Author: Σ. Κοννιάς

Title: Ιστορική αναδρομή στις Πιθανότητες

Abstract: Παρουσίαση της έννοιας πιθανότητα από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα

Creator: HDML

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Στρατῆ Κουνιᾶ
Καθηγητῆ Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

Ἡ Θεωρία Πιθανοτήτων σάν ἐπιστήμη, ὅπως ἔχει ἐξελιχθεῖ σήμερα, εἶναι γενικά παραδεχτό ὅτι ἔχει τίς πηγές της στό δέκατο ἕβδομο αἰώνα. Τά ὀνόματα Pascal, Fermat, Huygens συνδέονται μέ τήν ἀρχή αὐτῆς τῆς περιόδου ἀνάπτυξης τῶν Πιθανοτήτων.

Ἡ λέξη "πιθανότητα" δέν εἶχε πάντα τήν ἔννοια πού τῆς δίνουμε σήμερα καί διάφορες ἄλλες λέξεις (τύχη, γνώμη) χρησιμοποιήθηκαν γιά νά ἐκφράσουν τό ἴδιο φαινόμενο. Ἀκόμη καί σήμερα ἀκοῦμε ἀνθρώπους νά μιλᾶνε μέ φράσεις ὅπως: "Εἶχε μία ἀπίθανη συνάντηση", "Εἶναι πολύ πιθανό νά βρέξει αὔριο", "Τό πιθανότερο εἶναι ὅτι ὁ Κώστας ἔχει ἄδικο" κ.τ.λ.

Ἐκεῖνο πού μᾶς κάνει νά λέμε ὅτι στό δέκατο ἕβδομο αἰώνα ἀρχίζει ἡ ἀνάπτυξη τῶν πιθανοτήτων εἶναι ὅτι, τότε ἄρχισαν συστηματικά νά ἀντιστοιχοῦν ἀριθμούς στίς πιθανότητες διαφόρων γεγονότων. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες πού εἶχαν ἀσχοληθεῖ πολύ μέ τά Μαθηματικά δέν ἀσχολήθηκαν μέ τίς Πιθανότητες σάν Μαθηματική ἐπιστήμη.

Ὁ Ἀριστοτέλης, στή λογική του καί στό βιβλίο Ι τῶν Ἀναλυτικῶν, κάνει διάκριση μεταξύ τῶν λέξεων "γνώση" καί "γνώμη". Ἔτσι, ἡ λέξη γνώση ἀφορᾶ σέ κάτι πού εἶναι σωστό ἢ εἶναι λάθος ἐνῶ ἡ λέξη γνώμη ἀφορᾶ σέ αὐτό πού μπορεῖ νά εἶναι σωστό ἢ μπορεῖ νά εἶναι λάθος.

Ἕνα ἄτομο δέν μπορεῖ νά ἔχει ταυτόχρονα γνώση καί γνώμη γιά τό ἴδιο πράγμα, ἐνῶ ἡ γνώμη τοῦ ἀτόμου γιά κάτι δέν παραμένει ἡ ἴδια.

Ἡ σημερινή θεωρία Πιθανοτήτων μελετᾶ ἀκριβῶς τά φαινόμενα γιά τό ἀποτέλεσμα τῶν ὁποίων δέν εἴμαστε βέβαιοι (δέν ἔχουμε γνώση ἀλλά ἔχουμε γνώμη γιά τό φαινόμενο).

Ἐπίσης στό βιβλίο II τῆς Φυσικῆς ὁ Ἀριστοτέλης γράφει γιά τό τυχαῖο καί τό ἀπροσδόκητο. Ἐκεῖ κριτικάρει τούς προηγούμενους Φυσικούς πού δέν παραδέχονταν τά τυχαῖα γεγονότα. Γιά παράδειγμα ἀναφέρει τόν Ἐμπεδοκλῆ πού παρ'ὅτι δέν παραδέχεται τό τυχαῖο, ὅμως στήν Κοσμογονία του γράφει ὅτι ὁ ἀέρας δέν πάει πάντα στίς ὑψηλότερες περιοχές παρά μπορεῖ νά πάει ἐκεῖ κατά τύχη.

Ἐπίσης ἀναφέρει ὅτι ἄλλοι παραδέχονται ὅτι ἡ τύχη εἶναι αἰτία ἀλλά δέν μπορεῖ νά τήν συλλάβει ὁ ἀνθρώπινος νοῦς διότι εἶναι κάτι τό θεϊκό καί γεμάτο μυστήριο.

Στό ἴδιο βιβλίο, ὁ Ἀριστοτέλης, δίνει τό παρακάτω παράδειγμα: Ἕνας ἄνθρωπος συγκεντρώνει συνδρομές γιά μία γιορτή, πάει σέ ἕνα μέρος γιά ἕνα ἄλλο σκοπό καί ἐκεῖ τυχαῖα συγκεντρώνει χρήματα γιά τή γιορτή, χωρίς αὐτό νά τό εἶχε προβλέψει.

Τέλος στίς "Σύντομες μελέτες γιά τή Φύση" καί στή μελέτη "Πρόβλεψη ἀπό τά ὄνειρα", γράφει ὅτι ὅλα τά ὄνειρα πού ἀποκαλοῦνται προφητικά, δέν στέλνονται ἀπό τό θεό καί δέν εἶναι τίποτα ἄλλο παρά συμπτώσεις. Ἔτσι, αὐτοί πού χρησιμοποιοῦν τά ὄνειρα γιά νά προβλέψουν τό μέλλον, ἔχουν πολλές φορές ἐπιτυχίες πού ὀφείλονται στήν τύχη. Αὐτούς τούς παρομοιάζει μέ τά ἄτομα πού παίζουν μονά-ζυγά πού στηρίζονται στήν ἀρχή: "Ἄν παίξεις πολλές φορές, θά ἀλλάξει ἡ τύχη σου".

Ἀκόμα καί τούς Πυθαγόριους (572-500 π.Χ.), πού σέ κάθε τί

ἀντιστοιχοῦσαν ἕναν ἀριθμό, φαίνεται ὅτι οἱ πιθανότητες διάφορων φαινομένων δέν τούς ἀπασχόλησαν.

Ἔτσι, φθάνουμε στήν Ἀναγέννηση, πού οἱ Φυσικές ἐπιστῆμες ἀναπτύχθηκαν πολύ καί πού ἡ παρατήρηση καί τό πείραμα ἀπόκτησαν μεγάλη σπουδαιότητα. Τότε ἄρχισε καί ἡ ἀνάπτυξη τῆς θεωρίας Πιθανοτήτων.

Ἡ γενική ἀντίληψη εἶναι ὅτι, στά τυχερά παιχνίδια ὀφείλεται ἡ ἀνάπτυξη τῆς θεωρίας Πιθανοτήτων. Τό περίεργο εἶναι ὅτι τυχερά παιχνίδια ὑπῆρχαν καί στήν ἀρχαιότητα. Ὁ Gerolano Cardano (1501-1576) στό βιβλίο του "Liber de Ludo Aleae" (Τό βιβλίο τῶν τυχερῶν παιχνιδιῶν), γράφει ὅτι τά τυχερά παιχνίδια τά ἀνακάλυψε (ὅπως λένε) ὁ Παλαμήδης στή διάρκεια τοῦ Τρωϊκοῦ πολέμου (1200 π.Χ.), γιά νά περνοῦν τήν ὥρα τους οἱ στρατιῶτες στή δεκάχρονη διάρκεια τῆς πολιορκίας.

Τό χαρτοπαίγνιο ἀνακαλύφθηκε στή Γαλλία τό 1300-1400μ.Χ Ἐπίσης τά τυχερά παιχνίδια ἦταν πολύ διαδομένα τήν Ρωμαϊκή ἐποχή, μάλιστα ὑπῆρχαν καί ἀπαγορευτικοί νόμοι. Παρ'ὅλα αὐτά, οἱ πιθανότητες δέν ἀναπτύχθηκαν νωρίτερα. Ἴσως θά πρέπει νά ἀποδώσουμε τήν ἀνάπτυξη τῆς θεωρίας Πιθανοτήτων, στήν Ἀναγέννηση, στό γεγονός, ὅτι ἀπό τό δέκατο τέταρτο αἰώνα ἄρχισαν νά λειτουργοῦν οἱ πρῶτες ναυτικές ἀσφαλιστικές ἑταιρεῖες καί οἱ καπιταλιστικές σχέσεις παραγωγῆς. Τό κόστος τῶν ἀσφάλιστρων στηρίζεται στήν πιθανότητα νά φτάσει τό φορτίο στόν προορισμό του (πειρατεία, βούλιαγμα καραβιοῦ κ.λ.π.).

Πάντως ἡ ἀνάπτυξη τῆς κεφαλαιοκρατικῆς κοινωνίας συνέπεσε μέ τή θεμελίωση τῆς θεωρίας Πιθανοτήτων καί ὅπως θά δοῦμε οἱ πιθανότητες ἐφαρμόστηκαν σέ πολλούς τομεῖς (δημογραφία, δικαιοσύνη, ἀσφάλιστρα, λαχεῖα κλπ.).

Οἱ πρῶτοι ὑπολογισμοί

Ἀπό τά πρῶτα προβλήματα πού μπορεῖ νά θεωρηθοῦν προβλήματα πιθανοτήτων εἶναι ὁ ὑπολογισμός τῶν δυνατῶν περιπτώσεων, ὅταν ρίχνουμε μερικά ζάρια. Σ'ἕνα Λατινικό ποίημα,"De Vetula", πού ἀποδίδεται στόν Richard de Fournival (1200-1250), ὑπολογίζεται σωστά πόσες δυνατές περιπτώσεις ὑπάρχουν ὅταν ρίξουμε τρία ζάρια.

Γιά ἀρκετό χρονικό διάστημα ὁ ὑπολογισμός ὅλων τῶν δυνατῶν περιπτώσεων γινόταν λαθεμένα.

Τό 1307-1321 γράφτηκε ἀπό τόν Dante Aliglieri "Ἡ ἅγια κωμωδία" πού ἀναφέρει καί τό ρίψιμο ζαριῶν. Τό 1477 ὁ Benvenuto d'Imola σχολιάζοντας τό σημεῖο αὐτό ὑπολογίζει ὅτι, ὅταν ρίξουμε τρία ζάρια ὑπάρχει μία περίπτωση νά πάρουμε ἄθροισμα τρία (τρεῖς ἄσσοι) καί μία νά πάρουμε ἄθροισμα τέσσερα (ἕνα διπλό καί δύο ἄσσοι). Ἔκανε λάθος στόν ὑπολογισμό τοῦ 4 διότι ὑπάρχουν τρεῖς περιπτώσεις: (1,1,2),(1,2,1),(2,1,1), δέν ξεχώρισε τίς διαφορετικές διατάξεις.

Τό πρόβλημα, πού πραγματικά θεωρεῖται σάν ἡ ἀρχή τῆς μελέτης τῶν πιθανοτήτων, εἶναι τό παρακάτω πρόβλημα τῆς διαίρεσης τοῦ στοιχήματος.

Ὁ Luca dal Borgo ἤ Pacioli στό βιβλίο του "Summa de Arithmetica Geometrica, Proportioni et Proportionalita", πού τυπώθηκε τό 1494 στή Βενετία, γράφει:

i) Δύο ὁμάδες παίζουν μπάλα καί κερδίζει τό παιχνίδι ἡ ὁμάδα πού σημειώνει πρώτη 60 σημεῖα. Τό στοίχημα εἶναι 22 ducats (11 κάθε ὁμάδα). Ὅταν ἡ μία ὁμάδα ἔχει 50 σημεῖα καί ἡ ἄλλη 30 ἀναγκάζονται νά σταματήσουν τό παιχνίδι. Πῶς πρέπει νά μοιράσουν τό στοίχημα; .

ii) Τρεῖς συναγωνίζονται μέ τόξο στή σκοποβολή. Ὅποιος ἔλθει πρῶτος 6 φορές κερδίζει. Ὁ καθένας στοιχηματίζει 10 du-

cats. Όταν ὁ πρῶτος ἔχει 4, ὁ δεύτερος 3 καί ὁ τρίτος 2 καλύτερες βολές, ἀποφασίζουν νά σταματήσουν. Πῶς θά διαιρέσουν τό στοίχημα;

Ὁ Pacioli γιά τό πρῶτο πρόβλημα λέει ὅτι ἡ διαίρεση πρέπει νά γίνει ἀνάλογα μέ τό 50:30 (δηλαδή $\frac{22\times50}{80} = 13\frac{3}{4}$ ducats ἡ πρώτη ὁμάδα, $\frac{22\times30}{80} = 8\frac{1}{4}$ ducats ἡ ἄλλη).

Ὁ Cardano, πού ἦταν γιατρός καί Μαθηματικός, στό παραπάνω βιβλίο του πού ὁ ἴδιος λέει τό ἔγραφε τό 1526 (25 ἐτῶν), ἀνακαλύφθηκε μετά τό θάνατό του τό 1576 καί τυπώθηκε τό 1663, ἀσχολεῖται μέ διάφορα προβλήματα τῶν τυχερῶν παιχνιδιῶν.

Ὑπολογίζει σωστά ὅλες τίς περιπτώσεις στό ρίψιμο δύο ζαριῶν καί ὅτι ὅταν ρίχνουμε τρία ζάρια ὑπάρχουν 216 περιπτώσεις. Ἐκεῖ ὑπολογίζει σωστά ὅτι σέ τρεῖς περιπτώσεις παίρνουμε ἄθροισμα 4, σέ 27 περιπτώσεις παίρνουμε ἄθροισμα 10 καί σέ 25 περιπτώσεις παίρνουμε ἄθροισμα 9. Ἐπίσης κάνει χρήση τοῦ προσθετικοῦ νόμου γιά ἀσυμβίβαστα γεγονότα καί τοῦ πολλαπλασιαστικοῦ νόμου γιά ἀνεξάρτητα γεγονότα. Τέλος, μέ τήν ἰδέα τῆς μέσης τιμῆς, εἰσήγαγε αὐτό πού ξέρουμε σήμερα σάν δίκαια τυχερά παιχνίδια.

Πιό σημαντική εἶναι ἡ παρατήρηση τοῦ Cardano ὅτι, ὅταν ἔχουμε μικρό ἀριθμό ρίψεων ἡ συχνότητα μέ τήν ὁποία ἐμφανίζονται διάφορα γεγονότα διαφέρει πολύ ἀπό τήν ἀντίστοιχη πιθανότητα, ὅμως ἡ συχνότητα αὐτή διαφέρει ἐλάχιστα ἀπό τήν ἀντίστοιχη πιθανότητα γιά μεγάλο ἀριθμό ρίψεων. Ἔτσι ὁ Cardano εἶχε σαφή ἀντίληψη γιά τίς ἐπιπτώσεις τοῦ νόμου τῶν μεγάλων ἀριθμῶν πού ἀνακαλύφθηκε 200 χρόνια ἀργότερα ἀπό τόν J.Bernoulli.

Γιά τό πρόβλημα τῆς διαίρεσης τοῦ στοιχήματος, σ'ἕνα ἄλλο βιβλίο του "Practica arithmetica generalis" (1539), ὁ Cardano διαφωνεῖ μέ τόν Paccioli. Ἰσχυρίζεται σωστά, ὅτι πρέπει νά λάβουμε ὑπ'ὄψη μόνο τόν ἀριθμό τῶν παιχνιδιῶν πού ὑπολεί-

πονται. Δίνει ὅμως τήν λαθεμένη λύση ὅτι ἡ μοιρασιά πρέπει νά γίνει ἀνάλογα μέ τό

$$\frac{(1+2+\ldots+(60-50))}{(1+2+\ldots+(60-30))} = \frac{55}{465} = \frac{11}{93}$$

Ὁ Nicolo Tartaglia (1499-1557), στό βιβλίο του "Trat - tato generale di numeri e misure", πού ἐκδόθηκε στή Βενε - τία τό 1556, ἀσχολεῖται καί μέ τό πρόβλημα τοῦ στοιχήματος. Δίνει τή λύση: 50-30=20, $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$, $\frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$.

Ἡ ὁμάδα A παίρνει $11 + 3\frac{2}{3} = 14\frac{2}{3}$ ducats καί ἡ B παίρ νει $11-3\frac{2}{3} = 7\frac{1}{3}$ ducats. Δηλαδή κάνει τή διαίρεση ἀνάλογα μέ τή διαφορά τῶν παιχνιδιῶν πού ἔχουν κερδίσει οἱ δύο ὁ- μάδες.

Τό 1558 ὁ G.F.Pevorone, στήν ἐργασία του "Due Brevit e Facili Trattati, il Primo d'Arithmetica, l'Altro di Geome- tria", κάνει τό σωστό συλλογισμό γιά ἕνα παρόμοιο πρόβλημα: ""Αν ὁ A ἔχει κερδίσει 7 καί ὁ B ἐννέα παιχνίδια ἐνῶ χρειά ζονται 10 νίκες πῶς πρέπει νά μοιρασθεῖ τό στοίχημα;".

Παρ'ὅτι κάνει τό σωστό συλλογισμό δίνει τήν ἀπάντηση 1:6 ἀντί γιά 1:7, ἦταν λίγο ἄτυχος.

Τήν πλήρη λύση τῆς ἀπαρίθμησης ὅλων τῶν περιπτώσεων στό παιχνίδι τῶν τριῶν ζαριῶν τήν ἔδωσε ὁ Galileo Galilei (1564-1642) στήν ἐργασία του "Considerazione sopra il Giu- so dei Dadi" πού δημοσιεύθηκε τό 1718 στήν Φλωρεντία.

Στό πρόβλημα: "Τί εἶναι πιθανότερο, νά πάρω ἄθροισμα 10 ρίχνοντας τρία ζάρια ἤ νά πάρω ἄθροισμα 9";

Δίνει τή σωστή ἀπάντηση P(10):P(9)=27:25 καί ἰσχυρί - ζεται ὅτι αὐτό ἐπαληθεύεται ἀπό τήν ἐμπειρία (αὐτό φαίνε- ται παράλογο), μέχρι τότε ἔλεγαν ὅτι P(10):P(9)=1.

Μέ τήν ἀνακάλυψη τοῦ τηλεσκοπίου ἄρχισαν οἱ παρατηρή- σεις τῶν ἀστέρων καί τόν Galileo τόν ἀπασχόλησε τό πρόβλη-

μα τῶν σφαλμάτων στίς παρατηρήσεις. Παρατήρησε ὅτι: Τά σφάλματα εἶναι μοιρασμένα συμμετρικά γύρω ἀπό τό μηδέν, ὅτι ἡ πιθανότητα μικραίνει ὅσο τά σφάλματα μεγαλώνουν καί ὅτι οἱ πιό πολλές παρατηρήσεις εἶναι γύρω ἀπό τήν ἀληθινή τιμή. Ἀργότερα αὐτή ἡ κατανομή ἔγινε γνωστή σάν ἡ κατανομή τοῦ Gauss ἤ κανονική κατανομή πού παίζει ἴσως τό σπουδαιότερο ρόλο στίς πιθανότητες.

Τήν ἴδια παρατήρηση ἔκανε ὁ ἀστρονόμος Lambert ἑκατό χρόνια ἀργότερα (1765).

Pascal - Fermat - Huygens

Συστηματικά ἄρχισαν νά ἀσχολοῦνται μέ τίς Πιθανότητες ἀπό τήν ἐποχή τῶν Blaise Pascal 1623-1662, Pierre Fermat(1601-1665) καί Christiaan Huygens (1629-1695). Οἱ δύο πρῶτοι ἦσαν Γάλλοι καί ὁ τρίτος Ὁλλανδός.

Ἕνας φίλος τοῦ Pascal, ὁ Chevalier de Mērē (1607 - 1684) πού ἦταν Γάλλος εὐγενής, τοῦ ἔθεσε τό πρόβλημα τῆς διαίρεσης τοῦ στοιχήματος.

Σ' ἕνα γράμμα του στόν Fermat στίς 29 Ἰουλίου 1654 γράφει γιά τή λύση τοῦ προβλήματος τῆς διαίρεσης τοῦ στοιχήματος:

Δύο παῖκτες στοιχηματίζουν ἀπό 32 πιστόλια καί τά κερδίζει αὐτός πού θά κερδίσει πρῶτος τρία παιχνίδια. Ἄν σταματήσουν τό παιχνίδι ὅταν ὁ A κερδίσει δύο παιχνίδια καί ὁ B ἕνα, πῶς θά μοιράσουν τό στοίχημα;

Συλλογισμός τοῦ Pascal. Ἄν ὁ A κερδίσει ἄλλο ἕνα παίρνει τά 64 πιστόλια 32+32=64, ἄν χάσει ὅμως ἕνα, τότε εἶναι στήν ἴδια κατάσταση μέ τόν B, ὁπότε παίρνει τά δικά του 32. Ἔτσι ὁ A παίρνει 32+16=48 καί ὁ B 32-16=16. Ἄν τά παιχνίδια εἶναι 2-0, τότε ἤ θά πάρει τά 64 ἤ ἄν κερδίσει ὁ B στό ἐ-

πόμενο παιχνίδι θά μοιρασθοῦν 48 μέ 16. Ἔτσι ὁ Α πρέπει νά πάρει 32+16+8=56 καί ὁ Β 8.

Τέλος ἄν τά παιχνίδια εἶναι 1-0, τότε ἄν κερδίσει ὁ Α παίρνει 32+24=56 ἐνῶ ἄν χάσει παίρνει 32 ἔτσι ὁ Α πρέπει νά πάρει $32 + \frac{24}{2} = 44$ καί ὁ Β 20.

Ὁ Fermat στήν περίπτωση πού ὁ Α ἔχει 2 παιχνίδια καί ὁ Β 3 ὅσο νά τελειώσει δίνει τή λύση 11:5, διότι λέει ὅτι τό παιχνίδι θά τελειώσει τό πολύ σέ 4 παιχνίδια.

Ὑπάρχουν 16 περιπτώσεις (+ὁ Α κερδίζει, -ὁ Β)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
+	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-	-	-	-	+	-
+	+	+	-	+	+	-	+	-	+	-	-	-	+	-	-
+	+	-	+	+	-	+	+	-	-	+	-	+	-	-	-
+	-	+	+	+	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-

Στίς 11 κερδίζει ὁ Α καί στίς 5 ὁ Β.

Ἀργότερα, τό 1653, ἀνακάλυψε ὁ Pascal τό ἀριθμητικό τρίγωνο πού δίνει οὐσιαστικά τούς συνδυασμούς $\binom{n}{k}$ γιά n=0,1,2, ... καί k=0,1,...,n

1	1	1	1	1	1	.	.
1	2	3	4	5	.	.	
1	3	6	10	.	.		
1	4	10	.	.			
1	5	.	.				
1	.						

μέ τή βοήθεια τοῦ ὁποίου ἔλυσε τό γενικό πρόβλημα τοῦ στοιχήματος. Ἄν τοῦ Α λείπουν m παιχνίδια καί τοῦ Β n, τότε

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\binom{m+n-1}{0}+\ldots+\binom{m+n-1}{n-1}}{\binom{m+n-1}{0}+\ldots+\binom{m+n-1}{m-1}}$$

π.χ. m=2, n=3 m+n-1=4, $\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{1+4+6}{1+4} = \frac{11}{5}$

Ὁ Pascal τό 1646 (22 ἐτῶν) ἔγινε πολύ θρῆσκος (Ταυσενικός πού πίστευε ὅτι μερικοί ἄνθρωποι γεννιοῦνται εὐλογημένοι οἱ ἄλλοι ὄχι) καί παρέσυρε ὅλη τήν οἰκογένειά του στή θρησκεια.

Ἡ ἀδελφή του πῆγε καλόγρια τό 1651 καί ὁ Pascal κλείστηκε στό μοναστήρι Port-Royal στίς 23 Νοεμβρίου 1654. Ὁ Pascal ἐπίσης, χρησιμοποιώντας αὐτό πού σήμερα λέμε θεωρία ἀποφάσεων, ἔγραφε γιά τήν ὕπαρξη τοῦ θεοῦ. Τό 1662 πέθανε σέ ἡλικία 39 ἐτῶν.

Σ'ἕνα γράμμα τοῦ de Mēré ἀναφέρεται ἡ ἱστορία: Ταξίδευαν στό Poitou, ὁ Duke of Roannez ὁ de Mēré καί ὁ Damien Mitton. Ὁ Roannez εἶχε μαζί του καί ἕνα μεσήλικα πού δέν ἤξερε τίποτα ἄλλο παρά Μαθηματικά. Στό ταξίδι αὐτό τῶν τριῶν ἡμερῶν ὁ μεσήλικας ἄκουσε τόσα πολλά γιά τήν ζωή ὥστε ἀποφάσισε νά ἐγκαταλείψει τά Μαθηματικά. Συμπερένεται ὅτι ὁ ἄγνωστος ἦταν μᾶλλον ὁ Pascal.

Τό πρῶτο πρόβλημα πού ρώτησε ὁ de Mēré τόν Pascal ἦταν: Ρίχνοντας δύο ζάρια πόσες προσπάθειες χρειάζονται γιά νά πάρω ἕνα τουλάχιστο (6,6) μέ πιθανότητα $\frac{1}{2}$;

Ὁ Mēré ἰσχυρίζεται ὅτι ἡ θεωρητική τιμή εἶναι n=24 ἄν καί ἡ πράξη δείχνει n=25.

Ὁ Pascal ἔδωσε σωστά,

$$\frac{P(24)}{P(25)} = \frac{491}{505}$$

Ὁ de Moivre ἔδωσε 60 χρόνια ἀργότερα ἀσημπτωτικά $n=(\ln 2)N$ ὅπου N ὁ συνολικός ἀριθμός τῶν περιπτώσεων, ἐδῶ N=36.

Τό πρῶτο βιβλίο στίς πιθανότητες τό ἔγραφε ὁ C.Hyugens (1629-1695) τό 1657, "De Ratio ciniis in Ludo Aleae", αὐτό γράφτηκε στά Ὁλλανδικά καί μεταφράστηκε στά Λατινικά ἀπό τόν

Van Schooten.

Ὁ Huygens εἶχε ἀκούσει γιά τά προβλήματα αὐτά στό Παρίσι τό 1655, ὅταν πῆγε γιά νά πάρει ἕνα τιμητικό διδακτορικό στά νομικά, ἀλλά δέν γνώριζε τήν ἀλληλογραφία Pascal-Fermat.

Γιά 60 χρόνια, μέχρι τό 1700 χρησιμοποιόταν σάν τό βιβλίο γιά τίς πιθανότητες.

Ὁ Huygens ἔδωσε τή σωστή λύση στό πρόβλημα τοῦ στοιχήματος καί ἡ κύρια ἰδέα του ἦταν ἡ ἔννοια τῆς μέσης τιμῆς καί ὄχι ἡ ἔννοια τῆς πιθανότητας. Τότε ἡ Ὁλλανδία ἦταν στή πλήρη της ἀνάπτυξη ἐμπορική καί τραπεζική. Ἔλεγε ὁ Huygens "τιμή τῆς τύχης" γιά τή μέση τιμή.

Προτείνει ἐπίσης στό βιβλίο του πέντε προβλήματα γιά λύση. Δύο ἀπό τά προβλήματα τοῦ τά πρότεινε ὁ Fermat καί ἕνα ὁ Pascal. Ὁ C.Huygens ἦταν σύγχρονος τοῦ Newton καί ἀναγνωριζόταν σάν ἡ διάνοια τῆς ἐποχῆς.

Πολλοί μαθηματικοί τοῦ δέκατου ἕβδομου αἰώνα, A.de Moivre, J.Bernoulli, Pierre Remond de Montmort, ἀσχολήθηκαν μέ τά προβλήματα πού πρότεινε γιά λύση ὁ Huygens. Ὁ Spinoza(Ἑβραῖος Πορτογαλλικῆς καταγωγῆς πού κατέφυγε στήν Ὁλλανδία γιά νά γλυτώσει ἀπό διωγμούς), σ'ἕνα φυλλάδιο πού κυκλοφόρησε τό 1687, δέκα χρόνια μετά τό θάνατό του, δίνει λύση σ' ἕνα ἀπό τά προβλήματα αὐτά πού ἀναφέρεται σ'ἕνα παιχνίδι μέ τό ρίψιμο δύο ζαριῶν.

Ὁ Leibniz πού σπούδασε νομικά καί δέν τοῦ ἔδωσαν διδακτορικό στά νομικά, διότι ἦταν πολύ νέος (20 ἐτῶν) καί ἀμέσως τοῦ προσφέρθηκε νά γίνει καθηγητής νομικῶν ἀλλά ἀρνήθηκε, προσπάθησε ἀπό τό 1665, ὅταν ἦταν 19 ἐτῶν, νά ἀντιστοιχήσει πιθανότητες στούς διάφορους βαθμούς πίστης τῶν μαρτύρων στά δικαστήρια. Ἐπίσης ἔγραψε τό πρῶτο βιβλίο στή συνδυαστική τό 1666: "Dissertatio de Arte Combinatoria".

Τήν ἴδια ἐποχή ἄρχισαν νά κυκλοφοροῦν δημογραφικοί πίνακες. Ἀπό τό 1603 στό Λονδίνο κρατοῦσαν ἑβδομαδιαῖα δελτία γιά βαφτίσεις καί θανάτους καί τό 1662 ὁ John Graunt χρησιμοποίησε τούς πίνακες γιά νά μελετήσει τή συχνότητα τῶν θανάτων. Ἔστειλε ἕνα ἀντίγραφο στόν Huygens.

Τό 1671 οἱ Ὁλλανδοί van Hudden καί Jan de Witt συμβουλεύτηκαν τόν Huygens πάνω σέ ὁρισμένα προβλήματα στίς ἀσφάλειες ζωῆς. Στηριζόμενος στούς πίνακες τοῦ John Graunt ὑπολόγισε τή μέση διάρκεια ζωῆς ἑνός νεογέννητου σέ 18 ἔτη καί $2\frac{1}{2}$ μῆνες.

Τό 1663 στό Παρίσι ἀρχίζουν τή συλλογή στοιχείων. Αὐτά τά χρησιμοποιοῦσαν γιά νά γνωρίζουν τί φόρους θά μαζέψουν καί πόσοι μποροῦν νά πᾶνε στρατιῶτες.

Ἐπίσης ἄρχισαν νά χρησιμοποιοῦν τούς πίνακες γιά νά ὑπολογίσει ἡ πολιτεία πόσο στοιχίζει νά πουλήσει ἀσφάλεια ζωῆς στούς πολίτες. Ἤδη ἀσφάλεια πουλιόταν ἀπό τή Ρωμαϊκή ἐποχή. Ὁ Ρωμαῖος δικαστικός Ullpian τόν τρίτο αἰώνα ὅρισε ὅτι στά 20 πλήρωνες 30 δρχ. γιά νά πάρεις 1 δρχ. ἐφ' ὅρου ζωῆς, στά 60 πλήρωνες 7 δρχ.

Στήν Ἀγγλία τό 1540 ὑπῆρχε νόμος πού ἔλεγε ὅτι οἱ κρατικές ἀσφάλειες κόστιζαν 7 χρόνια, δηλαδή ἄν ζοῦσες 7 χρόνια ἔπαιρνες τά λεπτά σου πίσω.

Ἔδινες ἕνα ποσό A μία φορά καί κάθε χρόνο ἔπαιρνες τό ποσό $S = \frac{A}{7}$. Ὁ ἴδιος νόμος τοῦ 1540 ἔλεγε ὅτι γιά ζευγάρι ἡ ἀσφάλεια κοστίζει 14 χρόνια. Παίρνει τά χρήματα μέχρι νά πεθάνει καί ὁ δεύτερος.

Τό 1671 ἔγινε ἡ πρώτη σοβαρή προσπάθεια νά ὑπολογισθεῖ τό κόστος τῶν ἀσφάλιστρων ἀπό τόν Ὁλλανδό John de Witt.

Τά Μαθηματικά γιά τόν ὑπολογισμό τῶν ἀσφαλίστρων τράβηξαν τήν προσοχή τῶν Leibniz, Simpson, Euler.

Τό πρῶτο ὁριακό θεώρημα

Τό 1713 ἐμφανίστηκε, 8 χρόνια μετά τό θάνατο τοῦ συγγραφέα, τό βιβλίο:"Ars Conjectandi", μέ συγγραφέα τόν Ἑλβετό Jacques Bernoulli (1654-1705) πού ἦταν καθηγητής στήν Basel ἀπό τό 1687. Στήν ἀρχή σπούδασε θεολογία ἀλλά ἀπό τό 1682 μελετοῦσε τό λογισμό τοῦ Leibniz.

Ἐκεῖ ἀποδείχνεται αὐστηρά τό πρῶτο ὁριακό θεώρημα καί δίνεται ὁ τύπος γιά τή διωνυμική κατανομή.

$$P_{m,n} = \binom{n}{m} p^m q^{n-m} \quad (q=1-p)$$

Ἡ συγγραφή τοῦ βιβλίου διάρκεσε 20 χρόνια καί τό κύριο θεώρημα τό εἶχε ἀποδείξει ἀπό τό 1692. Ἔγραφε πολλές ἐργασίες καί τό βιβλίο ἐκδόθηκε ἀπό τόν ἀνηψιό του Nicholas τό 1713.

Τό κύριο θεώρημα εἶναι: Ἄν σέ n ἀνεξάρτητες προσπάθειες ἔχουμε m ἐπιτυχίες μέ πιθανότητα ἐπιτυχίας p σέ κάθε προσπάθεια, τότε γιά κάθε $\varepsilon, \eta > 0$ ἔχουμε

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) > 1-\eta \quad \text{γιά} \quad m > n_0(\varepsilon,\eta)$$

Δηλαδή ἡ συχνότητα $\frac{m}{n}$ πλησιάζει τή θεωρητική πιθανότητα p ὅταν ὁ ἀριθμός n τῶν προσπαθειῶν εἶναι μεγάλος. Αὐτό εἶναι σήμερα γνωστό σάν ὁ ἀσθενής νόμος τῶν μεγάλων ἀριθμῶν.

Τό βιβλίο τοῦ J. Bernoulli ἔχει τέσσερα μέρη. Στό πρῶτο μέρος βελτιώνει τό βιβλίο τοῦ Huygens πού γράφτηκε τό 1657, στό δεύτερο μέρος μελετᾶ τή συνδυαστική, στό τρίτο ἐφαρμόζει τά προηγούμενα σέ προβλήματα τυχερῶν παιχνιδιῶν καί στό τέταρτο μέρος ἀποδείχνει τόν νόμο τῶν μεγάλων ἀριθμῶν καί

προσπαθεῖ νά ἐφαρμόσει τή θεωρία Πιθανοτήτων στά οἰκονομικά, τήν ἠθική καί τήν πολιτική.

Ὁ προσθετικός νόμος τῶν Πιθανοτήτων P(A+B) = P(A)+P(B) γιά ἀσυμβίβαστα γεγονότα δέν ἐφαρμόζεται ἀπό τόν J.Bernoulli ἀντίθετα μάλιστα ὁ Bernoulli δέχεται ὅτι μπορεῖ νά ἔχουμε $P(A)+P(\bar{A}) > 1$, ὅπου $\bar{A}$ = συμπληρωματικό τοῦ A.

Τό πρόβλημα τῆς πτώχευσης τοῦ ἀντίπαλου

Ἕνας ἄλλος Μαθηματικός, ὁ Pierre-Remond Montmort (1678-1719), εἶχε πληροφορηθεῖ γιά τό ἔργο τοῦ J.Bernoulli καί νομίζοντας ὅτι δέν θά κυκλοφορήσει τό βιβλίο του, ἀφοῦ ὁ συγγραφέας εἶχε πεθάνει, ἔγραψε τό 1708 ἕνα βιβλίο γιά Πιθανότητες "Essai d'Analyse sur les Jeux de Hasard". Τό 1713 δημοσίευσε μία ἐργασία γιά τόν τυχαῖο περίπατο πού ἀποδείχνει ὅτι ἄν δύο παῖκτες A καί B ἔχουν α καί β δρχ. ἀντίστοιχα, τότε ἡ πιθανότητα νά χάσει ὅλα τά χρήματα ὁ B εἶναι

$$P_\beta = \frac{(\frac{p}{q})^a - 1}{(\frac{p}{q})^{a+b} - 1}$$

καί ἡ μέση διάρκεια τοῦ παιχνιδιοῦ $EN = \frac{\beta P_\beta - a P_a}{p-q}$ ὅπου $p \neq \frac{1}{2}$

ἡ πιθανότητα ἐπιτυχίας τοῦ A σέ κάθε παιχνίδι. Ὁ Montmort ἦταν καί ὁ ἐκπρόσωπος τοῦ Leibniz στή Βασιλική Ἑταιρεία τοῦ Λονδίνου πού γινόταν ἡ διαμάχη μεταξύ Leibniz καί Newton ποιός ἀνακάλυψε πρῶτος τό διαφορικό λογισμό. Ἐπίσης ὁ Montmort τό 1719 ὑπολόγισε τίς πιθανότητες $P_{a,n}$ καί $P_{\beta,n}$ νά τελειώσει τό παιχνίδι στήν n προσπάθεια στήν περίπτωση πού $p=q=\frac{1}{2}$. Ἡ γενική λύση γιά $p \neq q$ δόθηκε, χωρίς ἀπόδειξη, ἀπό τόν Nicholas Bernoulli, (1687-1759), σ'ἕνα γράμμα πού ἔστειλε στόν Montmort τό 1711. Μέ τόν ὑπολογισμό τῶν P_a, P_β,

ΕΝ, $P_{a,n}$, $P_{\beta,n}$ ἀσχολήθηκε καί ὁ Abraham de Moivre, ἀλλά τά ἀποτελέσματά του δημοσιεύθηκαν μερικούς μῆνες μετά τή δημοσίευση τῶν ἀποτελεσμάτων τοῦ Montmort.

Τό παράδοξο τῆς Πετρούπολης

Ὁ N. Bernoulli σπούδασε νομικά στό Basel καί ἔκανε ἐφαρμογές τῶν πιθανοτήτων στά νομικά, ἐπίσης ἦταν τό 1713, ὁ ἐκδότης τοῦ βιβλίου τοῦ θείου του καί ἀργότερα (1716-1719) ἔγινε Καθηγητής στό Πανεπιστήμιο τῆς Padua καί μετά τοῦ Basel. Αὐτός πρότεινε τό 1713 τό παρακάτω πρόβλημα στόν Montmort. Ἕνας παίκτης ρίχνει ἕνα νόμισμα ὅσαμε νά ἐμφανισθεῖ Κ (κεφαλή) γιά πρώτη φορά. Ἄν αὐτό συμβεῖ στήν n προσπάθεια παίρνει 2^n νομίσματα. Ποιό ποσό πρέπει νά πληρώσει ὁ Α,πρίν ἀρχίσει τό παιχνίδι, ὥστε νά θεωρεῖται τό παιχνίδι δίκαιο;

Μέ τό πρόβλημα αὐτό ἀσχολήθηκε ὁ ἄλλος ἀνηψιός τοῦ Jacques Bernoulli,ὁ Daniel Bernoulli (1700-1782), πού ἦταν καθηγητής στήν Πετρούπολη (1725-1733), καί τά δημοσίευσε τό 1738. Ἐπειδή ἡ μέση τιμή τοῦ κέρδους τοῦ Α εἶναι ∞ καί φάνηκε περίεργο γιά τήν ἐποχή, ὀνόμασαν τό παιχνίδι παράδοξο τῆς Πετρούπολης.

Τό 1733 γύρισε στό Basel, διαδέχτηκε στό Πανεπιστήμιο τόν πατέρα του Jean Bernoulli (1667-1748) ὁ ὁποῖος τό 1705 εἶχε διαδεχθεῖ τόν ἀδελφό του Jacques.

Ὑπῆρξαν καί ἄλλοι Μαθηματικοί τῆς οἰκογένειας Bernoulli καί ὅλοι τους ἄρχιζαν τήν σταδιοδρομία τους σάν ἔμποροι ἤ νομικοί ἤ γιατροί ἤ θεολόγοι ἀλλά κατέληγαν καθηγητές μαθηματικῶν στά διάφορα Πανεπιστήμια.

Τό παράδοξο τῆς Πετρούπολης ἀπασχόλησε καί ἄλλους μαθηματικούς τῆς ἐποχῆς ὅπως τούς Euler , D' Alembert,μάλιστα ὁ Daniel Bernoulli ὅρισε τήν ἠθική μέση τιμή, ὅρος πού δέν ὑ-

πάρχει σήμερα. Έτσι ἄν στήν i προσπάθεια ἔχουμε κέρδος c_i μέ πιθανότητα p_i, τότε ὅρισε τήν ἠθική μέση τιμή Z:

$$Z(\alpha) = \alpha\left(\prod_{i=1}^{\infty}\left(1+\frac{c_i}{\alpha}\right)^{p_i}-1\right)$$

ὅπου α τό ἀρχικό κεφάλαιο τοῦ Α.

Παρατηροῦμε ὅτι:

$$Z(\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i p_i + 0\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

καί γιά τό παράδοξο τῆς Πετρούπολης

$$Z(\alpha) = \prod_{K=1}^{\infty}(\alpha+2^K)^{2^{-K}} - \alpha$$

Έτσι $Z(0)=2$, $Z(10) \simeq 3$, $Z(1000) \simeq 6$ καί τό ποσό x, πού θά πρέπει νά πληρώσει ὁ Α γιά νά εἶναι τό παιχνίδι δίκαιο, θά εἶναι:

$$Z(\alpha-x) = x$$

Μέ τήν ἠθική μέση τιμή ἀσχολήθηκαν καί οἱ Laplace, Poisson, Lacroix καί ἄλλοι.

Τό δεύτερο ὁριακό θεώρημα

Ὁ Abraham de Moivre (1667-1754), πού ἦταν Ἄγγλος Γαλλικῆς καταγωγῆς καί μέλος τῶν ἀκαδημιῶν Λονδίνου, Παρισιοῦ, Βερολίνου, δημοσίευσε τό 1730 μία ἐργασία στήν ὁποία δείχνει ὅτι γιά τή διωνυμική κατανομή καί γιά $p=\frac{1}{2}$ θά ἔχουμε:

$$P\left(\frac{m}{n}-p \leq x.\sqrt{npq}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt$$

Ἐπίσης ὁ de Moivre ἔγραψε τό βιβλίο του "Doctrine of chances" ἐκδόθηκε τό 1718. Τήν ἀπόδειξη γιά $p \neq \frac{1}{2}$ τήν ἔδωσε, ὀγδόντα χρόνια ἀργότερα, ὁ Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) τό 1810. Αὐτό εἶναι τό δεύτερο ὁριακό θεώρημα πού εἶναι γνωστό σάν θεώρημα de Moivre-Laplace.

Ὁ de Moivre ἐπίσης δημοσίευσε καί 14-ψήφιο πίνακα τοῦ log(n!) γιά n=10(10)900. Ἡ προσέγγιση αὐτή ἀποδίδεται, ἴσως κατά λάθος στόν Stirling.

Ἐπίσης ὁ de Moivre στήν ἴδια ἐργασία τοῦ 1730 ὑπολόγισε ἀσφάλιστρα ζωῆς καί μάλιστα χρησιμοποίησε γιά τή διάρκεια ζωῆς τή συνεχή ὁμοιόμορφη κατανομή. Ὁ Thomas Simpson, (1710-1761), μελετώντας τήν κατανομή τῶν σφαλμάτων ἔκανε χρήση (1756) συνεχῶν κατανομῶν. Ἐπίσης ὁ Simpson ἔγραψε ἕνα βιβλίο στίς πιθανότητες:"The Nature and Lews of Chance", τό 1740 καί ἔκανε χρήση τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου στήν ἀνάλυση δεδομένων.

Δεσμευμένη πιθανότητα

Ἡ ἔννοια τῆς δεσμευμένης πιθανότητας ἦλθε κάπως ἀργότερα. Ὁ Thomas Bayes (1702-1761), μαθητής ἴσως τοῦ de Moivre, ἦταν μέλος ἀπό τό 1742 τῆς ἀκαδημίας τοῦ Λονδίνου. Ἐπίσης ὁ πατέρας του ἦταν παπᾶς καί μέλος τῆς ἀκαδημίας, καί ὁ Thomas χειροτονήθηκε παπᾶς καί βοηθοῦσε τόν πατέρα του. Μία ἐργασία του, πού βρέθηκε στά γραπτά του μετά τόν θάνατο του ἀπό τόν Richard Price, ἀσχολεῖται μέ πιθανότητες καί δημοσιεύθηκε τό 1763.

Ἐκεῖ μιλᾶ γιά ἀνεξάρτητα γεγονότα καί τόν πολλαπλασιαστικό νόμο τῶν πιθανοτήτων $P(A\,B) = P(A)\,P(B/A)$, ὅπου $P(B/A)$ ἡ δεσμευμένη πιθανότητα.

Ὁ γνωστός τύπος τοῦ Bayes δέν ὑπάρχει στήν ἐργασία αὐτή πού ἦταν καί ἡ μόνη ἐργασία τοῦ Bayes στίς πιθανότητες.

Η ὀνομασία:"τύπος τοῦ Bayes", δόθηκε ἀργότερα ἀπό τόν Laplace.

Η Γαλλική σχολή

Ο Leonard Euler (1707-1783) ἔδειξε ἐνδιαφέρον γιά τίς πιθανότητες ἀπό τό παρακάτω πρόβλημα. Στίς 15 Σεπτεμβρίου 1754 ὁ βασιλιᾶς Frederick τῆς Πρωσσίας ζήτησε τή συμβουλή τοῦ Euler γιά ἕνα λαχεῖο πού ὀργάνωνε. Ἐπίσης στίς 17 Αὐγούστου 1763 ξαναγράφε στόν Euler γιά ἄλλο λαχεῖο. Ο Euler ἔδωσε λεπτομερεῖς ὑπολογισμούς γιά τήν ἀξία τῶν λαχείων.

Τό πρόβλημα ἦταν: Κάθε ἀγοραστής ἀγοράζει ἕνα ἀριθμό ἤ μία σειρά ἀπό ἀριθμούς καί ὁρίζει πόσα χρήματα θέλει νά πάρει ὅταν κερδίσει. Πέντε ἀριθμοί ἐπιλέγονται τυχαῖα. Πόσο ἀξίζει κάθε λαχεῖο;

Ὑπολογίζει τήν Πιθανότητα νά ἐπιλεχτοῦν K διαδοχικοί ἀριθμοί (K=1,...,5) ὅπως δίνονται παρακάτω:

i) Ποία ἡ πιθανότητα νά ἐπιλεχτοῦν δύο διαδοχικοί ἀριθμοί ὅταν πάρουμε τυχαῖα δύο λαχνούς ἀπό τούς n;

$$P_{(2)} = \frac{(n-1)}{1}\left(\frac{2}{n(n-1)}\right) = \frac{2}{n}\ ,\ P_{(1)}=1-P_{(2)}=\frac{n-2}{2n}$$

ii) Γιά τρεῖς λαχνούς ἔδωσε:

$$P_{(3)} = \frac{6}{n(n-1)}\ ,\ P_{(2)} = \frac{6(n-3)}{n(n-1)}\ ,\ P_{(1)} = 1-P_{(2)} - P_{(3)}$$

iii) Στό λαχεῖο τῆς Γένοβας, τό n=90 καί 5 λαχνοί παίρνονται ἀπό τό δοχεῖο. Ο Euler βρίσκει ὅλες τίς δυνατές πιθανότητες, $P_{(5)}$, $P_{(4)}$, $P_{(3)}$, $P_{(2)}$ κ.λ.π.

iv) (1785) Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα γιά νά βγοῦν ὅλοι οἱ ἀριθμοί στήν περίπτωση (iii) σέ r κληρώσεις;

Τήν ἐποχή αὐτή (1700-1800) ἄρχισε καί ἡ χρήση τῶν Πιθανοτήτων σέ διάφορες ἐπιστῆμες, δημογραφία, πολιτική, ἀστρονομία κ.λ.π.

Ὁ G.L.Buffon (1707-1788) εἶναι γνωστός μεταξύ ἄλλων καί γιά τό πρόβλημα τῆς βελόνας (1777): Τό ἐπίπεδο εἶναι χωρισμένο μέ παράλληλες γραμμές πού ἔχουν ἀπόσταση α. Μία βελόνα μήκους ℓ ρίχνεται τυχαῖα στό ἐπίπεδο. Ποιά ἡ πιθανότητα νά διασταυρώσει μιά ἀπό τίς γραμμές;

$$\text{Ἄν } \ell < \alpha, \text{ τότε } \quad P = \frac{2\ell}{\pi\alpha}$$

Ἔτσι μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τό π πειραματικά. Ὁ buffon ἔριξε τή βελόνα 2048 φορές.

Ἐπίσης ἀσχολήθηκε μέ τούς πλανῆτες καί μέ πίνακες θανάτων, βρίσκοντας τήν πιθανότητα διάρκειας τῆς ζωῆς. Μάλιστα ἔδωσε καί σχετικό πίνακα.

Ὁ D'Alembert (1717-1783), παρότι σπουδαῖος Μαθηματικός, ἔκανε στοιχειώδη λάθη. Στό πρόβλημα: Ποιά ἡ πιθανότητα νά ἐμφανισθεῖ Κ τουλάχιστο μία φορά σέ δύο ρίψεις νομίσματος; Ἔδωσε $P = \frac{2}{3}$ ἀντί γιά $\frac{3}{4}$ διότι ἐθεώρησε ὅτι οἱ δυνατές περιπτώσεις εἶναι τρεῖς δηλαδή δύο Κ ἤ δύο Γ ἤ μία καί μία. Δέν διαχώρισε τήν (Κ,Γ) ἀπό τήν (Γ,Κ). (Γ=γράμματα, Κ=κεφαλή) Γιά τό παράδοξο τῆς Πετρούπολης εἶπε ὅτι κανείς λογικός ἄνθρωπος δέν θά πληρώσει καί μέτριο ποσό γιά νά μπεῖ στό παιχνίδι. Ἐπίσης πίστευει ὅτι ὁ ὑπολογισμός τῶν πιθανοτήτων στήν περίπτωση πού ρίχνουμε n νομίσματα μαζί εἶναι διαφορετικός ἀπό ὅτι ὅταν ρίχνουμε ἕνα νόμισμα διαδοχικά n φορές. Μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι ὁ D'Alembert ἀμφέβαλε γιά μερικές ἀρχές τῶν πιθανοτήτων καί αὐτό φαίνεται ἀπό τήν ἐργασία του "Doutes et Questions sur le Calcul des Probabilités".

Ὁ Μαρκήσιος Condorset (1743-1794), πού ἦταν πολιτικός καί

μέλος τῆς ἀκαδημίας τοῦ Παρισιοῦ, ἔγραφε τό 1785 γιά τήν ἐφαρμογή τῶν πιθανοτήτων στή ψηφοφορία. Ἕνα ἀπό τά προβλήματα πού ἔλυσε ἦταν: Ἄν ἡ πιθανότητα ἑνός γεγονότος σέ μία προσπάθεια εἶναι υ, ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα νά πάρουμε p διαδοχικές ἐπιτυχίες πρίν ἀπό p διαδοχικές ἀποτυχίες, σέ r προσπάθειες;

Ὁ D'Alembert τόν ἀποκαλοῦσε:"Ἡφαίστειο σκεπασμένο μέ χιόνι" μέ ἄλλα λόγια ἦταν ἕνας διανοητής ἀριστοκράτης. Τό 1794, κατά τή Γαλλική ἐπανάσταση, δικάσθηκε, δέν πρόλαβαν ὅμως νά τόν ἐκτελέσουν διότι αὐτοκτόνησε μέ δηλητήριο. Θεωρήθηκαν ἐχθροί τῆς ἐπανάστασης καί οἱ Laplace, Lagrange καί Lavoisier, ὁ τελευταῖος μάλιστα ἀποκεφαλίστηκε στίς 8 Μαΐου 1794.

Ὁ Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), πού ἔγινε ἀναπληρωματικό μέλος τῆς ἀκαδημίας, 24 ἐτῶν, τό 1773 καί πλῆρες μέλος τό 1785 ἔκανε πολλές ἐργασίες στίς πιθανότητες. Τό 1812 ἐκδόθηκε τό περίφημο βιβλίο του "Theorie Analytique des Probabilités". Ὁ κλασσικός ὁρισμός τῆς πιθανότητας

$$P(A) = \frac{\text{ἀριθμός εὐνοϊκῶν περιπτώσεων}}{\text{ἀριθμός ὅλων τῶν περιπτώσεων}}$$

ὀφείλεται σ'αὐτόν. Ἔκανε ἐφαρμογές τῶν πιθανοτήτων στή δημογραφία καί ὑπολόγισε ὅτι ὁ πληθυσμός τῆς Γαλλίας τό 1802 ἦταν 28352845 κάτοικοι. Αὐτό τό συμπέρανε ἀπό μία δειγματοληψία πού ἔγινε σέ 30 περιοχές τῆς Γαλλίας. Ἐπίσης συμπλήρωσε τό ὁριακό θεώρημα τοῦ de Moivre, χωρίς νά ἀναφέρει τόν de Moivre, ἔκανε χρήση τῆς ἔννοιας τῶν χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων καί ἀσχολήθηκε μέ τή μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων πού εἶχε δημοσιεύσει ὁ Legendre τό 1805. Ἦταν ἡ διάνοια τῆς ἐποχῆς του.

Σάν ἄνθρωπος ὁ Laplace θεωρήθηκε πολιτικός εὐκαιριάκιας

διότι μέ τή Γαλλική ἐπανάσταση τοῦ 1789 ἔφυγε ἀπό τό Παρίσι καί ξαναγύρισε τό 1794, ὅταν ἡ ἐπανάσταση ἔπαιρνε τήν κάτω βόλτα, γιά νά γίνει καθηγητής στήν Ecole Normale. Ἦταν δάσκαλος καί φίλος τοῦ Ναπολέοντα πού τό 1797 εἶχε γίνει μέλος τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Παρισιοῦ γιά τίς Μαθηματικές καί πολιτικές του ἱκανότητες.

Ὁ Ναπολέοντας τόν διόρισε ὑπουργό ἐσωτερικῶν(1799) ἀλλά τό ὑπουργικό συμβούλιο τόν ἀπέλυσε ἕξη μῆνες ἀργότερα γιά τίς ἐκκεντρικότητές του. Μετά ἔγινε γερουσιαστής καί μέ τήν ἐπάνοδο τῆς βασιλείας ἀποδείχτηκε ὀπαδός τοῦ Λουδοβίκου τοῦ XVIII ὁ ὁποῖος τόν ἔκανε Μαρκήσιο τό 1817.

Ἕνας ἄλλος σπουδαῖος Μαθηματικός τῆς ἐποχῆς, ὁ Γερμανός Carl Friedrich Gauss (1777-1855) εἶναι γνωστός στίς πιθανότητες ἀπό τήν κανονική κατανομή ἤ κατανομή Gauss. Τό 1809 ὁ Gauss, μελετώντας τήν κατανομή τῶν τυχαίων σφαλμάτων, συμπέρανε ὅτι πρέπει νά ἀκολουθοῦν τήν κατανομή

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2} \qquad -\infty < \Delta < \infty$$

Ἕνας Ἀμερικανός ὅμως, ὁ Although Adrian, ἀνακάλυψε αὐτήν τήν κατανομή ἕνα χρόνο νωρίτερα, τό 1808, μελετώντας τά τυχαῖα σφάλματα.

Μάλιστα ὁ Gauss ἔκανε καί πίνακα γιά τίς τιμές τῆς

$$\int_0^t \varphi(t)dt.$$

Τό 1809 ὁ Gauss δημοσίευσε καί τήν ἐργασία του γιά τή μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, ἄν καί ὁ Legendre εἶχε κάνει τήν πρώτη δημοσίευση τό 1805. Ὁ Gauss σέ ἀλληλογραφία μέ τόν Legendre καί ἄλλους ἰσχυρίσθηκε ὅτι χρησιμοποιοῦσε τή μέθοδο ἀπό τό 1795 χωρίς νά τήν δημοσιεύσει.

Ὁ Simeon Denis Poisson (1781-1840) δημοσίευσε τό 1837

τό βιβλίο του:"Recherches sur la probabilitē des jugements en matiēre criminelle et en matiēre civile". Ἐκεῖ γενικεύει τόν νόμο τῶν μεγάλων ἀριθμῶν τοῦ J.Bernoulli γιά τήν περίπτωση πού οἱ πιθανότητες σέ κάθε προσπάθεια δέν εἶναι ἴσες.

Ἔδειξε ὅτι

$$\lim_{n\to\infty} P(\left|\frac{m}{n} - \tilde{p}\right| < \varepsilon) = 1$$

ὅπου $$\tilde{p} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n}$$

Στό ἴδιο βιβλίο ὁ Poisson δείχνει ὅτι ἄν στή διωνυμική κατανομή τό n εἶναι μεγάλο καί τό p μικρό, τότε ἡ πιθανότητα νά ἔχουμε m ἐπιτυχίες σέ n προσπάθειες εἶναι κατά προσέγγιση

$$p_{m,n} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

ὅπου $\lambda = np$ (νόμος μικρῶν ἀριθμῶν).

Αὐτή σήμερα λέγεται κατανομή τοῦ Poisson.

Ἡ Ρωσσική σχολή

Τό πρῶτο τμῆμα σέ Πανεπιστήμιο πού νά ἀσχολεῖται μέ τίς Πιθανότητες, ἔγινε τό 1830 στό Πανεπιστήμιο Vilnus. Τό 1850 ἄρχισε πλῆρες πρόγραμμα γιά τή διδασκαλία τῶν Πιθανοτήτων στό Πανεπιστήμιο τῆς Μόσχας.

Ἀπό τίς πρῶτες ἐργασίες στά Ρωσσικά πάνω στίς Πιθανότητες ἦταν τοῦ γνωστοῦ Γεωμέτρη Nikolai Ivanovidh Lobachevskii. Μελέτησε τήν κατανομή τοῦ ἀθροίσματος ἀνεξάρτητων καί ἰσόνομων τυχαίων μεταβλητῶν (1837).

Τή σπουδαιότερη ὤθηση τήν ἔδωσε ἡ σχολή τῆς Πετρούπολης

μέ τούς Pafnutii Lvorich Chebyshev (1821-1894), A.A.Markov (1856-1922), A.M. Lyapunov (1857-1918) καί ἄλλους. Καί οἱ τρεῖς ἐνδιαφέρθηκαν γιά τήν ἐφαρμογή τῶν Πιθανοτήτων σέ πρακτικά προβλήματα καί πίστευαν στήν ὑλιστική φιλοσοφία στίς ἐπιστῆμες.

Ὁ Chebyshev εἶναι γνωστός ἀπό τήν ἀνισότητα πού φέρει τό ὄνομά του (1866) ἄν καί τό (1853) ὁ Bienaymē εἶχε δημοσιεύσει παρόμοια ἀνισότητα. Ἐπίσης ἀσχολήθηκε μέ τό νόμο τῶν Bernoulli καί Poisson καί μέ τά ὁριακά θεωρήματα μελετώντας τήν ταχύτητα τῆς σύγκλισης.

Ὁ Markov ἦταν μαθητής τοῦ Chebyshev καί ἀσχολήθηκε μέ ὁριακά θεωρήματα γιά τό ἄθροισμα ἀνεξάρτητων καί ἐξαρτημένων τυχαίων μεταβλητῶν. Εἶναι γνωστές οἱ ἁλυσίδες τοῦ Markov στίς στοχαστικές ἀνελίξεις.

Ἀπόδειξε τό κεντρικό ὁριακό θεώρημα (1898) μέ τήν προϋπόθεση ὅτι οἱ τυχαῖες μεταβλητές ἔχουν πεπερασμένες ροπές κάθε τάξης. Τό 1900 καί 1901 ὁ Lyapunov ἀπόδειξε τό κεντρικό ὁριακό θεώρημα μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ὑπάρχουν μόνον οἱ ροπές τάξης 2+δ, δ > 0. Γιά τήν ἀπόδειξη χρησιμοποίησε χαρακτηριστικές συναρτήσεις γιά πρώτη φορά ἄν καί οἱ Laplace καί Lagrange εἶχαν ἀγγίξει τήν ἔννοια τῆς χαρακτηριστικῆς συνάρτησης παλιότερα.

Ὁ Markov τό 1913 ἀπόδειξε τό κεντρικό ὁριακό θεώρημα τοῦ Lyapunov ὄχι μέ χαρακτηριστικές συναρτήσεις ἀλλά μέ τή μέθοδο τῶν κολοβομένων τυχαίων μεταβλητῶν. Τό 1908 ἔκδοσε τό βιβλίο του "Λογισμός τῶν Πιθανοτήτων".

Τό 1922 ὁ Y. W. Lindeberg βελτίωσε τίς συνθῆκες τοῦ Lyapunov ὑποθέτοντας μόνο τήν ὕπαρξη ροπῶν τάξης 2 καί ὁ W. Feller τό 1935 ἀπόδειξε ὅτι ἡ συνθήκη τοῦ Lindeberg εἶναι καί ἀναγκαία. Ἡ συνθήκη αὐτή εἶναι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{n} \int_{|x|>\varepsilon\sqrt{n}} x^2 dF_i(x)=0 \quad \text{όπου} \quad EX_i=0,\ EX_i^2=1$$

Ἐξελίξεις στά ὁριακά θεωρήματα

Τό 1909 ὁ E. Borel (1871-1956) ἐπέκτεινε τό θεώρημα τοῦ J.Bernoulli ἀποδείχνοντας ὅτι γιά $p=\frac{1}{2}$ ἡ σύγκλιση εἶναι ἰσχυρή, δηλαδή

$$P(\lim_{n\to\infty} (\frac{m}{n} - p)=0)=1$$

Τό 1917 ὁ F.P. Cantelli γενίκευσε τό ἀποτέλεσμα τοῦ Borel γιά $0< p < 1$.

Ὁ A. Kolmogorov τέλος ἐπέκτεινε τά ἀποτελέσματα αὐτά γιά ἰσόνομες καί ἀνεξάρτητες τυχαῖες μεταβλητές μέ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη τήν ὕπαρξη μέσης τιμῆς, δηλαδή

$$p(\lim_{n\to\infty} (\frac{X_1+\ldots+X_n}{n} - EX)=0)=1$$

Τέλος τό 1923 ὁ Khinchin ἀπόδειξε τό νόμο τοῦ ἐπαναλαμβανόμενου λογάριθμου γιά ἀνεξάρτητες προσπάθειες Bernoulli, δηλαδή

$$P(\limsup_{n\to\infty} \frac{m-np}{\sqrt{2npq\ln\ln n}} = 1)=1$$

Αὐτός ὁ νόμος ἐπεκτάθηκε ἀπό τούς Kolmogorov (1929), Feller (1943), Erdös (1943), Strassen (1964),

$$p(\limsup_{n\to\infty} \frac{(X_1+\ldots+X_n)}{\sqrt{2n\ln\ln n}} = 1)=1$$

ὅπου $EX_i=0$ καί $varX_i=1$.

Ἀξιωματικοποίηση

Ἀπό τίς ἀρχές τοῦ εἰκοστοῦ αἰώνα ἄρχισαν προσπάθειες γιά τήν ἀξιωματικοποίηση τῆς θεωρίας Πιθανοτήτων. Ὁ E.Borel ἔγραφε τό 1914 τό βιβλίο του: "Le Hasard" καί ὁ Henry Poincare (1854-1912) ἔγραφε τό 1912 τό:"Calcul des Probabilitēs", πού ἦταν ἀπό τά πιό αὐστηρά βιβλία στίς πιθανότητες μέ ἀρκετές κριτικές πάνω σέ παραδεγμένες ἔννοιες (ἰσοπίθανα κλπ.).

Ὁ Ρῶσσος N.Bernstein (1880-1968) ἔγραφε τό 1917 γιά τήν ἀξιωματική θεμελίωση τῶν Πιθανοτήτων καί τό 1927 ἐκδόθηκε τό βιβλίο του:"Θεωρία Πιθανοτήτων". Θεμελίωσε τίς πιθανότητες σέ τρία ἀξιώματα καί ἦταν ὁ πρόδρομος γιά τήν ἀξιωματική θεμελίωση ἀπό τόν Kolmogorov τό 1933 πού εἶναι γενικά παραδεκτή σήμερα.

Ὁ Richard von Mises (1883-1953) πίστευε ὅτι οἱ πιθανότητες δέν εἶναι Μαθηματικά καί ἀκολούθησε τή λεγόμενη μέθοδο τῆς σχετικῆς συχνότητας. Βασική του ἔννοια εἶναι ἡ τῆς ἀκολουθίας τοῦ δείγματος καί παίρνει σάν πρῶτο ἀξίωμα (1919), ὅτι γιά κάθε δειγματική ἀκολουθία s ἰσχύει

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = P(s)$$

Ὁ A.Renyi (1921-1970) γιά νά ἀποφύγει τόν περιορισμό τοῦ πεπερασμένου μέτρου γιά τίς πιθανότητες, ἔκανε (1955) ἀξιωματική θεμελίωση, στηριζόμενος στή δεσμευμένη πιθανότητα καί στηριζόμενος στή θεωρία Μέτρου ὅπως καί ὁ Kolmogorov.

Ἄλλοι ἐρευνητές ἐπίσης στηρίχθηκαν στήν δεσμευμένη πιθανότητα ἀλλά χωρίς τή χρήση τῆς θεωρίας Μέτρου ὅπως οἱ H. Jeffreys (1939), J.M.Keynes,(1921) οἱ ὁποῖοι δέχθηκαν ὅτι κάθε πρόταση ἔχει πιθανότητα καί δέν ἔχει αὐτό πάντα σχέση μέ τή σχετική συχνότητα.

Ὑπάρχουν τέλος αὐτοί, ὅπως οἱ J.Good, L.Savage, πού συμφωνοῦν μέ τόν Bruno de Finetti ὁ ὁποῖος δέχεται ὅτι ἡ πιθανότητα εἶναι ὑποκειμενική ποσότητα γιά τόν καθένα. Ἐπίσης ὅτι δέν ὑπάρχει ἐμπειρική σχέση μεταξύ πιθανότητας καί σχετικῆς συχνότητας.

Ἔτσι βλέπουμε ὅτι ἀκόμη δέν ὑπάρχει γενική συμφωνία γιά τά βασικά ἀξιώματα τῶν πιθανοτήτων.

Βιβλιογραφία

1. Terrence L. Fine. Theories of Probability, Academic Press, 1973.

2. Ian Hacking. The emergence of Probability, Cambridge University Press, 1975.

3. L.E. Maistrov. Probability Theory, a historical sketch, Academic Press, 1974.

   Α. Φιλίππου. Παιγνίδια τύχης. Ἡ ἀρχή καί ἡ ἐξέλιξις τῆς Πιθανοθεωρίας. Μαθηματική Ἐπιθεώρησις 2, 1975.

4. A. Renyi Foundations of Probability, Holden-Day, 1970.

5. O. B.Sheymin. Studies in the History of Probability and Statistics. XXI, Biometrika, 55, p. 459, 1968.

6. D.E. Smith History of Mathematics, Vol. I, Dover Py Publications, 1958.

7. Stephen M.Stigler. Studies in the History of Probability and Statistics. XXXIV, Biometrika, 62, p. 503, 1975.