη σχέση

$$i^{-n} J_{-n}(x) = i^n J_n(x) \quad (28)$$

έχουμε τα εξής

Για $v=0$, δηλαδή τον έκφυλισμένο σε επίπεδο κώνο, έχουμε

$$n = 10m, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (29)$$

και άρα

$$G_0 = J_0(kA) + 2J_{10}(kA)\cos(10\tau) + \dots \quad (30)$$

Για $v=1$, δηλαδή τον πρώτο θετικό κώνο, έχουμε

$$n = 1+10m, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (31)$$

και άρα

$$G_1 = J_1(kA)e^{i\tau} + J_9(kA)e^{i9\tau} + \dots \quad (32)$$

Για $v=2$, δηλαδή το δεύτερο κώνο, έχουμε

$$n = 2+10m, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (33)$$

και άρα

$$G_2 = -J_2(kA)e^{i2\tau} + \dots \quad (34)$$

Για τις υπόλοιπες τιμές του v έχουμε

$$v=3, \quad n=3+10m, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (35)$$

$$G_3 = -J_3(kA)e^{i3\tau} + \dots \quad (36)$$

$$v=4, \quad n=4+10m, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (37)$$

$$G_4 = J_4(kA)e^{i4\tau} + \dots \quad (38)$$

$$v=5, \quad n=5+10m, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (39)$$

$$G_5 = J_5(kA)ie^{i5\tau} - J_5(kA)ie^{-i5\tau} + \dots \quad (40)$$

$$v=6, \quad n=6+10m, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (41)$$

$$G_6 = -J_4(kA)e^{-i4\tau} + \dots \quad (42)$$

$$v=7, \quad n=7+10m, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (43)$$

$$G_7 = J_3(kA)ie^{-i3\tau} + \dots \quad (44)$$

$$v=8, \quad n=8+10m, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (45)$$

$$G_8 = J_2(kA)i^{-i2\tau} + \dots \quad (46)$$

$$v=9, \quad n=9+10m, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (47)$$

$$G_9 = -J_1(kA)ie^{-i\tau} + \dots$$

$$v=10, \quad n=10+10m, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (48)$$

$$G_{10} = J_0(kA) + \dots \quad (49)$$

$$v=11, \quad n=11+10m, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (50)$$

$$G_{11} = -J_1(kA)ie^{i\tau} + \dots \quad (51)$$

$$v=12, \quad n=12+10m, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (52)$$

$$G_{12} = J_2(kA)e^{i2\tau} + \dots \quad (53)$$

καί τά λοιπά.

Πάνω στό φωτογραφικό φύλμ άποτυπώνεται τό $|G_v|^2$ κού εζ-
 ναι άνάλογο μέ τήν ένέργεια τοϋ σκεδασμένου πεδίου.

Ό άσυμπτωτικός τύπος κού δύνει τά πρωτεύοντα μέγιστα τών
 συναρτήσεων Bessel εζναι

$$x_n \sim n + 0,8086165 \frac{1}{n^3} + \dots \quad (54)$$

όπου x_n τό σημείο κού ή J_n έχει τή μέγιστη τιμή της. Οί συ-
 ναρτήσεις τοϋ Bessel έχουν άπειρα τοπικά μέγιστα στό πρώτο δ-
 μως άπό αυτά παρουσιάζουν τή μεγαλύτερη τιμή. Μποροϋμε συνε-
 πώς σέ πρώτη προσέγγιση νά θεωρήσουμε μόνο τό πρωτεϋον μέγλι-
 στο της συναρτήσεως Bessel μικρότερης τάξεως. Συνεπώς θά έ-
 χουμε

$$\begin{aligned} |G_0|^2 &= |G_0|^2 = |J_0(x_0)|^2 \\ |G_1|^2 &= |G_9|^2 = |J_1(x_1)|^2 \\ |G_2|^2 &= |G_8|^2 = |J_2(x_2)|^2 \\ |G_3|^2 &= |G_7|^2 = |J_3(x_3)|^2 \\ |G_4|^2 &= |G_6|^2 = |J_4(x_4)|^2 \\ |G_5|^2 &= |J_5(x_5)|^2 \end{aligned} \quad (55)$$

δηλαδή θά έχουμε μιá επανάληψη κάθε 10 κώνους, μέ κατοπτρική
 συμμετρία στις φωτεινές γραμμές ± 5 καί ± 15 .

Τά φωτεινά λοιπόν σημεία πάνω στις γραμμές τοϋ σχήματος
 2 άντιπροσωπεϋουν τά πρωτεύοντα μέγιστα τών άντιστοιχων συ-
 ναρτήσεων Bessel. Στις γραμμές $v=0, \pm 10, \pm 20$ έχουμε ένα μό-

νο φωτεινό σημείο, στο σημείο O , σε όλες τις άλλες περιπτώσεις έχουμε δύο φωτεινά σημεία που αντιστοιχούν στα $\pm x_n$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι το σχήμα των διαδοχικών ρόμβων που παρατηρείται στο κειραματικό φωτογραφικό φιλμ δημιουργείται από τα κρωτεύοντα μέγιστα της μικρότερης τάξεως συναρτήσεως του Bessel από αυτές που καθορίζει ο κανόνας επίλογής της έλικας.