Author: Kurt Goedel

Title: Ποιο είναι το πρόβλημα του συνεχούς του Cantor

Abstract: Το πρόβλημα του συνεχούς: Πόσα σημεία υπάρχουν σε μια ευθεία γραμμή και το ισοδύναμό του: Πόσα διαφορετικά σύνορα ακεραίων αριθμών υπάρχουν;

Creator: HDML

ΠΟΙΟ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΤΟΥ CANTOR;*

Kurt Gödel, Ἰνστιτοῦτο Ἀνωτέρων Μελετῶν.

1. Ἡ ἔννοια τοῦ πληθαρίθμου. Τό πρόβλημα τοῦ συνεχοῦς τοῦ Cantor εἶναι ἁπλά τό ἐρώτημα: Πόσα σημεῖα ὑπάρχουν σέ μιά εὐθεία γραμμή στόν Εὐκλείδιο χῶρο; Ἰσοδύναμα, τό ἐρώτημα εἶναι: Πόσα διαφορετικά σύνολα ἀκεραίων ἀριθμῶν ὑπάρχουν;

Τό ἐρώτημα, βέβαια, θά μποροῦσε νά τεθεῖ μόνο ὅταν ἡ ἔννοια τοῦ "ἀριθμοῦ" ἔχει ἐπεκταθεῖ σέ ἄπειρα σύνολα. Ἄρα θά μποροῦσε κανείς ν'ἀμφιβάλλει ἄν αὐτή ἡ ἐπέκταση μπορεῖ νά πραγματοποιηθεῖ κατά ἕνα μοναδικά προσδιορισμένο τρόπο, καί ἄρα ἄν ἡ διατύπωση τοῦ προβλήματος μέ τούς ἁπλούς ὅρους πού χρησιμοποιήσαμε παραπάνω εἶναι δικαιολογημένη. Προσεκτικότερη ἐξέταση ὅμως, δείχνει ὅτι ὁ ὁρισμός τῶν ἀπείρων ἀριθμῶν τοῦ Cantor ἔχει τόν χαρακτήρα τῆς μοναδικότητας, καί αὐτό μ'ἕνα πολύ ἐντυπωσιακό τρόπο. Γιατί ὅποιο καί νά εἶναι τό νόημα τοῦ "ἀριθμοῦ" ὅταν ἐφαρμόζεται σέ ἄπειρα σύνολα, εἶναι βέβαιο ὅτι θέλουμε αὐτό νά ἔχει τήν ἰδιότητα ὅτι ὁ ἀριθμός τῶν ἀντικειμένων πού ἀνήκουν σέ μιά κλάση δέν ἀλλάζει ἄν, ἀφήνοντας τά ἀντικείμενα τά ἴδια, ἀλλάξουμε καθ'οἱονδήποτε τρόπο τίς ἰδιότητες τους ἤ τίς ἀμοιβαῖες σχέσεις τους (π.χ. τά χρώματα τους ἤ τήν κατανομή τους στό χῶρο). Ἀπ'αὐτό, ὅμως, ἕπεται ἄμεσα ὅτι δύο σύνολα (τουλάχιστον δύο σύνολα μεταβλησίμων ἀντικειμένων στόν χωρο-χρόνο) θά ἔχουν τόν ἴδιο πληθάριθμο ἄν τά στοιχεῖα τους μποροῦν νά

---

* Δημοσιεύτηκε ἀρχικά τό American Mathematical Monthly Vol. 54 (1947) βλ. 515-525. Μεταφράστηκε γιά τήν Ε.Μ.Ε. μέ ἄδεια τῆς Mathematical Association of America.

ἀντιστοιχιθοῦν ἕνα πρός ἕνα, πού εἶναι ἀκριβῶς ὁ ὁρισμός τοῦ Cantor γιά τήν ἰσότητα μεταξύ ἀριθμῶν. Γιατί ἄν ὑπάρχει μιά τέτοια ἀντιστοιχία γιά δύο σύνολα A καί B εἶναι δυνατόν(τουλάχιστον θεωρητικά) ν'ἀλλάξουμε τίς ἰδιότητες καί σχέσεις κάθε ἑνός στοιχείου τοῦ A στίς ἰδιότητες καί σχέσεις τοῦ ἀντίστοιχου στοιχείου τοῦ B, ὥστε τό A ἔτσι μετασχηματίζεται σ' ἕνα σύνολο πού δέν ξεχωρίζεται καθόλου τελείως ἀπό τό B, ἄρα τοῦ ἴδιου πληθαρίθμου. Π.χ., ὑποθέτοντας ἕνα τετράγωνο κι ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα νά εἶναι καί τά δύο τελείως συμπληρωμένα μέ σημεῖα μάζας (ὥστε σέ κάθε σημεῖο ἀπ'αὐτά ἀκριβῶς ἕνα σημεῖο μάζας εἶναι τοποθετημένο), ἕπεται, λόγω τοῦ ἀποδείξιμου γεγονότος ὅτι ὑπάρχει μία πρός μία ἀντιστοιχία μεταξύ τῶν σημείων ἑνός τετραγώνου καί ἑνός εὐθυγράμμου τμήματος, καί, ἄρα καί μεταξύ τῶν ἀντιστοίχων σημείων μάζας, ὅτι τά σημεῖα μάζας τοῦ τετραγώνου μποροῦν νά συνδυασθοῦν ὥστε νά συμπληρώσουν ἀκριβῶς τό εὐθύγραμμο τμῆμα, καί ἀντίστροφα. Τέτοιες παρατηρήσεις, βέβαια, ἐφαρμόζονται ἄμεσα μόνο γιά φυσικά ἀντικείμενα, ἀλλά ἕνας ὁρισμός τῆς ἔννοιας τοῦ "ἀριθμοῦ" πού θά ἐξαρτιόταν ἀπό τό εἶδος τῶν ἀντικειμένων πού ἐπρόκειτο νά ἀριθμηθοῦν δύσκολα θά μποροῦσε νά θεωρηθεῖ ἱκανοποιητικός.

Ἔτσι δέν ὑπάρχει σχεδόν ἄλλη ἐπιλογή ἀπό τοῦ νά δεχθοῦμε τόν ὁρισμό τοῦ Cantor τῆς ἰσότητας μεταξύ ἀριθμῶν,πού εὔκολα μπορεῖ νά ἐπεκταθεῖ σ'ἕνα ὁρισμό τοῦ "μεγαλύτερου" καί τοῦ "μικρότερου" γιά ἄπειρους ἀριθμούς μέ τό νά καθορίσουμε ὅτι ἕνας πληθάριθμος M ἑνός συνόλου A θά καλεῖται μικρότερος ἑνός πληθαρίθμου N ἑνός συνόλου B ἄν ὁ M εἶναι διάφορος τοῦ N ἀλλά ἴσος μέ τόν πληθάριθμο κάποιου ὑποσυνόλου τοῦ B. Μέ βάση αὐτούς τούς ὁρισμούς γίνεται δυνατό ν'ἀποδείξουμε ὅτι ὑπάρχουν ἄπειροι τό πλῆθος διάφοροι ἀνά δύο ἄπειροι πληθάριθμοι ἤ "δυνάμεις", καί ὅτι, εἰδικώτερα, ὁ ἀριθμός τῶν ὑποσυνόλων ἑνός συνόλου εἶναι πάντα μεγαλύτερος ἀπό τόν ἀριθμό τῶν στοιχείων του. Ἐπίσης γίνεται δυνατόν νά ἐπεκτείνουμε (πάλι χωρίς καμμιά αὐθαιρεσία) τίς ἀριθμητικές πράξεις στούς ἄπειρους πληθαρίθμους (συμπεριλαμβανομένων καί τῶν ἀθροισμάτων καί γι - νομένων μέ ὁποιοἄπειρο ἀριθμό ὅρων ἤ παραγόντων) καί ν'ἀποδείξουμε σχεδόν ὅλους τούς συνηθισμένου λογιστικούς κανόνες.

Ἀλλά, καί πάλι, τό πρόβλημα τοῦ καθορισμοῦ τοῦ πληθαρίθμου ἑνός συγκεκριμένου συνόλου, ὅπως τό γραμμικό συνεχές,δέν θά ἦταν καλά ὁρισμένο ἄν δέν ὑπῆρχε κάποια "φυσική" ἀναπαράσταση τῶν ἄπειρων πληθαρίθμων, συγκρίσιμη μέ τό δεκαδικό σύστημα ἤ κάποιο ἄλλο συστηματικό συμβολισμό τῶν ἀκεραίων. Αὐτή ἡ συστηματική ἀναπαράσταση, ὅμως ὑπάρχει, χάρη στό θεώρημα ὅτι σέ κάθε πληθάριθμο καί σέ κάθε σύνολο πληθαρίθμων[1], ὑπάρχει ἀκριβῶς ἕνας πληθάριθμος πού εἶναι ὁ ἄμεσος διάδοχος σέ μέγεθος καί ὅτι ὁ πληθάριθμος κάθε συνόλου συναντιέται στήν σειρά πού λαμβάνεται μ'αὐτό τόν τρόπο[2]. Μ'αὐτό τό θεώρημα εἶναι δυνατό νά παραστήσουμε τόν πληθάριθμο πού ἀμέσως ἕπε - ται τοῦ συνόλου τῶν πεπερασμένων ἀριθμῶν μέ $\aleph_0$ (πού εἶναι ἡ δύναμη τῶν "ἀπείρων ἀριθμησίμων" συνόλων), τόν ἑπόμενο μέ $\aleph_1$, κλπ. Ὁ πληθάριθμος πού ἀμέσως ἕπεται ὅλων τῶν $\aleph_i$ ὅπου ὁ i εἶναι ἀκέραιος, μέ $\aleph_\omega$, τόν ἑπόμενο μέ $\aleph_{\omega+1}$,κλπ. καί ἡ θεωρία τῶν διατακτικῶν ἀριθμῶν μᾶς παρέχει τά μέσα νά ἐπεκτείνουμε αὐτή τή σειρά μακρύτερα καί μακρύτερα.

2. Τό πρόβλημα τοῦ συνεχοῦς, ἡ ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς καί τά μερικά ἀποτελέσματα σχετικά μέ τήν ἀλήθεια του πού ἔχουν ἐπιτευχθεῖ μέχρι τώρα.

Ἔτσι ἡ ἀνάλυση τῆς φράσης "πόσα" ὁδηγεῖ χωρίς ἀσάφειες σ'ἕνα τελείως καθορισμένο νόημα στό ἐρώτημα πού διατυπώθηκε στήν πρώτη παράγραφο τοῦ ἄρθρου, δηλαδή, νά βροῦμε ποιό ἀπό τά $\aleph$ εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν σημείων τῆς εὐθείας γραμμῆς ἤ(ἰσοδύναμα) ὁποιουδήποτε ἄλλου συνεχοῦς στόν Εὐκλείδιο χῶρο. 'Ο Cantor, ἀφοῦ εἶχε ἀποδείξει ὅτι ὁ ἀριθμός εἶναι ὁπωσδήποτε μεγαλύτερος ἀπό $\aleph_0$ διατύπωσε τήν εἰκασία ὅτι εἶναι $\aleph_1$ ἤ (ἰσοδύναμα) ὅτι κάθε ἄπειρο ὑποσύνολο τοῦ συνεχοῦς ἔχει ἤ τήν δύναμη τοῦ συνόλου τῶν ἀκεραίων ἤ τήν δύναμη ὅλου τοῦ συνεχοῦς. Αὐτή εἶναι ἡ ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς τοῦ Cantor.

'Αλλά ἄν καί ἡ συνολοθεωρία τοῦ Cantor εἶχε μέχρι τώρα μιά ἀνάπτυξη περισσότερο ἀπό ἑξήντα χρόνια καί τό πρόβλημα εἶναι προφανῶς μεγάλης σημασίας γι'αὐτήν, τίποτα δέν ἔχει ἀποδειχθεῖ μέχρι τώρα σχετικά μέ τό ἐρώτημα ποιά εἶναι ἡ δύναμη τοῦ συνεχοῦς ἤ ἄν τά ὑποσύνολα του ἱκανοποιοῦν τήν συνθήκη πού μόλις διατυπώθηκε, ἐκτός ἀπό τό

(1) ὅτι ἡ δύναμη τοῦ συνεχοῦς δέν εἶναι ἕνας πληθάριθμος ἑνός πολύ ειδικοῦ εἴδους, δηλαδή δέν εἶναι τό ὅριο μιᾶς ἀριθμήσιμης ἀκολουθίας μικροτέρων πληθαρίθμων(3), καί

(2) ὅτι ἡ πρόταση πού μόλις ἀναφέρθηκε γιά τά ὑποσύνολα τοῦ συνεχοῦς εἶναι ἀληθινή γιά ἕνα ὁρισμένο ἀπειροελάχιστο κλάσμα αὐτῶν τῶν συνόλων, τά ἀναλυτικά(4) σύνολα(5).

Οὔτε κάν ἕνα ἄνω ὅριο, ὁσοδήποτε ψηλό, μπορεῖ νά καθορισθεῖ γιά τή δύναμη τοῦ συνεχοῦς. Οὔτε εἶναι τίποτε περισσότερο γνωστό γιά τήν ποιότητα ἀπ'ὅτι γιά τήν ποσότητα τοῦ πληθαρίθμου τοῦ συνεχοῦς. Δέν ὑπάρχει ἀπόκριση στό ἄν ὁ ἀριθμός εἶναι κανονικός ἤ ὄχι-κανονικός, προσιτός ἤ ἀπρόσιτος, καί (ἐκτός ἀπό τό ἀρνητικό ἀποτέλεσμα τοῦ König) ποιός εἶναι ὁ χαρακτήρας τῆς ὁμοτελικότητάς του(4). Τό μόνο πού εἶναι γνωστό, πρόσθετο στ'ἀποτελέσματα πού μόλις ἀναφέρθηκαν εἶναι ἕνας μεγάλος ἀριθμός συνεπειῶν καί μερικές προτάσεις ἰσοδύναμες μέ τήν εἰκασία τοῦ Cantor(6).

Αὐτή ἡ ἔντονη ἀποτυχία γίνεται ἀκόμη πιό ἐντυπωσιακή ἄν τό πρόβλημα θεωρηθεῖ σέ σχέση μέ γενικά προβλήματα ἀριθμη -

τικῆς πληθαρίθμων. Εὔκολα ἀποδείχνεται ὅτι ἡ δύναμη τοῦ συνεχοῦς εἶναι ἴση μέ $2^{\aleph_0}$. Ἔτσι τό πρόβλημα τοῦ συνεχοῦς φαίνεται ὅτι εἶναι ἕνα ἐρώτημα ἀπό τόν "πίνακα πολλαπλασιασμοῦ" τῶν πληθαρίθμων, δηλαδή τό πρόβλημα τοῦ νά ὑπολογίσουμε κάποιο ἄπειρο γινόμενο (στήν πραγματικότητα τό ἁπλούστερο δυνατό ὄχι τετριμμένο πού μπορεῖ νά σχηματισθεῖ). Δέν ὑπάρχει, ὅμως οὔτε ἕνα ἄπειρο γινόμενο (μέ παράγοντες >1) γιά τό ὁποῖο ἀκόμη κι ἕνα ἄνω φράγμα γιά τήν τιμή του μπορεῖ νά δοθεῖ. Τό μόνο πού γνωρίζουμε γιά τόν ὑπολογισμό ἀπείρων γινομένων εἶναι δύο κάτω φράγματα πού ὀφείλονται στούς Cantor καί König (ἀπ'τά ὁποῖα τό δεύτερο ἔχει σάν συνέπεια μία γενίκευση τοῦ ἀρνητικοῦ θεωρήματος γιά τή δύναμη τοῦ συνεχοῦς πού ἀναφέρθηκε παραπάνω), καί μερικά θεωρήματα πού ἀναφέρονται στήν ἀναγωγή γινομένων μέ διαφορετικούς παράγοντες σέ δυνάμεις καί σέ δυνάμεις δυνάμεων μέ μικρότερες βάσεις ἤ ἐκθέτες. Αὐτά τά θεωρήματα ἀνάγουν[7] τό ὅλο πρόβλημα τοῦ ὑπολογισμοῦ ἀπείρων γινομένων στόν ὑπολογισμόν τοῦ $\aleph_\alpha^{cf(\aleph_\alpha)}$ καί στήν ἐφαρμογή ὁρισμένων βασικῶν πράξεων σέ διατακτικούς ἀριθμούς, ὅπως τόν καθορισμό τοῦ ὁρίου μιᾶς σειρᾶς ἀπ'αὐτούς. Ὁ $\aleph_\alpha^{cf(\aleph_\alpha)}$, καί ἄρα ὅλα τά γινόμενα καί οἱ δυνάμεις, εὔκολα ὑπολογίζεται[8] ἄν ὑποτεθεῖ ἡ "γενικευμένη ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς", δηλ. ἄν ὑποτεθεῖ ὅτι $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ γιά κάθε α, ἤ, ἰσοδύναμα, ὅτι ὁ ἀριθμός τῶν ὑποσυνόλων ἑνός συνόλου μέ δύναμη $\aleph_\alpha$ εἶναι $\aleph_{\alpha+1}$. Ἀλλά, χωρίς νά κάνουμε καμμιά ἀναπόδεικτη ὑπόθεση, δέν εἶναι γνωστό ὥστε κἄν ἄν ἀπό τή σχέση $m < n$ ἕπεται, ὅτι $2^m < 2^n$ (ἄν καί εἶναι τετριμμένο ὅτι ἕπεται $2^m \leq 2^n$), οὔτε ἀκόμη ἄν $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$.

3. Ἀναδιατύπωση τοῦ προβλήματος βασισμένη σέ μία ἀνάλυση τῆς θεμελίωσης τῆς συνολοθεωρίας καί ἀποτελέσματα πού ἔχουν ἐπιτευχθεῖ πρός αὐτή τήν κατεύθυνση.

Αὐτή ἡ ἔλλειψη ἀποτελεσμάτων, ἀκόμη καί στά πιό θεμελιώδη ἐρωτήματα αὐτοῦ τοῦ κλάδου, μπορεῖ νά ὀφείλεται μέχρις ἑνός σημείου σέ καθαρά μαθηματικές δυσκολίες. Φαίνεται ὅμως (πρβλ. παράγραφο 4 παρακάτω) ὅτι ὑπάρχουν καί βαθύτεροι λόγοι πίσω ἀπ'αὐτήν καί ὅτι μιά πλήρης λύση αὐτῶν τῶν προβλημάτων μπορεῖ νά ἐπιτευχθεῖ μόνο μέ μιά ἀνάλυση βαθύτερη (ἀπ'αὐτή πού οἱ μαθηματικοί εἶναι συνηθισμένοι νά κάνουν) τῆς σημασίας τῶν ὅρων πού ἐμφανίζονται σ'αὐτά (ὅπως "σύνολο", "μία πρός μία ἀντιστοιχία", κλπ.) καί τῶν ἀξιωμάτων στά ὁποῖα βασίζεται ἡ χρήση τους. Ἀρκετές τέτοιου εἴδους ἀναλύσεις ἔχουν ἤδη προταθεῖ. Ἄς δοῦμε τώρα τί προσφέρουν στό πρόβλημα.

Πρῶτα ἀπ'ὅλα ὑπάρχει ὁ διαισθητισμός (intuitionism) τοῦ Brouwer, μέ ἀποτελέσματα τελείως καταστρεπτικά. Ὅλη ἡ θεωρία τῶν $\aleph$ μεγαλυτέρων τοῦ $\aleph_1$ ἀπορρίπτεται σάν στερούμενη κάθε νοήματος[9]. Ἡ ἴδια ἡ εἰκασία τοῦ Cantor παίρνει ἀρκετές διαφορετικές ἑρμηνεῖες, οἱ ὁποῖες ἄν καί αὐτές καθ'ἑαυτές εἶναι πολύ ἐνδιαφέρουσες, εἶναι ἐν τούτοις, πολύ διαφορετικές ἀπό τό ἀρχικό πρόβλημα, καί ὁδηγοῦν σέ ἀπαντήσεις ἐν μέρει θετικές καί ἐν μέρει ἀρνητικές[10]. Πάντως δέν ἔχουν ξεκαθαρισθεῖ ἀκόμη ὅλα τά θέματα ἀρκετά σ'αὐτή τήν κατεύθυνση. Ἡ "ἡμι-διαισθητική" ἄποψη σύμφωνα μέ τίς κατευθύνσεις τῶν H. Poincaré καί H. Weyl[11] δέν θά διατηροῦσε οὐσιαστικά μεγαλύτερο κομάτι τῆς συνολοθεωρίας.

Αὐτή ἡ ἀρνητική στάση πρός τήν συνολοθεωρία τοῦ Cantor, πάντως, δέν εἶναι καθόλου ἕνα ἀναγκαῖο ἐπακόλουθο μιᾶς προσεκτικῆς ἐξέτασης τῆς θεμελίωσης της, ἀλλά μόνο ἕνα ἀποτέλεσμα ὁρισμένων φιλοσοφικῶν ἀντιλήψεων γιά τήν φύση τῶν μαθηματικῶν σύμφωνα μέ τίς ὁποῖες μαθηματικά ἀντικείμενα γίνονται δεκτά μόνο μέχρι τό σημεῖο πού αὐτά μποροῦν (ἤ πιστεύεται ὅτι μποροῦν) νά ἑρμηνευθοῦν σάν ἐνέργειες καί κατασκευές τῆς δικῆς μας διανόησης, ἤ τουλάχιστον νά διαπεραστοῦν τελείως ἀπό τήν διαίσθηση μας. Γιά κάποιον πού δέν συμμερίζεται αὐτές τίς γνῶμες ὑπάρχει μιά ἱκανοποιητική θεμελίωση τῆς συνολοθεωρίας τοῦ Cantor σ'ὅλη της τήν ἀρχική ἔκταση, δηλαδή ἡ ἀξιωματική συνολοθεωρία, κάτω ἀπ'τήν ὁποία τό λογικό σύστημα τῶν Principia Mathematica (μέ μιά κατάλληλη ἑρμηνεία) μπορεῖ νά ὑπαχθεῖ.

'Αρχικά θά μποροῦσε νά φανεῖ ὅτι τά συνολοθεωρητικά παράδοξα θά στέκονταν ἐμπόδιο σ'ἕνα τέτοιο ἐγχείρημα, ἀλλά προσεκτικώτερη ἐξέταση δείχνει ὅτι αὐτά δέν προκαλοῦν καμμιά δυσκολία. 'Αποτελοῦν ἕνα πολύ σοβαρό πρόβλημα, ὅμως ὄχι γιά τήν συνολοθεωρία τοῦ Cantor. Τά σύνολα πού ἐμφανίζονται καί εἶναι ἀναγκαῖα στά μαθηματικά (τουλάχιστον στά σημερινά μαθηματικά,συμπεριλαμβανόμενης ὅλης τῆς συνολοθεωρίας τοῦ Cantor) εἶναι σύνολα ἀκεραίων ἤ ρητῶν ἀριθμῶν (δηλαδή, ζευγαριῶν ἀκεραίων) ἤ πραγματικῶν ἀριθμῶν (δηλαδή, συνόλων ρητῶν ἀριθμῶν) ἤ συναρτήσεων πραγματικῶν ἀριθμῶν (δηλαδή, συνόλων ζευγαριῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν), κλπ. Ὅταν διατυπώνονται γενικά θεωρήματα γιά ὅλα τά σύνολα (ἤ τήν ὕπαρξη τέτοιων συνόλων), εἶναι δυνατόν αὐτά πάντοτε νά ἑρμηνευθοῦν χωρίς καμμιά δυσκολία νά σημαίνουν ὅτι ἰσχύουν γιά σύνολα ἀκεραίων, καθώς καί γιά σύνολα πραγματικῶν ἀριθμῶν, κλπ. (ἀντίστοιχα, ὅτι ὑπάρχουν σύνολα ἀκεραίων ἤ σύνολα πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἤ .... κλπ. μέ τήν ζητούμενη ἰδιότητα). Αὐτή ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου, ὅμως, σύμφωνα μέ τήν ὁποία ἕνα σύνολο μπορεῖ νά παραχθεῖ ἀπό τούς ἀκέραιους (ἤ ἀπό κάποια ἄλλα καλά-ὡρισμένα ἀντικείμενα) μέ ἐπαναληπτική ἐφαρμογή[12] τῆς πράξης "ὑποσύνολο τοῦ...."[13], καί ὄχι κάτι πού παράγεται μέ τό νά διαιρεθεῖ τό σύνολο ὅλων τῶν ὑπαρχόντων πραγμάτων σέ δύο κατηγορίες, δέν ἔχει ποτέ ὁδηγήσει σέ καμμιά ἀντινομία. Δηλαδή, ἡ τελείως "ἀφελής" καί ἄκριτη χρήση αὐτῆς τῆς ἔννοιας τοῦ συνόλου ἔχει ἀποδειχθεῖ μέχρι τώρα τελείως συμβιβαστή(14).

Ἀλλά, πέρα ἀπ'αὐτό, τά ἀξιώματα πού ἐπιτρέπουν τήν ἀδέσμευτη χρήση τῆς ἔννοιας τοῦ συνόλου, ἤ τουλάχιστον ἕνα μέρος αὐτῆς πού εἶναι ἀρκετό γιά ὅλες τίς μαθηματικές ἀποδείξεις πού ἔχουν παρουσιαστεῖ μέχρι τώρα, ἔχουν διατυπωθεῖ τόσο προσεκτικά στήν ἀξιωματική συνολοθεωρία(15),ὥστε τό ἐρώτημα του ἄν κάποια πρόταση ἕπεται ἀπό αὐτά μπορεῖ νά μετασχηματισθεῖ, μέ τή βοήθεια λογιστικοῦ συμβολισμοῦ, σ' ἕνα καθαρά συνδυαστικό πρόβλημα πού σχετίζεται μέ χειρισμό συμβόλων καί πού καί ὁ πιό ἀκραῖος διαισθητιστής θά παραδεχθεῖ σάν κάτι πού ἔχει νόημα. Ἔτσι τό πρόβλημα τοῦ συνεχοῦς τοῦ Cantor, ἀνεξάρτητα ἀπό τήν φιλοσοφική τοποθέτηση πού ἕνας ἔχει, ἀναντίρρητα διατηρεῖ τουλάχιστον αὐτό τό νόημα: νά ἀποφασισθεῖ ἄν μιά ἀπάντηση, καί στή περίπτωση ποιά ἀπάντηση, μπορεῖ νά συναχθεῖ ἀπό τά ἀξιώματα τῆς συνολοθεωρίας ὅπως ἔχουν διατυπωθεῖ στά συστήματα πού ἀναφέραμε.

Φυσικά, ἄν ἑρμηνευθεῖ μ'αὐτό τόν τρόπο, ὑπάρχουν (ὑποθέτοντας τό συμβιβαστό τῶν ἀξιωμάτων) a priori τρεῖς δυνατότητες γιά τήν εἰκασία τοῦ Cantor. Μπορεῖ νά εἶναι ἀποδείξιμη ἤ ἡ ἄρνησή της μπορεῖ νά εἶναι ἀποδείξιμη ἤ μπορεῖ νά εἶναι πρόβλημα ἀνεπίλυτο(16). Ἡ τρίτη δυνατότητα (πού εἶναι ἁπλά μιά ἀκριβής διατύπωση τῆς εἰκασίας πού ἀναφέραμε παραπάνω ὅτι οἱ δυσκολίες τοῦ προβλήματος ἴσως δέν εἶναι καθαρά μαθηματικές) εἶναι ἡ πιό πιθανή, καί ἡ ἀναζήτηση μιᾶς ἀπόδειξης γι'αὐτήν εἶναι αὐτή τή στιγμή ἕνας ἀπό τούς πιό πρόσφορους τρόπους ἀντιμετώπισης τοῦ προβλήματος. Ἕνα ἀποτέλεσμα πρός αὐτή τήν κατεύθυνση ἔχει ἤδη ἐπιτευχθεῖ, δηλαδή ὅτι ἡ ἄρνηση τῆς εἰκασίας τοῦ Cantor δέν εἶναι ἀποδείξιμη ἀπό τ'ἀξιώματα τῆς συνολοθεωρίας, ὑποθέτοντας ὅτι αὐτά τά ἀξιώματα εἶναι συμβιβαστά (πρβλ. παράγραφο 4).

Πρέπει νά σημειωθεῖ, πάντως, ὅτι ἀκόμη κι ἄν κάποιος ἐπιτύχει ν'ἀποδείξει καί τήν μή ἀποδειξιμότητα της, αὐτό (σέ ἀντιδιαστολή, π.χ., μέ τήν ἀπόδειξη τῆς ὑπερβατικότητας τοῦ Π) μέ κανένα τρόπο δέν θά ἀπαντήσει τό ἐρώτημα ὁριστικά. Μόνο κάποιος πού (σάν ἕνα διαισθητιστή) ἀρνεῖται ὅτι οἱ ἔννοιες καί τ'ἀξιώματα τῆς κλασσικῆς συνολοθεωρίας ἔχουν κάποιο νόημα (ἤ κάποιο καλά-ὁρισμένο νόημα) θά μποροῦσε νά εἶναι ἱκανοποιημένος μέ μιά τέτοια λύση, ὄχι κάποιος πού πιστεύει ὅτι αὐτά περιγράφουν μιά καλά-καθορισμένη πραγματικότητα. Γιατί σ'αὐτή τήν πραγματικότητα ἡ εἰκασία τοῦ Cantor πρέπει νά εἶναι ἤ ἀληθινή ἤ ψευδής, καί τό ἀνεπιλύσιμό της ἀπό τά ἀξιώματα ὅπως αὐτά εἶναι γνωστά σήμερα μπορεῖ μόνο νά σημαίνει ὅτι αὐτά τά ἀξιώματα δέν περιέχουν μιά πλήρη περιγραφή αὐτῆς τῆς πραγματικότητας. Καί μιά τέτοια πίστη δέν εἶναι μέ κανένα τρόπο χειμερική, ἐφ'ὅσον εἶναι δυνατόν νά περιγράψουμε τρόπους μέ τούς ὁποίους μιά ἀπόκριση στό ἐρώτημα, ἔστω κι ἄν αὐτό εἶναι ἀνεπίλυτο ἀπό τ'ἀξιώματα στή σημερινή τους μορφή, μπορεῖ παρ'ὅλ'αὐτά νά ἐπιτευχθεῖ.

Γιατί πρῶτα ἀπ'ὅλα τά ἀξιώματα τῆς συνολοθεωρίας δέν ἀποτελοῦν καθόλου ἕνα σύστημα ἀφ'ἑαυτοῦ κλειστό, ἀλλά, ἀκριβῶς τό ἀντίθετο, αὐτή ἡ ἴδια ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου(17) στήν ὁποία βασίζονται περιέχει τήν πρόταση τῆς ἐπέκτασής τους μέ νέα ἀξιώματα πού ἰσχυρίζονται τήν ὕπαρξη καί ἄλλων περαιτέρω ἐπαναλήψεων τῆς πράξης "σύνολο τοῦ....". Αὐτά τά ἀξιώματα μποροῦν νά διατυπωθοῦν καί σάν προτάσεις πού προβλέπουν τήν ὕπαρξη πολύ μεγάλων πληθαρίθμων ἤ (ἰσοδύναμα) σύνολα πού ἔχουν αὐτούς τούς πληθαρίθμους. Τό πιό ἁπλό ἀπ'αὐτά τά ἰ-σχυρά"ἀξιώματα τοῦ ἀπείρου" ἰσχυρίζεται τήν ὕπαρξη ἀπρόσι - των ἀριθμῶν (καί ἀριθμῶν ἀπρόσιτων μέ τήν ἰσχυρή ἔννοιαν), $> \aleph_0$. Τό τελευταῖο αὐτό ἀξίωμα, χονδρικά, δέν λέει τίποτα πε-ρισσότερο ἀπό τό ὅτι ἡ ὁλότητα ὅλων τῶν συνόλων πού παράγε-ται μέ ἀποκλειστική χρήση τῶν διαδικασιῶν σχηματισμοῦ συνό-λων πού ἐκφράζονται στά ὑπόλοιπα ἀξιώματα ἀποτελεῖ πάλι ἕνα σύνολο (καί, ἄρα, μιά νέα βάση γιά περαιτέρω ἐφαρμογή αὐτῶν τῶν διαδικασιῶν)(18). Ἄλλα ἀξιώματα τοῦ ἀπείρου ἔχουν δια-τυπωθεῖ ἀπό τόν P. Mahlo(19). Πολύ λίγα πράγματα εἶναι γνω-στά γι'αὐτό τό μέρος τῆς συνολοθεωρίας, ἀλλά ὁπωσδήποτε αὐ-τά τά ἀξιώματα δείχνουν καθαρά, ὄχι μόνο ὅτι τό ἀξιωματικό σύστημα τῆς συνολοθεωρίας στήν σημερινή του μορφή δέν εἶναι πλῆρες, ἀλλά ὅτι μπορεῖ νά ἐπεκταθεῖ χωρίς αὐθαιρεσία μέ νέα ἀξιώματα πού δέν εἶναι παρά ἡ φυσική συνέχιση τῆς σειρᾶς αὐτῶν πού ἔχουν θεωρηθεῖ μέχρι τώρα.

Ὅτι αὐτά τά ἀξιώματα ἔχουν συνέπειες καί πολύ μακρυά ἀπό τό πεδίο τῶν πολύ μεγάλων ἀπείρων ἀριθμῶν, πού εἶναι τό ἄμεσο ἀντικείμενο τους, εἶναι κάτι πού μπορεῖ ν'ἀποδειχθεῖ. Καθ' ἕνα ἀπ'αὐτά (στό μέτρο πού εἶναι γνωστά) μπορεῖ, μέ τήν προϋπόθεση τοῦ συμβιβαστοῦ, ν'ἀποδειχθεῖ ὅτι αὐξάνει τόν ἀ-ριθμόν τῶν ἐπιλυσίμων προτάσεων ἀκόμη καί στόν κλάδο τῶν Δι-οφαντικῶν ἐξισώσεων. Ὅσο ἀφορᾶ στήν ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς,μι-κρή εἶναι ἡ ἐλπίδα τῆς λύσης του μέ βάση αὐτά τά ἀξιώματα τοῦ ἀπείρου πού βασίζονται σέ γνωστές σήμερα ἀρχές (ἡ ἀπόδειξη πού ἀναφέραμε παραπάνω τῆς μή ἀποδειξιμότητας τῆς ὑπόθεσης τοῦ συνεχοῦς, π.χ., ἰσχύει καί μέ τήν παρουσία ὅλων αὐτῶν τῶν ἀξιωμάτων χωρίς καμμιά άλλαγή). 'Αλλά πιθανόν ύπάρχουν ἄλλα, βασισμένα σέ άρχές πού τώρα εἶναι ἄγνωστες. 'Επίσης εἶναι δυνατό νά ύπάρχουν, έκτός άπό τά συνηθισμένα άξιώματα, τά ά-ξιώματα τοῦ άπείρου καί τ'άξιώματα πού άναφέρονται στήν ύπο σημείωση (14), ἄλλα (μέχρι τώρα ἄγνωστα) άξιώματα συνολοθε-ωρίας, τά όποῖα μιά βαθύτερη κατανόηση τῶν έννοιῶν στή βάση τῆς λογικῆς καί τῶν μαθηματικῶν θά μᾶς έπιτρέψει νά τά άνα-γνωρίσουμε σάν ἤδη έμπεριεχόμενα μέσα σ'αύτές τίς ἔννοιες.

Πέρα άπ'αύτό ὅμως άκόμη καί άγνοώντας τήν έσωτερική ά-ναγκαιότητα κάποιου νέου άξιώματος, καί άκόμη καί σέ περί - πτωση πού δέν ἔχει καμμιά έσωτερική άναγκαιότητα, μιά άπό-φαση γιά τήν άλήθειά του εἶναι δυνατή καί μέ ἄλλο τρόπο, έ-παγωγικά μελετώντας τήν "έπιτυχία" του, δηλαδή τήν γονιμό - τητα τῶν συνεπειῶν του καί είδικώτερα τῶν "έπαληθευσίμων " συνεπειῶν, δηλαδή συνεπειῶν άποδεικτέων χωρίς τό νέο άξίωμα, εἶναι σημαντικά άπλούστερες καί εύκολότερο ν'άνακαλυφθοῦν , καί καθιστοῦν δυνατή τήν συμπύκνωση σέ μιά άπόδειξη πολλῶν διαφορετικῶν άποδείξεων. Τά άξιώματα τοῦ συστήματος τῶν πρα-γματικῶν άριθμῶν, πού ἔχουν άπορριφθεῖ άπό τούς διαισθητιστές ἔχουν μέ κάποια ἔννοια έπαληθευθεῖ σέ κάποιο μέτρο χάρη στό γεγονός ὅτι ἡ άναλυτική θεωρία άριθμῶν συχνά μᾶς έπιτρέπει ν'άποδείξουμε άριθμοθεωρητικά θεωρήματα πού κατόπιν μποροῦν νά έπαληθευθοῦν μέ στοιχειώδεις μεθόδους. Πάντως, ἕνας πολύ ύψηλότερος βαθμός έπαλήθευσης εἶναι δυνατός. Εἶναι δυνα - τόν νά ύπάρχουν άξιώματα τόσο πλούσια στίς έπαληθεύσιμες συ-νέπειές τους, ρίχνοντας τόσο πολύ φῶς σέ ἕνα όλόκληρο κλάδο καί προσφέροντάς μας τέτοιες ίσχυρές μεθόδους λύσης δοσμέ - νων προβλημάτων (καί άκόμη λύσεις, στό μέτρο πού αύτό εἶναι δυνατό, μέ κατασκευαστικό τρόπο) πού έντελῶς άνεξάρτητα ά-πό τήν έσωτερική τους άναγκαιότητα θά ἔπρεπε νά γίνουν δε-κτά μέ τήν ἴδια ίσχύ πού ἔχει κάθε καλά καθιερωμένη φυσική θεωρία.

4. Μερικές παρατηρήσεις σχετικές μέ τό ἐρώτημα: Μέ ποιά ἔννοια καί πρός ποιά κατεύθυνση εἶναι δυνατόν νά ἀναμένεται μιά λύση τῆς ὑπόθεσης τοῦ συνεχοῦς;

Εἶναι ὅμως τέτοιες θεωρήσεις κατάλληλες γιά τήν ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς; Ὑπάρχουν πραγματικά ἰσχυρές ἐνδείξεις γιά τό ἀνεπίλυτό του ἀπό τά γνωστά ἀξιώματα; Νομίζω ὅτι ὑπάρχουν τοὐλάχιστον δύο.

Ἡ πρώτη παρέχεται ἀπ'τό γεγονός ὅτι ὑπάρχουν δύο πολύ διαφορετικές κλάσεις ἀντικειμένων πού καί οἱ δύο ἱκανοποιοῦν ὅλα τά ἀξιώματα τῆς συνολοθεωρίας πού ἔχουν διατυπωθεῖ μέχρι τώρα. Ἡ μία κλάση ἀποτελεῖται ἀπό τά σύνολα πού εἶναι ὁρίσιμα (definable) μέ κάποιο τρόπο ἀπό ἰδιότητες τῶν στοιχείων τους[20], ἡ ἄλλη ἀπό σύνολα μέ τήν ἔννοια τῶν αὐθαίρετων οἰκογενειῶν, ἀνεξάρτητα ἀπό τό ἄν, ἤ πῶς μποροῦν νά ὁριστοῦν. Τώρα, προτοῦ ἀποφασισθεῖ ποιά ἀντικείμενα θ'ἀπαριθμηθοῦν, καί μέ βάση ποιές μία-πρός-μία ἀντιστοιχία, θά ἦταν δύσκολο ν'ἀναμένει κανείς νά καθορίσει τόν ἀριθμό τους (ἐκτός ἴσως σέ περίπτωση κάποιας εὐχερῆς σύμπτωσης). Ἄν, ὅμως, κάποιος πιστεύει ὅτι δέν ἔχει νόημα νά μιλᾶμε γιά σύνολα παρά γιά αὐτά πού καθορίζονται ἀπό ὁρίσιμες ἰδιότητες, ἤ τουλάχιστον ὅτι δέν ὑπάρχουν ἄλλα σύνολα, τότε βέβαια θά ἦταν δύσκολο ν'ἀναμένει τήν ἐπίλυση ἐκτός ἀπό ἕνα μικρό μέρος ἀπό προβλήματα τῆς συνολοθεωρίας χωρίς νά κάμει χρήση αὐτοῦ, κατά τή γνώμη του οὐσιαστικοῦ, χαρακτηριστικοῦ τῶν συνόλων, δηλαδή, ὅτι ὅλα παράγονται ἀπό (καί μέ κάποια ἔννοια ἀκόμη καί ταυτίζονται μέ) ὁρίσιμες ἰδιότητες. Αὐτή, ὅμως, ἡ χαρακτηριστική ἰδιότητα τῶν συνόλων οὔτε διατυπώνεται σέ συγκεκριμένη μορφή οὔτε περιέχεται ἔμμεσα στά παραδεκτά ἀξιώματα τῆς συνολοθεωρίας. Έτσι από οποιαδήποτε από τίς δύο απόψεις, καί άν επιπρόσθετα ένας λαμβάνει υπ'όψη όσαν λέχθηκαν παραπάνω στήν παράγραφο 2, είναι πιθανοφανές ότι τό πρόβλημα τοῦ συνεχοῦς δέν θά είναι δυνατόν νά λυθεῖ μέ τά ἀξιώματα πού ἔχουν διατυπωθεῖ μέχρι τώρα, ἀλλά, ἀπ'τήν ἄλλη μεριά, μπορεῖ νά ἔχει λύση μέ τή βοήθεια ἑνός ἀξιώματος πού θά διατυπώνει ἤ τουλάχιστον θά περιέχει ἔμμεσα κάτι σχετικό γιά τήν ὁρισιμότητα τῶν συνόλων[21].

Τό δεύτερο μισό αὐτῆς τῆς εἰκασίας ἔχει ἤδη ἐπαληθευτεῖ· συγκεκριμένα, ἡ ἔννοια τῆς ὁρισιμότητας πού μόλις ἀναφέρθηκε (πού εἶναι καί ἡ ἴδια ὁρίσιμη ὡς πρός τίς πρωταρχικές ἔννοιες τῆς θεωρίας συνόλων) καθιστᾶ δυνατή τήν ἀπόδειξη τῆς γενικευμένης ὑπόθεσης τοῦ συνεχοῦς ἀπ'τό ἀξίωμα ὅτι κάθε σύνολο εἶναι ὁρίσιμο κατ'αὐτή τήν ἔννοια[22]. Ἀφοῦ αὐτό τό ἀξίωμα (ἄς τό καλέσουμε "Α") καταλήγει νά εἶναι ἀποδείξιμα συμβιβαστό μέ τ'ἄλλα ἀξιώματα, μέ τήν ὑπόθεση τῆς συνέπειας αὐτῶν τῶν ἀξιωμάτων, αὐτό τό ἀποτέλεσμα (ἀνεξάρτητα ἀπό φιλοσοφικές ἀπόψεις) δείχνει τή συνέπεια τῆς ὑπόθεσης τοῦ συνεχοῦς μέ τά ἀξιώματα τῆς θεωρίας συνόλων, δεδομένου ὅτι αὐτά τά ἴδια τά ἀξιώματα εἶναι συνεπή[23]. Αὐτή ἡ ἀπόδειξη, εἶναι ἀνάλογη στή δομή της μέ τήν ἀπόδειξη συνέπειας γιά τήν μή Εὐκλείδια γεωμετρία, μέ μέσο ἕνα μοντέλο μέσα στήν Εὐκλείδια γεωμετρία, στό ὅτι ἀκολουθεῖ ἀπ'τά ἀξιώματα τῆς θεωρίας συνόλων ὅτι τά σύνολα πού εἶναι ὁρίσιμα μέ τήν παραπάνω ἔννοια, σχηματίζουν ἕνα μοντέλο γιά τή θεωρία συνόλων, στό ὁποῖο ἡ πρόταση Α καί συνεπῶς καί ἡ γενικευμένη ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς ἀληθεύουν. Ἀλλά ὁ ὁρισμός τῆς "ὁρισιμότητας" μπορεῖ νά διατυπωθεῖ ἔτσι, ὥστε νά γίνεται ὁρισμός μιᾶς ἔννοιας "συνόλου" καί μιᾶς σχέσης "στοιχεῖο τοῦ" (πού ἱκανοποιοῦν τά ἀξιώματα τῆς θεωρίας συνόλων) ὡς πρός ἐντελῶς διαφορετικές έννοιες, δηλ. τήν έννοια τῶν "διατακτικῶν ἀριθμῶν" μέ τό νόημα στοιχείων διαταγμένων μέ κάποια σχέση "μεγαλύτερου" καί "μικρότερου", αὐτή τήν ἴδια τή διάταξη καί τήν έννοια τῶν "ἀναδρομικά ὁρισμένων συναρτήσεων διατα - κτικῶν ἀριθμῶν" πού μπορεῖ νά θεωρηθεῖ σάν πρωταρχική καί νά περιγραφεῖ ἀξιωματικά μέ κάποια ἐπέκταση τῶν ἀξιωμά - των τοῦ Peano(24). (Σημειῶστε ὅτι αὐτό δέν ἐφαρμόζεται στήν ἀρχική μου διατύπωση πού παρουσιάστηκε στά προανα - φερθέντα ἄρθρα, γιατί ἐκεῖ ἡ γενική έννοια τοῦ "συνόλου" μέ τή σχέση στοιχείων του συναντιέται στόν ὁρισμό τοῦ "ὁρίσιμου συνόλου", ἄν καί τά ὁρίσιμα σύνολα παραμένουν τά ἴδια, ἄν, κατόπιν, στόν ὁρισμό τῆς "ὁρισιμότητας" ὁ ὅρος "σύνολο" ἀντικατασταθεῖ ἀπ'τόν "ὁρίσιμο σύνολο").

Ἕνα δεύτερο ἐπιχείρημα, ὑπέρ τοῦ ὅτι τό πρόβλημα τοῦ συνεχοῦς εἶναι ἄλυτο (ἀδύνατο νά λυθεῖ) στή βάση τῶν συνηθισμένων ἀξιωμάτων, μπορεῖ νά βασιστεῖ σέ συγκεκριμένα γεγονότα (ἄγνωστα ἤ ἀνύπαρκτα στόν καιρό τοῦ Cantor) πού φαίνονται νά δείχνουν ὅτι ἡ εἰκασία τοῦ Cantor θά ἀποδειχτεῖ ὅτι εἶναι λανθασμένη(25). γιά μιά ἀρνητική ἀπόκριση τό ἐρώτημα εἶναι (ὅπως μόλις ἑρμηνεύτηκε) ἀποδείξιμα ἀδύνατο στή βάση τῶν ἀξιωμάτων ὅπως εἶναι γνωστά σήμερα.

Ὑπάρχει ἕνας ἀξιοσημείωτος ἀριθμός γεγονότων αὐτοῦ τοῦ εἴδους πού, βέβαια, ταυτόχρονα κάνουν πιθανό ὅτι ὅλα τά σύνολα δέν εἶναι ὁρίσιμα μέ τήν παραπάνω έννοια. (26). Ἕνα τέτοιο γεγονός, γιά παράδειγμα, εἶναι ἡ ὕπαρξη ὁρισμένων ἰδιοτήτων τῶν σημειοσυνόλων (πού βεβαιώνουν μιά ἄκρα σπανιότητα τῶν θεωρούμενων συνόλων) γιά τίς ὁποῖες ἔχει ἐπιτευχθεῖ ἡ ἀπόδειξη τῆς ὕπαρξης μή ἀριθμήσιμων συνόλων πού ἔχουν αὐτές τίς ἰδιότητες, ἀλλά πού δέν εἶναι καθόλου προφανές τό πῶς μέ τή χρήση τους θά μποροῦσε νά ἀναμένεται ἡ ἀπόδειξη τῆς ὕπαρξης παραδειγμάτων τῆς δύνα -

μης τοῦ συνεχοῦς.'Ιδιότητες αὐτοῦ τοῦ τύπου (ὑποσυνόλων μιᾶς εὐθείας) εἶναι: (1) νά εἶναι τῆς πρώτης **κατηγορίας** ἐπί κάθε τέλειου συνόλου[27],(2) νά μεταφέρονται σέ ἕνα μηδενικό σύνολο ἀπό κάθε συνεχή, μία πρός μία ἀπεικόνιση τῆς εὐθείας στόν ἑαυτό της[28]. Μιά ἄλλη ἰδιότητα παρόμοιας φύσης εἶναι ἐκείνη τοῦ νά καλύπτονται ἀπό ἄπειρα τό πλῆθος διαστήματα ὁποιωνδήποτε μηκῶν.'Αλλά, σ'αὐτή τήν τελευταία περίπτωση δέν ἔχει ἀποδειχθεῖ, ἀκόμα, ἡ ἀπόδειξη τῆς ὕπαρξης μή ἀριθμήσιμων παραδειγμάτων.'Από τήν ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς, ὅμως, προκύπτει ὅτι ὑπάρχουν καί στίς τρεῖς περιπτώσεις, ὄχι μόνο παραδείγματα τῆς δύναμης τοῦ συνεχοῦς,[29] ἀλλά ἀκόμα καί τέτοια πού μεταφέρονται στούς ἑαυτούς τους (μέχρι ἀριθμήσιμα τό πλῆθος σημεῖα)ἀπό κάθε μεταφορά τῆς εὐθείας[30].

Καί αὐτή δέν εἶναι ἡ μόνη παράδοξη συνεπαγωγή τῆς ὑπόθεσης τοῦ συνεχοῦς."Αλλες, γιά παράδειγμα, εἶναι ὅτι ὑπάρχουν (1) ὑποσύνολα μιᾶς εὐθείας μέ τή δύναμη τοῦ συνεχοῦς πού καλύπτονται (μέχρι ἀριθμήσιμα τό πλῆθος σημεῖα) ἀπό κάθε πυκνό σύνολο διαστημάτων, ἤ (μέ ἄλλα λόγια) πού δέν περιέχουν κανένα μή ἀριθμήσιμο ὑποσύνολο πουθενά πυκνό στήν εὐθεία[31], (2) ὑποσύνολα μιᾶς εὐθείας μέ τή δύναμη τοῦ συνεχοῦς πού δέν περιέχουν κανένα μή ἀριθμήσιμο μηδενικό σύνολο[32], (3) ὑποσύνολα χώρου Hilbert μέ τή δύναμη τοῦ συνεχοῦς πού δέν περιέχουν κανένα μή ἀριθμήσιμο ὑποσύνολο πεπερασμένης διάστασης[33] μιά ἄπειρη ἀκολουθία A^i ἀναλύσεων τυχόντος συνόλου M μέ τή δύναμη τοῦ συνεχοῦς σέ συνεχῆ τό πλῆθος ἀμοιβαία ἀποκλειόμενα σύνολα A^i_x τέτοια, ὥστε, μέ ὁποιονδήποτε τρόπο καί ἄν ἐκλεχθεῖ ἕνα σύνολο $A^i_{x_i}$ γιά κάθε i, τό $\Pi_i\ (M-A^i_{x_i})$ νά εἶναι πάντα ἀριθμήσιμο[34].'Ακόμα καί ἄν στίς (1)-(4) ἡ "δύναμη τοῦ συνεχοῦς" ἀντικατασταθεῖ ἀπό τό " $\aleph_1$", αὐτές οἱ προτάσεις εἶναι πολύ λίγο εὔλογες· ἡ πρόταση πού προκύπτει ἀπό τήν (3) μ'αὐτό τόν τρόπο εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν (3).

Μπορεῖ νά πεῖ κανείς ὅτι πολλά ἀπ'τά ἀποτελέσματα τῆς θεωρίας σημειοσυνόλων πού λαμβάνονται χωρίς τή χρήση τῆς ὑπόθεσης τοῦ συνεχοῦς εἶναι, ἐπίσης, πολύ ἀπροσδόκητα καί ἀπίθανα(35). Ἀλλά ὅσο αὐτό μπορεῖ νά ἀληθεύει, ἡ κατάσταση εἶναι διαφορετική ἐκεῖ, στό ὅτι σ'αὐτές τίς περιπτώσεις (ὅπως π.χ. στίς καμπύλες Peano) ἡ ἐμφάνιση τοῦ ἀντίθετου, μπορεῖ γενικά νά ἑρμηνευτεῖ ἀπό μιά ἔλλειψη συμφωνίας μεταξύ τῶν διαισθητικῶν γεωμετρικῶν μας ἐννοιῶν καί τῶν ἀντίστοιχων συνολοθεωρητικῶν στά θεωρήματα. Ἐπίσης, εἶναι πολύ ὕποπτο, ὅτι σέ ἀντίθεση μέ τίς πολυάριθμες εὔλογες προτάσεις πού συνεπάγονται τήν ἄρνηση τῆς ὑπόθεσης τοῦ συνεχοῦς, οὔτε μία εὔλογη πρόταση εἶναι γνωστή πού θά συνεπαγόταν τήν ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς. Ἔτσι θά μποροῦσε κάποιος εὔλογα νά ὑποψιάζεται ὅτι ὁ ρόλος τῆς ὑπόθεσης τοῦ συνεχοῦς στή θεωρία συνόλων θά εἶναι αὐτός, ὅτι τελικά θά ὁδηγήσει στήν ἀνακάλυψη νέων ἀξιωμάτων πού θά κάνουν πιθανή τήν ἀναίρεση τῆς εἰκασίας τοῦ Cantor.

ΥΠΟΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

(1) Σχετικά μέ τό ἐρώτημα γιατί δέν ὑπάρχει ἕνα σύνολο ὅλων τῶν πληθαρίθμων, δές ὑποσημείωση (12).

(2) Γιά ν'ἀποδείξουμε αὐτό τό θεώρημα τό ἀξίωμα τῆς ἐπιλο - γῆς(δές: A.Fraenkel, Einteituung in die Mengenlehre,3rd ed. Berlin, 1928, σελ. 288) εἶναι ἀναγκαῖο, ἀλλά μπορεῖ νά λεχθεῖ ὅτι αὐτό τό ἀξίωμα εἶναι, στή σημερινό στάδιο γνώσης, ἀκριβῶς τόσο καλά-θεμελιωμένο ὅσο καί τό σύστημα τῶν ἄλλων ἀξιωμάτων. Ἔχει ἀποδειχθεῖ συμβιβαστό. μέ τήν προϋπόθεση ὅτι τά ἄλλα ἀξιώματα εἶναι συμβιβαστά(δές τό ἄρθρο μου πού ἀναφέρεται στήν ὑποσημείωση 13). Εἶναι ἀκριβῶς τόσο προφανές ὅσο καί τά ἄλλα ἀξιώματα γιά ἄπειρες οἰκογένειες καί γιά σύνολα πού καθορίζονται ἀπό ὁρίσιμες ἰδιότητες εἶναι ἐπίσης ἀποδείξιμο γιά ἐκεῖνες τίς ἔννοιες ὁρισιμότητας γιά τίς ὁποῖες, στό σημερινό ἐπίπεδο γνώσης, εἶναι δυνατό ν'ἀποδείξουμε τά ἄλλα ἀξιώματα, δηλαδή, ἐκεῖνες πού δίδονται στίς ὑποσημειώσεις (17) καί (21).

(3) Δές F. Hausdorff, Mengenlehre,1st ed (1914), σελ.68. Τό θεώρημα ἀνακλύφθηκε ἀπό τόν J.König, ὁ ὁποῖος ὅμως ἰσχυρίσθηκε περισσότερα ἀπ'ὅσα τήν πραγματικότητα εἶχε ἀποδείξει (δές Math.Ann.60 (1904), σελ.177).

(4) Δές τόν κατάλογο τῶν ὁρισμῶν στό τέλος τοῦ ἄρθρου.

(5) Δές F. Hausdorff, Mengenlehre, 3rd ed. (1935), σελ. 32. Ἀκόμη καί γιά συμπληρώματα ἀναλυτικῶν συνόλων τό ἐρώτημα εἶναι ἀνοικτό ἐπί τοῦ παρόντος, καί μπορεῖ μόνο ν'ἀποδειχθεῖ ὅτι αὐτά ἔχουν ἄν εἶναι ἄπειρα ἤ τή δύναμη $\aleph_0$ ἤ $\aleph_1$ τοῦ συνεχοῦς (δές C.Kuratowski, Topologie I , Warszawa-Lwow, 1933, σελ.246):

(6) Δές W.Sierprinski, Hypothese du Continu, Warsaw, 1934.

(7) Αὐτή ἡ ἀναγωγή μπορεῖ νά ἐπιτευχθεῖ χάρη σέ ἀποτελέσματα καί μεθόδους σ'ἕνα ἄρθρο τοῦ A.Tarski δημοσιευμένο στό Fund.Math.7 (1925), σελ.1.

(8) Γιά κανονικούς ἀριθμούς $\aleph_\alpha$ ἔχουμε ἄμεσα

$$\aleph_\alpha^{cf(\aleph_\alpha)} = \aleph_\alpha^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}.$$

(9) Δές L.E.J. Brouwer, Atti dol IV Congresso Interazionale dei Matematici (Roma 1908), σελ.569.

(10) Δές L.E.J. Brouwer, Over de gondslagen der wiskunde(Amsterdam and Leipzig, 1907) I, 9; III, 2.

(11) Δές H. Weyl, Das Kontinuum, 2nd ed. 1932.

(12) Σ'αὐτή τή φράση περιλαμβάνεται ἐπίσης ἡ ὑπερπεπερασμένη ἐπανάληπτική διαδικασία ὅτι, δηλαδή ἡ ὁλότητα τῶν συνόλων πού δημιουργήθηκε μέ πεπερασμένη ἐπαναληπτική διαδικασία σχηματίζει πάλι ἕνα σύνολο καί μιά βάση γιά μιά παραπέρα ἐφαρμογή τῆς πράξης "σύνολο τοῦ".

(13) 'Η πράξη "σύνολο τῶν x" δέν μπορεῖ νά ὁριστεῖ ἱκανοποιητικά (τουλάχιστον στό παρόν στάδιο γνώσης), ἀλλά μόνο νά παραφραστεῖ μέ ἄλλες ἐκφράσεις πού περιλαμβάνουν πάλι τήν ἔννοια τοῦ συνόλου, ὅπως: "πλῆθος τῶν x", "συνδυασμός ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ ἀπ'τά x", "μέρος τῆς ὁλότητας τῶν x"· ἀλλά ἀντίθετα ἀπ'τήν ἔννοια τοῦ συνόλου γενικά (ἄν θεωρηθεῖ σάν ἀρχική), ἔχουμε μιά σαφή ἀντίληψη αὐτῆς τῆς πράξης.

(14) 'Ακολουθεῖ ἀμέσως ἀπ'τήν ἑρμηνεία τοῦ ὅρου "σύνολο",ὅτι ἕνα σύνολο ὅλων τῶν συνόλων ἤ ἄλλων συνόλων μιᾶς παρόμοιας ἐπέκτασης δέν μπορεῖ νά ὑπάρχει, ἀφοῦ κάθε σύνολο

πού σχηματίζεται μ'αύτό τόν τρόπο, άπαιτεῖ άμέσως παραπέρα έφαρμογή τῆς πράξης "σύνολο τοῦ" καί, κατά συνέπεια, τήν ὕπαρξη μεγαλύτερων συνόλων.

(15) Δές π.χ. P. Bernays, A System of axiomatic set theory, J. Symb. Log. 2 (1937) σελ. 65, 6 (1941), σελ. 1, τ(1442) σελ. 65 σελ. 133, 8 (1943) σελ. 89. J.von Neumann, Eine Axiomatisi erung der Mengenlehre, J. reine u. angew. Math. 154 (1925) σελ. 219, έπίσης ibid 160 (1929) σελ. 227, Math. Zs 27(1928) σελ.669. K.Gödel, The Consistency of the Continuum Hypothesis (Ann. Math. Studies No 3) 1940.

(16) Στήν περίπτωση πού τά άξιώματα εἶναι άσυμβίβαστα, ἡ τελευταία άπ'τίς τέσσερεις a priori πιθανές έναλλακτικές άπαντήσεις γιά τήν εἰκασία τοῦ Cantor θά ἰσχύει, δηλαδή, θά εἶναι τότε καί άποδείξιμη καί ἡ ἄρνηση της θά εἶναι άποδείξιμη άπ'τά άξιώματα τῆς θεωρίας συνόλων.

(17) Ὅμοια, έπίσης καί ἡ ἔννοια "ἰδιότητα τοῦ συνόλου" (ὁ δεύτερος άπ'τούς πρωταρχικούς ὅρους τῆς θεωρίας συνόλων) μπορεῖ σταθερά νά αὐξάνεται καί έπιπλέον ἔννοιες ὅπως "ἰδιότητα τῆς ἰδιότητας τοῦ συνόλου" κλπ. νά εἰσάγονται, μέ τίς όποῖες νέα άξιώματα νά σχηματίζονται, πού, ὅμως, ὡς πρός τίς συνέπειές τους γιά προτάσεις πού άναφέρονται σέ περιορισμένα πεδία συνόλων (ὅπως ἡ ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς), θά περιέχονται στά άξιώματα πού έξαρτῶνται άπ'τήν ἔννοια τοῦ συνόλου.

(18) Βλ. E. Zermelo, Fund. Math. 16(1930) σελ. 29.

(19) Βλ. Ber. Verh. Sächs. Ges. Wiss. 63 (1911) σελ. 190-200, 65 (1913) σελ. 269-276. 'Από τήν παρουσίαση τοῦ θέματος άπ'τόν Mahlo, δέν φαίνεται ὅτι οἱ άριθμοί πού

ορίζει υπάρχουν πραγματικά.

(20) Συγκεκριμένα, ορίσιμα "ώς πρός τούς διατακτικούς ἀριθμούς" (δηλαδή, μιλώντας χωρίς αὐστηρότητα,μέ τήν ὑπόθεση ὅτι γιά κάθε διατακτικό ἀριθμό δίνεται ἕνα σύμβολο πού τόν ὑποδηλώνει), μέ τή χρήση ὑπερπερα - σμένων ἀναδρομῶν, τῶν πρωταρχικῶν ὅρων τῆς λογικῆς καί τῆς σχέσης $\in$ (τοῦ ἀνήκειν), δεχόμενοι - ὅμως-σάν στοιχεῖα συνόλων καί πεδίων ὁρισμοῦ ποσοδεικτῶν μόνο σύνολα πού ἔχουν ὁριστεῖ προηγούμενα. Δές τά ἄρθρα μου πού ἀναφέρονται στίς σημειώσεις 13 καί 19 ὅπου μία ἀκριβῶς ἰσοδύναμη, ἄν καί λίγο διαφορετική στόν ὁρισμό της, ἔννοια τῆς ὁρισιμότητας (μέ τό ὄνομα "κατασκευαστικότητα") χρησιμοποιεῖται. Τό παράδοξο τοῦ Richard, βέβαια, δέν ἐφαρμόζεται γι' αὐτό τό εἶδος τῆς ὁρισιμότητας, ἀφοῦ ἡ ὁλότητα τῶν διατακτικῶν ἀριθμῶν, δέν εἶναι ἀριθμήσιμη.

(21) Ἡ προσπάθεια τοῦ D. Hilbert γιά μία λύση στό πρόβλημα τοῦ συνεχοῦς (δές Math. Ann. 95(1926) σελ.161), πού, ὅμως ποτέ δέν ὁλοκληρώθηκε, βασιζόταν ἐπίσης σέ μιά θεώρηση ὅλων τῶν πιθανῶν ὁρισμῶν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

(22) Ἀπ'τήν ἄλλη μεριά, ἀπό ἕνα ἀξίωμα κατά κάποια ἔννοια εὐθέως ἀντίθετο ἀπ'αὐτό, ἡ ἄρνηση τῆς εἰκασίας τοῦ Cantor θά μποροῦσε, ἴσως, ν'ἀποδειχτεῖ.

(23) Βλ. τό ἄρθρο μου πού ἀναφέρεται στή σημείωση (13) καί στά Proc. Nat. Ac. Sci. 25(1939) σελ. 220. Χρησιμοποιῶ αὐτή τήν εὐκαιρία γιά νά διορθώσω ἕνα λάθος στό συμβολισμό καί ἕνα τυπογραφικό λάθος πού ὑπῆρχαν στό τελευταῖο αὐτό ἄρθρο: στούς στίχους 25-29 τῆς σελίδας 221, 4-6 καί 10 τῆς σελ. 22, 11-19

σελ. 223 τό γράμμα α θά πρέπει ν'άντικατασταθεῖ (ὅπου ὑπάρχει) μέ τό μ. 'Επίσης στό θεώρημα 6, σελ. 222 τό σύμβολο "Ξ " θά πρέπει νά μπεῖ μεταξύ τῶν $\Phi_{\alpha}(x)$ καί $\Phi_{\alpha}(x')$. Γιά μιά λεπτομερειακή ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος πρέπει νά συμβουλευτεῖ κανείς τό ἄρθρο πού ἀναφέρεται στή σημείωση 13.

(24) Γιά μιά τέτοια ἐπέκταση δές: A.Tarski Ann. Soc.Pol. Math. 3(1924) σελ. 148, ὅπου, ὅμως, ἡ γενική ἔννοια "σύνολο τῶν διατακτικῶν ἀριθμῶν" χρησιμοποιεῖται στά ἀξιώματα· αὐτό θά μποροῦσε ν'ἀποφευχθεῖ χωρίς ἀπώλεια στά ἀποδεικτά θεωρήματα, μέ τόν περιορισμό ἀπ' τήν ἀρχή σέ ἀναδρομικά ὁρίσιμα σύνολα διατακτικῶν ἀριθμῶν.

(25) 'Απόψεις πού τείνουν σ'αὐτή τήν κατεύθυνση ἔχουν ἐκφραστεῖ ἐπίσης ἀπ'τόν N. Lusin στό Fund. Math.25(1935) σελ. 129 καί πέρα. Δές ἐπίσης: W. Sierpinski, ibid σελ. 132.

(26) "Οτι ὅλα τά σύνολα εἶναι "ὁρίσιμα ὡς πρός τούς διατακτικούς ἀριθμούς" ἄν ὅλες οἱ διαδικασίες ὁρισμοῦ(δηλ. ἐπίσης, ποσοτικός προσδιορισμός καί ἡ πράξη $\hat{x}$ ὡς πρός ὅλα τά σύνολα, ἀνεξάρτητα ἀπ'τό ἄν ἔχουν (ὁριστεῖ) ἤ μποροῦν νά ὁριστοῦν) εἶναι δεκτές, θά μποροῦσε νά ἀναμένεται, ἀλλά δέν θά δικαιωνόταν καθόλου τό νά τό θεωρήσουμε σάν ἀξίωμα. 'Αξίζει νά σημειωθεῖ ὅτι, ἡ ἀπόδειξη πώς ἡ ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς ἰσχύει γιά τά ὁρίσιμα σύνολα ἤ πώς ἕπεται ἀπό τήν ὑπόθεση ὅτι ὅλα τά σύνολα εἶναι ὁρίσιμα, δέν ἰσχύει γι'αὐτό τό εἶδος ὁρισιμότητας, ἄν καί ἡ ὑπόθεση ὅτι αὐτές οἱ δύο ἔννοιες τῆς ὁρισμότητας εἶναι ἰσοδύναμες εἶναι, βέβαια, ἀποδείξιμα συμβιβαστή μέ τ'ἀξιώματα.

(27) βλ. W. Sierpiński, Fund. Math. 22 (1934) σελ. 270 καί C. Kuratowski, Topologie I, σελ. 269 καί πέρα.

(28) Βλ. N. Lusin καί W.Sierpinski, Bull. Internat.Ac. Sci. Cracovie 1918 σελ. 35 καί W.Siespinski,Fund. Math. 22 (1934) σελ. 270.

(29) Γιά τήν τρίτη περίπτωση βλ.: l.c. 6, σελ. 39, Th 1.

(30) Βλ. W. Sierpinski, Ann. Scuol. Norm. Sup. Pisa 4 (1935) σελ. 43.

(31) Βλ. N.Lusin, C.R. Paris 158 (1914) σελ. 1259.

(32) Βλ. W. Sierpinski, Fund. Math. 5 (1924) σελ. 184.

(33) Βλ. W. Hurewicz, Fund, Math. 19 (1932) σελ. 8.

(34) Βλ. S. Braun καί W. Sierpinski, Fund. Math. 19 (1932) σελ. 1, πρόταση (Q). Αὐτή ἡ πρόταση καί ἐκείνη μέ τήν ἀρίθμηση (3) στό κείμενο, εἶναι ἰσο - δύναμες μέ τήν ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς.

(35) Βλ. π.χ. L. Blumenthal, Am. Math. Monthly 47(1940) σελ. 346.

ΟΡΙΣΜΟΙ ΜΕΡΙΚΩΝ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΤΕΧΝΙΚΟΥΣ ΟΡΟΥΣ

Οἱ ὁρισμοί 4-12 ἀναφέρονται σέ ὑποσύνολα μιᾶς εὐθείας, ἀλλά μποροῦν νά μεταφερθοῦν "κατά γράμμα" σέ Εὐκλείδιους χώρους ὁποιασδήποτε διάστασης· οἱ ὁρισμοί 13-14 ἀναφέρονται σέ ὑποσύνολα Εὐκλείδιων χώρων.

1) Ὀνομάζω "χαρακτήρα ὁμοτελικότητας" ἑνός πληθαρίθμου m (συμβολισμός "cf(m)") τόν μικρότερο ἀριθμό n τέτοιον, ὥστε ὁ m εἶναι τό ἄθροισμα n ἀριθμῶν < m.

2) Ἕνας πληθάριθμος m εἶναι κανονικός ἄν cf(m)= m, ἀλλοιώτικα εἶναι ὄχι κανονικός.

3) Ἕνας ἄπειρος πληθάριθμος m εἶναι ἀπρόσιτος ἄν εἶναι κανονικός καί δέν ἔχει ἄμεσο προηγούμενο (δηλ. ἄν, παρ' ὅλο πού εἶναι ὅριο ἀριθμῶν < m δέν εἶναι ὅριο λιγότερων ἀπό m τέτοιων ἀριθμῶν)· εἶναι ἀπρόσιτος κατά τήν ἰσχυρή ἔννοια ἄν κάθε γινόμενο (καί συνεπῶς, ἐπίσης, κάθε ἄθροισμα) λιγότερων ἀπό m ἀριθμῶν < m εἶναι < m . (βλ. W. Sierpinski καί A. Tarski, Fund. Math. 15(1930) σελ.292. A. Tarski, Fund Math. 30 (1938) σελ. 68). Ἀπό τή γενικευμένη ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς προκύπτει ἡ ἰσοδυναμία αὐτῶν τῶν δύο ἐννοιῶν. Αὐτή ἡ ἰσοδυναμία, ὅμως, εἶναι μιά λιγότερη ἰσχυρή καί πολύ εὔλογη πρόταση. Ὁ $\aleph_0$ προφανῶς εἶναι ἀπρόσιτος καί κατά τίς δύο ἔννοιες. Ὅσο γιά πεπερασμένους ἀριθμούς, τό 0 καί τό 2 καί κανένας ἄλλος εἶναι ἀπρόσιτοι κατά τήν ἰσχυρή ἔννοια (μέ τόν παραπάνω ὁρισμό), πράγμα πού σημαίνει ὅτι τό ἴδιο θά συμβαίνει γιά τή σωστή ἐπέκταση τῆς ἔννοιας "ἀπρόσιτος" σέ πεπερασμένους ἀριθμούς.

4) Ἕνα σύνολο διαστημάτων εἶναι πυκνό ἄν κάθε διάστημα ἔχει κοινά σημεῖα μέ κάποιο διάστημα τοῦ συνόλου. (Τά ἄκρα

ἑνός διαστήματος δέν θεωροῦνται σάν σημεῖα τοῦ διαστήματος).

5) Ἕνα μηδενικό σύνολο εἶναι ἕνα σύνολο πού μπορεῖ νά καλυφθεῖ μέ ἄπειρα σύνολα διαστημάτων μέ αὐθαίρετα μικρό ἄθροισμα μηκῶν.

6) Μιά περιοχή ἑνός σημείου P εἶναι ἕνα διάστημα πού περιέχει τό P.

7) Ἕνα ὑποσύνολο A τοῦ B εἶναι πυκνό στό B ἄν κάθε περιοχή κάθε σημείου τοῦ B περιέχει σημεῖα τοῦ A.

8) Ἕνα σημεῖο P βρίσκεται στό ἐξωτερικό τοῦ A, ἄν ἔχει μιά περιοχή πού δέν περιέχει κανένα σημεῖο τοῦ A.

9) Ἕνα ὑποσύνολο A τοῦ B, εἶναι πουθενά πυκνό στό B ἄν ἐκεῖνα τά σημεῖα τοῦ B πού βρίσκονται στό ἐξωτερικό τοῦ A εἶναι πυκνά στό B. (Τέτοια σύνολα A εἶναι ἀκριβῶς τά ὑποσύνολα τῶν συνόρων τῶν ἀνοιχτῶν συνόλων τοῦ B, ἀλλά ὁ ὅρος "συνοριακό σύνολο" χρησιμοποιεῖται, δυστυχῶς, μέ ἄλλη ἔννοια).

10) Ἕνα ὑποσύνολο A τοῦ B εἶναι πρώτης κατηγορίας στό B, ἄν εἶναι τό ἄθροισμα ἀριθμήσιμων τό πλῆθος συνόλων πουθενά πυκνῶν στό B.

11) Ἕνα σύνολο A εἶναι πρώτης κατηγορίας ἐπί τοῦ B, ἄν ἡ τομή $A \cap B$ εἶναι τῆς πρώτης κατηγορίας στό B.

12) Ἕνα σύνολο εἶναι τέλειο ἄν εἶναι κλειστό καί δέν ἔχει μεμονωμένα σημεῖα (δηλ. σημεῖα πού ἔχουν μιά τουλάχιστον περιοχή πού δέν περιέχει ἄλλα σημεῖα τοῦ συνόλου).

13) Τά σύνολα Borel ὁρίζονται σάν τό μικρότερο σύστημα συνόλων πού ἱκανοποιοῦν τά αἰτήματα:

(i) Τά κλειστά σύνολα εἶναι σύνολα Borel.

(ii) Τό συμπλήρωμα ἑνός συνόλου Borel εἶναι σύνολο Borel.

(iii) Τό ἄθροισμα ἀριθμήσιμων τό πλῆθος συνόλων Borel εἶναι σύνολο Borel.

14) Ένα σύνολο εἶναι ἀναλυτικό ἄν εἶναι ὀρθογώνια προβολή κάποιου συνόλου Borel ἑνός χώρου τῆς ἀμέσως ἀνώτερης διάστασης. (Κάθε σύνολο Borel εἶναι συνεπῶς ἀναλυτικό).

15) Ποσοδεῖκτες εἶναι τά λογιστικά σύμβολα πού ἀντιπροσωπεύουν τίς φράσεις: "γιά ὅλα τά ἀντικείμενα x" καί "ὑπάρχουν ἀντικείμενα x". Ἡ ὁλότητα τῶν ἀντικειμένων x στά ὁποῖα ἀναφέρονται λέγεται πεδίο ὁρισμοῦ τους.

16) Τό σύμβολο "$\hat{x}$" σημαίνει "σύνολο ἐκείνων τῶν ἀντικειμένων x γιά τά ὁποῖα...".