Author: Donald A. Martin

Title: Το πρώτο πρόβλημα του Hilbert: η υπόθεση του συνεχούς

Abstract: Σχολιάζεται η τωρινή κατάσταση της υπόθεσης του συνεχούς και της γενικευμένης υπόθεσης του συνεχούς

Creator: HDML

ΤΟ ΠΡΩΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ HILBERT: Η ΥΠΟΘΕΣΗ ΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ*

Donald A. Martin

ΓΕΝΙΚΑ.

Σχολιάζεται ἡ τωρινή κατάσταση τῆς ὑπόθεσης τοῦ συνεχοῦς καί τῆς γενικευμένης ὑπόθεσης τοῦ συνεχοῦς. Ἀναφέρονται τά ἀποτελέσματα "ἀνεξαρτησίας" καί τά πρόσφατα "θετικά" θεωρήματα. Δίνεται μιά ἀνάλυση τῆς πάνω στό πρόβλημα τοῦ συνεχοῦς ἐπίδρασης τῆς ἐργασίας πάνω στούς μεγάλους πληθάριθμους καί τά προβολικά σύνολα.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τό πρῶτο πρόβλημα τοῦ Hilbert βρίσκεται στήν περίεργη κατάσταση ὅπου ὑπάρχει σοβαρή διαφωνία γιά τό κατά πόσο ἔχει λυθεῖ καί ὑπάρχει σχετική διαφωνία στό κατά πόσο τό πρόβλημα- μέ τό φυσικό τρόπο κατανόησής του - εἶναι τελικά ἕνα *μαθηματικό* πρόβλημα.

Τό πρῶτο πρόβλημα εἶναι νά τεθεῖ ἡ περίφημη ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς (CH) τοῦ Cantor. Ἡ CH ἰσχυρίζεται ὅτι ὁ πληθάριθμος τοῦ συνεχοῦς (τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν) εἶναι $\aleph_1$, ὁ

---

* Δημοσιεύτηκε ἀρχικά στό Proceedings of Symposia in Pure Mathematics Vol. 28 (1976) σελ. 81-92. Μεταγράστηκε γιά τήν ΕΜΕ μέ ἄδεια τῆς A.M.S. ἀπό τό φοιτητή Μαθηματικῶν Ἀθήνας Γιάννη Γ. Στρατή.

ἐλάχιστος μή ἀριθμήσιμος πληθάριθμος. Ἰσοδύναμα, ἡ CH ἰσχυρίζεται ὅτι ὑπάρχει ὁ ἴδιος ἀριθμός πραγματικῶν ἀριθμῶν καί ἀριθμήσιμων διατακτικῶν ἀριθμῶν.

Ἡ γενικευμένη ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς (GCH) ἰσχυρίζεται ὅτι, γιά κάθε ἄπειρο πληθάριθμο $\aleph_\alpha$, $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. Μέ ἄλλα λόγια, ὁ πληθάριθμος τῆς συλλογῆς ὅλων τῶν ὑποσυνόλων ἑνός συνόλου μέ πληθικότητα $\aleph_\alpha$ εἶναι ὁ ἐλάχιστος πληθικός ἀριθμός πού εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν $\aleph_\alpha$. Ἡ CH εἶναι ἡ εἰδική περίπτωση $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Ὁ ἴδιος ὁ Hilbert [13] ἐπιχείρησε νά ἀποδείξει τήν CH, ἀλλά ἦταν ἀνίκανος νά φτάσει σέ μιά πλήρη ἀπόδειξη. Τό 1938 ὁ Gödel [9,10] ἀντιμετώπισε τό πρόβλημα μέ ἕναν ἐκπληκτικό τρόπο. Ἔδειξε ὅτι, ἄν τά βασικά ἀξιώματα τῶν Zermelo-Fraenkel (ZFC) εἶναι συνεπῆ τότε δέν μπορεῖ νά ὑπάρξει ἀπόδειξη τῆς ἄρνησης τῆς GCH ἀπ'αὐτά τά ἀξιώματα. (Ὑπάρχει μιά σχέση -ἄν καί εἶναι πολύ χαλαρή- μεταξύ τῆς ἀπόδειξης τοῦ Gödel καί τῆς ἀποτυχημένης ἀπόπειρας τοῦ Hilbert γιά τήν ἀπόδειξη τῆς CH). Ὁ Gödel [11] ἔκανε τήν εἰκασία ὅτι τά τυπικά ἀξιώματα ZFC δέν ἀρκοῦν οὔτε γιά τήν ἀπόδειξη τῆς CH καί ἔτσι ὅτι ἡ CH εἶναι τυπικά ἀναποκρίσιμη στήν θεωρία ZFC. Τό 1963 ὁ Cohen [4] ἀπόδειξε ὅτι ἡ εἰκασία τοῦ Gödel ἦταν πραγματικά σωστή.

Πού ἀφήνουν, ὅμως, αὐτά τά ἀποτελέσματα τό πρῶτο πρόβλημα τοῦ Hilbert; Ἀπό τό φορμαλιστικό "σημεῖο ἀναφορᾶς" τοῦ Hilbert ἡ CH εἶναι ἕνας ἰσχυρισμός ἰ δ ε α λ ι σ τ ι κ ῶ ν μαθηματικῶν μᾶλλον, παρά π ρ α γ μ α τ ι κ ῶ ν μαθηματικῶν. Ὁ Hilbert, ἐν τούτοις, κατά πᾶσα πιθανότητα σκεφτόταν ὅτι τά τυπικά ἀξιώματα τῆς θεωρίας συνόλων ἦταν ἀρκετά ἰσχυρά ὥστε νά ἀρκοῦν γιά τέτοιες προτάσεις ὅπως ἡ CH. Δέν εἶναι σαφές ἄν θά θεωροῦσε τά ἀποτελέσματα τῶν Gödel καί Cohen σάν λύση τοῦ προβλήματός του. Ὁ Gödel [11] λέει ὅτι ἡ ἔννοια τῆς CH εἶναι ἀνεξάρτητη τῶν τυπικῶν ἀξιωμάτων καί ὅτι οἱ ἀποδείξεις ἀνεξαρτησίας, δείχνουν μόνον τήν ἀδυναμία τῶν σημερινῶν ἀξιωμάτων μας. Κατά τή γνώμη του, ἡ CH εἶναι εἴτε ἀληθινή, εἴτε ψεύτικη καί τό πρόβλημα τοῦ νά ἀνακαλυφτεῖ τί ἀπ'τά δύο, παραμένει ἀκόμα. Ὁ Cohen [5] υἱοθετεῖ μιά φορμαλιστική θέση, ἀλλά λέει ὅτι μπορεῖ νά ὁδηγηθοῦμε σέ ἀπόκριση γιά τήν CH, εἰδικώτερα ὅτι μπορεῖ νά ὁδηγηθοῦμε στήν ἀποδοχή τῆς ἄρνησης τῆς CH σάν ἀξίωμα.

2. Ἡ CH καί ἡ GCH στό ZFC.

Θά ἐπιστρέψω σ'αὐτά τά οὐσιαστικά φιλοσοφικά ἐρωτήματα ἀργότερα, ἀλλά πρῶτα θέλω νά συζητήσω γιά τή μαθηματική ἐργασία πού σχετίζεται μέ τήν CH καί τήν GCH καί πού δημιουργήθηκε ἀπό τίς ἀποδείξεις ἀνεξαρτησίας.

Ἡ ἐργασία τοῦ Gödel -γιά λόγους πού δέν εἶναι σαφεῖς- ἀκολουθήθηκε ἀπό μιά ἀδράνεια εἴκοσι χρόνων στό πεδίο τῆς θεωρίας συνόλων. Ἄν καί ἡ ἀπόδειξη του εἰσήγαγε νέες ἔννοιες καί τεχνικές στή θεωρία συνόλων καθώς ἐπίσης καί μιά ἐνδιαφέρουσα νέα πρόταση, τό ἀξίωμα τῆς κατασκευαστικότητας, πολύ λίγο χρησιμοποιήθηκαν αὐτές οἱ νέες ἰδέες μέχρι τήν ἐποχή πού ἐμφανίστηκε ἡ δουλειά τοῦ Cohen. Ἀντίθετα τό θεώρημά του εἶχε ἀρνητικά ἀποτελέσματα γιά μερικούς κλάδους τῆς θεωρίας συνόλων. Γιά παράδειγμα, ὁ Gödel ἔδειξε ὅτι ὁρισμένες βασικές προτάσεις τῆς κλασσικῆς περιγραφικῆς θεωρίας συνόλων, δέν μποροῦσαν νά ἀποδειχτοῦν στό σύστημα ZFC. Ἔτσι ὑπῆρχε κίνδυνος πολλά ἀπό τά σημαντικά ἐρωτήματα αὐτοῦ τοῦ πεδίου νά εἶναι τυπικά ἀναποκρίσιμα. Αὐτό λειτούργησε σάν ἀνασταλτικός παράγοντας γιά ἐργασία σ'αὐτό τό πεδίο καί μόνο λίγη πρόοδος ἔγινε (ἐκτός ἀπό τόν Addison [1,2] καί τήν έργασία τοῦ Choquet) μέχρι πρόσφατα.

'Η άπόδειξη τοῦ Cohen εἶχε έντελῶς άντίθετο άποτέλεσμα. Είσήγαγε μιά περίοδο έντονης δραστηριότητας στή θεωρία συνόλων. Οἱ μέθοδοι τοῦ Cohen έφαρμόστηκαν σέ κάθε συνολο-θεωρητικό έρώτημα καί ένας μεγάλος άριθμός έρωτημάτων, δείχτηκε πώς ἦταν άναποκρίσιμα μέ τά ZFC.'Υπῆρξε άκόμα καί μιά άναζωπύρωση τοῦ ένδιαφέροντος γιά τό άξίωμα κατασκευαστικότητας τοῦ Gödel καί βρέθηκαν πολλές σπουδαῖες συνέπειες αὐτοῦ τοῦ άξιώματος (κυρίως άπ'τόν Ronald Jensen).

Τό άποτέλεσμα τῶν άποδείξεων άνεξαρτησίας πάνω στά μαθηματικά δέν εἶναι έντελῶς άρνητικό. Γιά παράδειγμα, ὑπάρχουν άρκετές περιπτώσεις θεωρημάτων πού έχουν άποδειχτεῖ ὑποθέτοντας τήν CH, **καί ὅπου οἱ άποδείξεις** άνεξαρτησίας έπιτρέπουν τήν έξάλειψη τῆς ὑπόθεσης CH. Γιά παράδειγμα, ἄν δοθεῖ μιά πρόταση Φ δεύτερης τάξης θεωρίας άριθμῶν (χοντρικά: κάθε πρόταση γιά άκέραιους καί πραγματικούς μόνο καί ὄ χ ι γιά τυχόντα σύνολα πραγματικῶν) καί ἡ Φ εἶναι άποδείξιμη άπό τά ZFC + CH, τότε ἡ Φ εἶναι άποδείξιμη άπό τά ZFC Platek [24], S. Kripke, J. Silver). Ἕνα παρόμοιο θεώρημα ίσχύει γιά τήν ἄρνηση τῆς CH, ἄν καί έδῶ ἡ Φ πρέπει νά περιοριστεῖ στό νά ίσχύει μόνο γιά άκέραιους. Τέτοια θεωρήματα εἶναι είδικές περιπτώσεις μιᾶς γενικῆς τεχνικῆς ά π ο λ υ τ ό τ η τ α ς (absoluteness). Ἄς ὑποθέσουμε πώς μπορεῖ νά άποδειχτεῖ στό ZFC ὅτι μιά πρόταση Ψ συνεπάγεται μιά ἄλλη πρόταση Φ. Μερικές φορές, ἄν δοθεῖ κάποιο μοντέλο τοῦ ZFC αὐτό μπορεῖ νά έπεκταθεῖ μέ τίς μεθόδους τοῦ Cohen σ'ένα μοντέλο τοῦ ZFC + Ψ. Στό εὐρύτερο μοντέλο, ἡ Φ πρέπει νά άληθεύει.'Αλλά, ἄν ἡ Φ μπορεῖ νά άποδειχτεῖ ὅτι εἶναι ἱκανοποιητικά ά π ό λ υ τ η, τότε συμπεραίνουμε ὅτι ἡ Φ άληθεύει στό άρχικό μοντέλο καί συνεπῶς ὅτι τό ZFC συνεπάγεται τήν Φ.

Ἡ ἀπολυτότητα τῆς Φ σημαίνει ὅτι ἡ τιμή ἀλήθειας τῆς Φ διατηρεῖται ἀπό ὅλες ἤ ἀπό μιά εὐρεία κλάση τέτοιων ἐπεκτάσεων Cohen γιά τά μοντέλα.

Πρίν ἀπό τίς ἐργασίες τῶν Cohen καί Gödel, ἕνας σημαντικός περιορισμός στήν πράξη $\aleph_\alpha \to 2^{\aleph_\alpha}$ ἦταν γνωστός. Αὐτό τό ἀποτέλεσμα τοῦ König [15] λέει ὅτι τό $2^{\aleph_\alpha}$ δέν μπορεῖ νά ἔχει ὁμοτελικότητα $\leqslant \aleph_\alpha$. Ἡ συντελικότητα ἑνός πληθάριθμου Κ εἶναι ὁ ἐλάχιστος πληθάριθμος λ τέτοιος ὥστε ἕνα σύνολο μέ πληθικότητα Κ εἶναι πάντα ἡ ἕνωση λ συνόλων πληθικότητας μικρότερης ἀπό Κ. Εἰδικώτερα τό $2^{\aleph_0}$ δέν μπορεῖ νά ἰσοῦται μέ $\aleph_\omega$, ὅπου ω ὁ πρῶτος ἄπειρος διατακτικός ἀριθμός. Οἱ Cohen καί R.Solovay ἔδειξαν (χρησιμοποιώντας μοντέλα κατασκευασμένα ἀπό τόν Cohen) ὅτι ὁ περιορισμός τοῦ König εἶναι ὁ μόνος περιορισμός γιά τό $2^{\aleph_0}$. Ὁ Easton [7] ἀντιμετώπισε τήν GCH χρησιμοποιώντας τίς μεθόδους τοῦ Cohen. Ἔδειξε, σχεδόν, ὅτι ἡ πράξη $\aleph_\alpha \to 2^{\aleph_\alpha}$ μπορεῖ νά σημαίνει ὁτιδήποτε συνεπές μέ τό θεώρημα τοῦ König. Τό "σχεδόν" βασικά ἀναφέρεται στό πρόβλημα τῶν ἰδιαζόντων (singular) πληθαρίθμων. Ὁ Κ εἶναι ἰδιάζων ἄν ἡ συντελικότητά τοῦ Κ εἶναι μικρότερη ἀπό τόν Κ. Ὁ Easton μποροῦσε νά παράγει ὁτιδήποτε μοντέλα τοῦ ZFC μέ $\aleph_\alpha \to 2^{\aleph_\alpha}$ ὁτιδήποτε ἤθελε, στήν κλάση τῶν ὁμαλῶν (regular) (:μή ἰδιαζόντων) $\aleph_\alpha$, ἀλλά δέν μποροῦσε συγχρόνως νά ἐλέγχει τίς τιμές γιά ἰδιάζοντες $\aleph_\alpha$. Γιά παράδειγμα, δέν εἶναι γνωστό ἄν εἶναι συνεπές μέ τό ZFC ὅτι $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$ γιά $n < \omega$ καί $2^{\aleph_\omega} > \aleph_{\omega+1}$. (Ἕνας ἐπιπρόσθετος - σ'αὐτόν τοῦ König- περιορισμός ἦταν γιά κάμποσο καιρό ὁ ἑξῆς. Ἄν ὁ k εἶναι ἰδιάζων καί $2^\gamma = \lambda$ γιά ὅλα τά ἀρκετά μεγάλα $\gamma < k$, τότε $2^k = \lambda$).

Ἕνα ἀπό τά σοβαρώτερα προβλήματα τῆς μετά τόν Cohen θεωρίας συνόλων εἶναι αὐτό τό πρόβλημα ἰδιαζόντων πληθαρίθμων. Οἱ περισσότεροι ἀπ'ὅσους ἔχουν ἀσχοληθεῖ μ'αὐτό, "αἰσθάνθηκαν" ὅτι τά θεωρήματα τοῦ Easton θά μποροῦσαν νά ἐπεκταθοῦν στούς ἰδιάζοντες πληθαρίθμους. Ἡ ἐργασία τῶν Prikry, Silver καί Magidor ὁδήγησε σέ κάποια ἀποτελέσματα συνέπειας, ἀλλ' αὐτά εἶναι μερικά καί ἡ "συνέπεια" ἀναφέρεται σέ θεωρίες πολύ ἰσχυρότερες ἀπό τήν ZFC. Πολύ πρόσφατα ὁ Jack Silver κατάπληξε τόν συνολοθεωρητικό κόσμο λύνοντας οὐσιαστικά τό πρόβλημα τῶν ἰδιαζόντων πληθαρίθμων γιά πληθάριθμους μέ ὁμοτελικότητα μεγαλύτερη ἀπό $\aleph_0$ καί τό ἔλυσε πρός τή "λανθασμένη" κατευθυνση. Ἕνα πόρισμα τοῦ θεωρήματος τοῦ Silver (ἕνα θεώρημα τοῦ ZFC μόνο!) εἶναι ὅτι ἄν ὁ $\aleph_\alpha$ εἶναι ἰδιάζων μέ ὁμοτελικότητα $> \aleph_0$ καί ἄν $2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$ γιά ὅλους τούς $\beta < \alpha$, τότε $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. Οἱ Galvin καί Hajnal [8] ἐπέκτειναν τήν ἐργασία τοῦ Silver γιά νά ὑπολογίσουν - κατά κάποιο τρόπο - ἀπόλυτα ὅρια τοῦ $2^{\aleph_\alpha}$ γιά μερικούς ἰδιάζοντες $\aleph_\alpha$. Τό πρόβλημα τῶν ἰδιαζόντων πληθαρίθμων μέ ὁμοτελικότητα $\aleph_0$ παραμένει, παρά τά ὅσα ἔγιναν, τόσο αἰνιγματικό ὅσο ἦταν πάντοτε.

3. Ἀξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων

Ἄν καί τά ἀξιώματα ZFC δέν ἀρκοῦν γιά τήν CH, δέν ὑπάρχει τίποτε τό ἱερό σχετικά μ'αὐτά καί κάποιος θά μποροῦσε νά ἐλπίζει νά βρεῖ ἄλλα ἀξιώματα πού νά φαίνονται ἀληθινά γιά τήν ἰδέα μας περί συνόλου (κατά τόν ἴδιο τρόπο, πού τά ἀξιώματα ZFC φαίνονται ἀληθινά) καί πού νά ἀρκοῦν γιά τήν CH.

Μετά τόν Cohen, ἔχει γίνει πολλή ἔρευνα σέ μιά κλάση ὑποψηφίων νέων ἀξιωμάτων: τά ὀνομαζόμενα ἀξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων. (Αὐτή ἡ "περιοχή" δέν ἐμφανίστηκε, ὅμως, μετά τόν Cohen. Τό θέμα εἶναι πολύ παλιότερο καί ἡ ἀναβίωσή του ἔγινε πρίν ἀπό τήν ἐργασία τοῦ Cohen. Γιά παράδειγμα, οἱ [14] καί

[25] εἶναι πρίν ἀπ'τόν Cohen). Ἕνα ἀξίωμα μεγάλων πληθαρίθμων εἶναι - χοντρικά μιλώντας- ἕνας ἰσχυρισμός ὅτι ὑπάρχουν πληθάριθμοι πού ἔχουν κάποια ἰδιότητα P τέτοια, ὥστε μπορεῖ νά δειχτεῖ ὅτι μόνο πολύ μεγάλοι πληθάριθμοι μποροῦν νά ἔχουν τήν P. Παραδείγματα τέτοιας P εἶναι ἡ ἀ π ρ ο σ ι τ ό τ η τ α (inaccessibility) καί ἡ μ ε τ ρ η σ ι μ ό τ η τ α. Ὁ k εἶναι ἀ π ρ ό σ ι τ ο ς ἄν ὁ k εἶναι ὁμαλός καί $\lambda < k$ συνεπάγεται $2^{\lambda} < k$. Ὁ k εἶναι μ ε τ ρ ή σ ι μ ο ς ἄν ὑπάρχουν ἕνα σύνολο A πληθικότητας k καί μιά συνάρτηση μ πού ὁρίζεται σ'ὅλα τά ὑποσύνολα τοῦ A τέτοια ὥστε ἡ μ νά ἔχει σάν τιμές μόνο τό 0 καί τό 1, $\mu(A) = 1$, ἡ μ νά μηδενίζεται στά μονοσύνολα, $\mu(A\ x) = 1-\mu(x)$ καί ἄν $\mu(A_1) = 0$ γιά κάθε $i \in I$ μέ πληθικότητα τοῦ I μικρότερη ἀπό k, τότε $\mu(UA_i) = 0$.

Τά συνηθισμένα ἀξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων δέν μποροῦν νά ἀποδειχτοῦν στό ZFC ἄν αὐτό εἶναι συνεπές. Ὑπάρχουν βασικά τρία εἴδη ἐπιχειρημάτων γιά νά τά δεχτοῦμε: ἀναλογία μέ τόν $\aleph_0$, ἀρχές ἀνακλαστικότητας καί εὐλογοφάνεια τῶν συνεπειῶν.

Τό ἐπιχείρημα τῆς ἀναλογίας μέ τόν $\aleph_0$ εἶναι ὡς ἑξῆς: ὁ $\aleph_0$ εἶναι ἀπρόσιτος, μετρήσιμος κλπ. Γιά κάθε μιά ἀπ'αὐτές τίς ἰδιότητες P θά συνέβαινε μόνο τυχαῖα, ὅτι ὁ $\aleph_0$ θά ἦταν ὁρίσιμος σάν ὁ μόνος ἄπειρος πληθάριθμος τέτοιος ὥστε νά ἰσχύει ἡ ἰδιότητα P (καθώς εἶναι τυχαῖο ὅτι ὁ ἄνθρωπος εἶναι ἄπτερο δίποδο). Ἔτσι θά ἀνέμενε κάποιος, ὅτι ὑπάρχουν μεγαλύτεροι πληθάριθμοι πού ἔχουν τήν ἰδιότητα P.

Τό ἐπιχείρημα τῶν ἀρχῶν ἀνακλαστικότητας ἀρχίζει μέ τή συνηθισμένη ἰδέα τῶν συνόλων σάν παραγόμενα μέ ἐπανάληψη τῆς πράξης τοῦ δυναμοσυνόλου. Ἀρχίζουμε μέ R_0 = τό κενό συνόλο. Ἄν δοθεῖ τό R_α γιά κάποιον διατακτικό ἀριθμό α, τό $R_{\alpha+1}$ εἶναι ἡ συλλογή ὅλων τῶν ὑποσυνόλων τοῦ R_α. Γιά ὁριακούς δια -

κτικούς ἀριθμούς λ, $R_\lambda = \bigcup_{\beta < \lambda} R_\beta$. Σ ύ ν ο λ ο εἶναι ὁτιδήποτε εἶναι μέλος κάποιου R_a. Τά τυπικά ἀξιώματα τῆς θεωρίας συνόλων ἐπιχειροῦν νά περιγράφουν αὐτήν τήν ἐπαναληπτική κατασκευή. Ἕνα πράγμα πού θέλουμε νά ἰσχυρίζονται τά ἀξιώματα εἶναι ὅτι ἡ κατασκευή δέν τελειώνει πολύ σύντομα, ἐπειδή οἱ διατακτικοί ἀριθμοί ἐξαντλοῦνται πρόωρα. Τό ἀξίωμα τῆς ἀντικατάστασης ἔχει διατυπωθεῖ μέ τήν πρόθεση νά ἰσχυρίζεται ὅτι οἱ διατακτικοί ἀριθμοί δέν τελειώνουν σέ ἕνα ἀφύσικο σημεῖο. Οἱ ἀρχές ἀνακλαστικότητας βασίζονται στήν ἰδέα ὅτι ἡ κλάση On τῶν διατακτικῶν ἀριθμῶν εἶναι τόσο μεγάλη, ὥστε γιά κάθε λογική ἰδιότητα P τοῦ "σύμπαντος" ὅλων τῶν συνόλων R_{On}, ἡ On δέν εἶναι τό πρῶτο "ἐπίπεδο" α, ὥστε ἡ R_α νά ἔχει τήν P. Παράδειγματα "λογικῶν" ἰδιοτήτων εἶναι οἱ ἰδιότητες πρώτης, δεύτερης καί ἀνώτερης τάξης. Ἄν αὐτό εἶναι σωστό, τότε θά ἔπρεπε νά ὑπάρχουν "ἐπίπεδα" R_α πού μοιάζουν πάρα πολύ μέ τήν R_{On}. Ἕπεται ὅτι θά ἔπρεπε νά ὑπάρχουν ἐπίπεδα R_α καί R_β πού φαίνονται πάρα πολύ ὅμοια. Σέ ὅλα τά σημαντικά ἀξιώματα μεγάλων ἀριθμῶν πού ἔχουν μελετηθεῖ, καταλήγουμε ἀπό ἰσχυρισμούς ὅτι ὑπάρχουν R_α καί R_β πού εἶναι δύσκολο νά διακριθοῦν. Βέβαια, καθώς τά ἀξιώματα γίνονται ἰσχυρότερα, ὁ δεσμός τους μέ τή βασική ἀρχή γίνεται ὅλο καί περισσότερο χαλαρός.

Ἕνα τρίτο ἐπιχείρημα ὑπέρ τῶν ἀξιωμάτων μεγάλων πληθαρίθμων εἶναι ὅτι ἡ θεωρία πού προκύπτει ἀπό τήν ἀποδοχή τους, εἶναι εὐλογοφανής καί ἐνδιαφέρουσα. Αὐτό εἶναι ἕνα σχεδόν ἐμπειρικό ἐπιχείρημα. Θά πῶ περισσότερα γι'αὐτή τήν ἄποψη ἀργότερα, ὅταν θά συζητήσω γιά ἕνα ἄλλο εἶδος ἀξιώματος στό ὁποῖο βρίσκει καλύτερη ἐφαρμογή.

Οἱ λόγοι πού ἀναφέρθηκαν προηγουμένως γιά τήν ἀποδοχή τῶν ἀξιωμάτων μεγάλων πληθαρίθμων εἶναι – καθώς ὁ ἀναγνώστης ἔχει σίγουρα παρατηρήσει- λιγότερο ἀναγκαστικοί ἀπό τούς λόγους γιά τήν ἀποδοχή τοῦ ZFC. 'Απ'τήν ἄλλη μεριά, δέν εἶναι ἐντελῶς ἀμελητέο καί θά ἔπρεπε νά ἔχει κανείς κατά νοῦ ὅτι τά ἀξιώματα ZFC (καί ἡ ἰδέα περί συνόλου πού ὑποθετικά περιγράφουν) εἶναι λιγότερο ἀναγκαστικά ἀπό τά ἀξιώματα τῆς θεωρίας ἀριθμῶν.

Τί μᾶς λένε τά ἀξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων γιά τήν ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς; Δυστυχῶς μᾶς λένε πολύ λίγα. Τά ἀξιώματα τῶν μεγάλων ἀριθμῶν τείνουν νά εἶναι ἀπόλυτα, μέ τήν ἔννοια πού ἀναφέρθηκε νωρίτερα. Ἄν ἀληθεύουν σ'ἕνα μοντέλο τοῦ ZFC τείνουν νά ἀληθεύουν σέ ἐπεκτάσεις Cohen αὐτοῦ τοῦ μοντέλου. Αὐτός ὁ ἰσχυρισμός μπορεῖ νά γίνει ἀκριβέστερος ὡς ἑξῆς: Μιά ἐπέκταση Cohen ἑνός μοντέλου M προκύπτει ἀπό ἕνα στοιχεῖο P τοῦ M πού εἶναι μιά μερική διάταξη στό M. Μιά ἐπέκταση Cohen εἶναι ἤ π ι α (mild) ὡς πρός ἕναν πληθάριθμο k τοῦ M, ἄν ἀληθεύει στό M ὅτι ὁ πληθάριθμος τοῦ P εἶναι μικρότερος τοῦ k. Ὅλες οἱ συνηθισμένες ἰδιότητες μεγάλων πληθαρίθμων τοῦ k διατηροῦνται ἀπό ἤπιες ὡς πρός k ἐπεκτάσεις Cohen. Ἡ τιμή ἀλήθειας τῆς CH, ἀπ'τήν ἄλλη μεριά, μπορεῖ νά ἀλλάξει μέ ἐπεκτάσεις Cohen ὅπου τό P ἔχει πολύ μικρό πληθάριθμο στό M. Αὐτό σημαίνει ὅτι γιά ἕνα ἀξίωμα μεγάλου πληθαρίθμου A, ὑπάρχουν μοντέλα τοῦ ZFC + A + CH καί μοντέλα ZFC+ +A + ὄχι CH, ἄν ὑπάρχουν μοντέλα τοῦ ZFC +A.

Ὅμως τά ἀξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων ἦταν πετυχημένα στό νά δώσουν μερικά ἀποτελέσματα γιά τήν GCH. Ὁ Solovay [27] ἔδειξε ὅτι ἡ ὕπαρξη ἑνός λεγόμενου συμπαγοῦς πληθάριθμου συνεπάγεται ὅτι $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ γιά ὅλους τούς ἱκανοποιητικά μεγάλους ἰδιάζοντες, ἰσχυρούς ὁριακούς πληθαρίθμους (δηλ. ἰδιάζοντες πληθαρίθμους k τέτοιους, ὥστε λ < k συνεπάγεται 2^λ<k) $\aleph_\alpha$.

4. Προβολικά Σύνολα

Δέν έχουμε πρός τό παρόν κανένα πιθανό υποψήφιο γιά νέο αξίωμα πού θά απαντούσε στό πρόβλημα τής CH. Ἄς τό ξεχάσουμε όμως αυτό γιά λίγο καί ἄς δεχτοῦμε τήν ἄποψη ὅτι ἡ CH εἶναι μιά πρόταση πού ἔχει νόημα καί ἄς ψάξουμε μήπως υπάρχουν διαθέσιμες πληροφορίες πού νά αποτελοῦν σ τ ο ι χ ε ῖ α ὑπέρ ἤ ἐναντίον τῆς ἀλήθειας τῆς CH.

Ὁ Gödel [11] ἀναφέρει μερικά γεγονότα πού πιστεύει πώς εἶναι στοιχεῖα ἐναντίον τῆς CH. Καταγράφει ἕναν ἀριθμό γνωστῶν πορισμάτων τῆς CH πού πιστεύει ὅτι εἶναι διαισθητικά μή εὐλογοφανῆ. Αὐτά τά πορίσματα ἰσχυρίζονται ὅτι ὑπάρχουν πολύ λεπτά ὑποσύνολα τῆς πραγματικῆς εὐθείας μέ τήν πληθικότητα τοῦ συνεχοῦς. Ὁ Gödel λέει ὅτι τέτοιοι ἰσχυρισμοί εἶναι ἀντιδι - αισθητικοί μέ μιά ἔννοια διαφορετική ἀπό ἐκείνη μέ τήν ὁποία ἡ ὕπαρξη τῶν καμπύλων Peano εἶναι ἀντιδιαισθητική. Ἄν καί οἱ διαισθήσεις τοῦ Gödel δέν θά ἔπρεπε ποτέ νά ἀντιμετωπισθοῦν ἐλαφρά, εἶναι πολύ δύσκολο νά δεῖ κανείς ὅτι ἡ κατάσταση ε ἶ ν α ι διαφορετική ἀπό ἐκείνη τῶν καμπύλων Peano καί εἶναι ἀκόμα δύσκολο γιά μερικούς ἀπό μᾶς νά δοῦμε τούς λόγους γιά τούς ὁποίους τά παραδείγματα πού ἀναφέρει ὁ Gödel εἶναι τελικά μή εὐλογοφανῆ.

Ἕνας ἄλλος τρόπος ἀναζήτησης στοιχείων πού ἀφοροῦν τήν CH εἶναι νά ἐξετάσουμε ἁπλές περιπτώσεις. Ἡ CH λέει ὅτι κάθε σύνολο πραγματικῶν εἶναι ἀριθμήσιμο ἤ ἔχει πληθικότητα $2^{\aleph_0}$. Μποροῦμε νά ἐλέγξουμε αὐτόν τόν ἰσχυρισμό κοιτάζοντας σύνολα πραγματικῶν πού εἶναι ἁ π λ ά κατά κάποια ἔννοια. Ἄν τέτοια ἁπλά σύνολα δέν δίνουν ἀντιπαραδείγματα μποροῦμε νά προσπαθήσουμε νά δοῦμε ἄν ὑπάρχουν λόγοι γιά νά ὑποψιαστοῦμε ὅτι τά ἁπλά σύνολα πού θεωρήσαμε εἶναι μέ κάποιο σχετικό τρόπο διαφορετικά ἀπό τυχόντα σύνολα πραγματικῶν.

Τά ἁπλά σύνολα πού θέλω νά θεωρήσω εἶναι τά π ρ ο β ο λ ι κ ά σύνολα. Ἕνα σύνολο πραγματικῶν εἶναι προβολικό ἄν μποροῦμε νά τό πάρουμε ἀπό ἕνα σύνολο Borel μέ τίς πράξεις τῆς συνεχοῦς εἰκόνας καί τοῦ συμπληρωματικοῦ. Τά προβολικά σύνολα μποροῦν νά διαιρεθοῦν σέ μιά ἱεραρχία ὡς ἑξῆς: Σ^1_1 (ἤ ἀναλυτικά) σύνολα εἶναι συνεχεῖς εἰκόνες συνόλων Borel. Π^1_n σύνολα εἶναι συμπληρώματα Σ^1_n συνόλων, Σ^1_{n+1} σύνολα εἶναι συνεχεῖς εἰκόνες Π^1_n συνόλων.

Τώρα κάθε σύνολο Borel εἶναι ἀριθμήσιμο ἤ ἔχει πληθάριθμο $2^{\aleph_0}$. Τό ἴδιο ἀληθεύει γιά κάθε Σ^1_1 σύνολο. Σ^1_2 σύνολα εἶναι πάντοτε ἑνώσεις $\aleph_1$ συνόλων Borel καί ἔτσι τά Σ^1_2 σύνολα εἶναι ἀριθμήσιμα ἤ ἔχουν πληθικό ἀριθμό $\aleph_1$ ἤ $2^{\aleph_0}$. Μέχρι ἐδῶ ἡ CH ἐπιβεβαιώνεται. Εἶναι γνωστό πώς εἶναι συνεπές μέ τό ZFC ὅτι $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ καί ὅτι ὑπάρχουν Σ^1_2 (ἀκόμα καί Π^1_1) σύνολα μέ πληθάριθμο $\aleph_1$. Εἶναι ἐπίσης συνεπές [12] ὅτι ὁ $2^{\aleph_0}$ εἶναι ὅσο μεγάλος θέλουμε καί ὅτι ὑπάρχουν Π^1_2 σύνολα μέ κάθε πληθικότητα $\leq 2^{\aleph_0}$. Ἔτσι τό ZFC δέ μᾶς δίνει πληροφορίες γιά ψηλότερα ἐπίπεδα τῆς προβολικῆς ἱεραρχίας.

Ἄς δοῦμε ἄν τά ἀξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων βοηθοῦν. Ἔστω MC ὁ ἰσχυρισμός ὅτι ὑπάρχουν μετρήσιμοι πληθάριθμοι $\aleph_0$. Ὁ Soloray ἔχει δείξει ὅτι ὁ MC συνεπάγεται ὅτι κάθε ἄπειρο Σ^1_2 σύνολο ἔχει πληθικότητα $\aleph_0$ ἤ $2^{\aleph_0}$ [26]. Ὅσο ἀφορᾶ τά Σ^1_3 σύνολα ὁ MC συνεπάγεται [18] ὅτι κάθε Σ^1_3 σύνολα ἔχει πληθάριθμο $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$ ἤ $2^{\aleph_0}$.

Μποροῦμε νά θεωρήσουμε αὐτά τά γεγονότα γιά τά σύνολα Σ^1_1 καί Σ^1_2 σάν στοιχεῖα ὑπέρ τῆς CH; Δέ νομίζω ὅτι μποροῦμε. Γιατί τά ἀποτελέσματα γιά τίς πληθικότητες τῶν Σ^1_i συνόλων, $i = 1,2$, εἶναι πορίσματα ἰσχυρότερων ἀποτελεσμάτων. Κάθε Σ^1_i σύνολο, $i=1,2$, εἶναι ἀριθμήσιμο ἤ ἔχει ἕνα τέλειο ὑποσύνολο (ὑποθέτοντας τό MC γιά i=2). Τώρα, μέ μιά ἁπλή ἐφαρμογή τοῦ ἀξιώματος ἐπιλογῆς, ὑπάρχει ἕνα μή ἀριθμήσιμο σύνολο χωρίς κανένα τέλειο ὑποσύνολο. Ἔτσι, ἐνῶ τά ἁπλά μας σύνολα ἔχουν τίς πληθικότητες πού ἀπαιτοῦνται ἀπό τήν CH, αὐτό συμβαίνει γιατί ἔχουν μιά ἀ τ υ π ι κ ή ἰδιότητα, τήν ἰδιότητα τοῦ τελειου ὑποσύνολου.

Μποροῦμε νά δοκιμάσουμε διαφορετικές διατυπώσεις τῆς CH. Γιά παράδειγμα, ἡ CH, λέει ὅτι κάθε καλή διάταξη ἑνός ὑποσυνόλου τῶν πραγματικῶν ἔχει διατακτικό τύπο $< \omega_2$, τόν δεύτερο μή ἀριθμήσιμο ἀρχικό διατακτικό ἀριθμό. Οἱ ἔννοιες τῶν προβολικῶν καί Σ^1_n σχέσεων μποροῦν νά ὁριστοῦν μέ τό φανερό τρόπο, καί μποροῦμε νά ψάξουμε γιά τό διατακτικό τύπο τῶν Σ^1_n καλῶν διατάξεων. Τά σχετικά θεωρήματα εἶναι ὅτι οἱ Σ^1_i καλές διατάξεις εἶναι ἀριθμήσιμες γιά i=1,2, ὑποθέτοντας τό MC γιά i=2. Μέ ἄλλα λόγια, ἔχουμε ὅτι οἱ ἁπλές καλές διατάξεις εἶναι ἀριθμήσιμες καί δέν μποροῦν οὔτε νά ἔχουν διατακτικό τύπο ω_1. Γιά μιά φορά ἀκόμα, τά ἁπλά μας σύνολα ἀποδείχτηκαν ἀτυπικά.

Ὑπάρχει μία τρίτη διατύπωση τῆς CH πού ὑπόσχεται περισσότερα. Ἡ ἄρνηση τῆς CH λέει ὅτι ὑπάρχει μιά ἐπί-συνάρτηση

$$f : \mathbb{R} \to \omega_2$$

ὅπου $\mathbb{R}$ οἱ πραγματικοί καί ω_2 εἶναι τό σύνολο τῶν προηγουμένων (predecessors) τους. Τώρα μιά συνάρτηση

$$f : \mathbb{R} \to \text{Διατακτικούς Ἀριθμούς}$$

εἶναι οὐσιαστικά τό ἴδιο πράγμα μέ μιά προ-καλή διάταξη τοῦ $\mathbb{R}$.

Γιά νά διατάξουμε προ-καλά ἕνα σύνολο, τό χωρίζουμε σέ κλάσεις ἰσοδυναμίας καί διατάσσουμε καλά τίς κλάσεις ἰσοδυναμίας. Μέ τό μ ῆ κ ο ς μιᾶς προ-καλῆς διάταξης, ἐννοῶ τό διατακτικό τύπο τῆς καλῆς διάταξης τῶν κλάσεων ἰσοδυναμίας. Τώρα κάθε Σ^1_1 προ-καλή διάταξη ἔχει ἀριθμήσιμο μῆκος, ἀλλά ὑπάρχει μιά Π^1_1 προ-καλή διάταξη τοῦ $\mathbb{R}$ μέ μῆκος ω_1 (οὐσιαστικά ἡ κατά Lebesgue ἀνάλυση τοῦ $\mathbb{R}$). Αὐτό ἤδη δείχνει, ὅτι τά ἁπλά μας σύνολα εἶναι πιό τυπικά ὡς πρός τίς προ-καλές διατάξεις ἀπ'ὅτι ὡς πρός τίς καλές διατάξεις.

Ἔστω δ^1_n ὁ ἐλάχιστος διατακτικός ἀριθμός > 0 πού δέν εἶναι μῆκος μιᾶς Σ^1_n προ-καλῆς διάταξης τοῦ $\mathbb{R}$. Τότε ἔχουμε:

$$\delta^1_1 = \omega_1$$
$$\delta^1_2 \leq \omega_2$$
$$MC \rightarrow \delta^1_3 \leq \omega_3$$

(Δές [18] γιά τά δύο τελευταία ἀποτελέσματα). Οὔτε τό $\leq$ μπορεῖ νά μετατραπεῖ (στό ZFC+MC) σέ = ἀφοῦ ἡ CH συνεπάγεται ὅτι $\delta^1_n < \omega_2$ γιά ὅλα τά n. Ἀπ'τήν ἄλλη μεριά, $\delta^1_2 = \omega_2$ εἶναι συνεπές μέ τό ZFC. Αὐτό προκύπτει ἀπό ἕνα ἀποτέλεσμα τῆς [19] Ἔτσι, ἐνῶ τά ἁπλά μας σύνολα δέν μᾶς ἔχουν δώσει ἕνα ἀντιπαράδειγμα γιά τήν CH, ἡ πιθανότητα ὅτι ὑπάρχουν ἀντιπαραδείγματα ἐμφανίζεται πραγματικά.

Σχετικά θεωρήματα δίνουν μιά παρόμοια εἰκόνα:

Κάθε Σ^1_2 σύνολο εἶναι ἕνωση $\aleph_1$ συνόλων Borel

MC → κάθε Σ^1_3 σύνολο εἶναι ἕνωση $\aleph_2$ συνόλων Borel.

Γιά μιά ἀκόμα φορά εἶναι συνεπές ὅτι αὐτά τά ἀποτελέσματα δέν εἶναι τά καλύτερα δυνατά, ἀλλά δέν ὑπάρχει λόγος νά πιστέψουμε ὅτι δέν εἶναι τά καλύτερα δυνατά.

Οἱ μετρήσιμοι πληθάριθμοι δέν δίνουν πληροφορίες γιά ψηλότερα ἐπίπεδα τῆς προβολικῆς ἱεραρχίας, ἀλλά ὑπάρχει ἕνα ἄλλο εἶδος "ἀξιώματος" πού δίνει. Αὐτό εἶναι ὁ ἰσχυρισμός π ρ ο β ο λ ι κ ή κ α θ ο ρ ι σ τ ι κ ό τ η τ α (projective determinacy). Ἔστω 2^ω ἡ συλλογή ὅλων τῶν ἄπειρων ἀκολουθιῶν μέ ὅρους 0 καί 1. Θεωροῦμε τό 2^{ω} σά γινόμενο ω ἀντίτυπων τοῦ διακριτικοῦ χώρου $\{0,1\}$ καί τό ἐφοδιάζουμε μέ τήν τοπολογία - γινόμενο. Ἄν $A \subseteq 2^{\omega}$, τό π α ι χ ν ί δ ι G_A ὁρίζεται ὡς ἑξῆς. Οἱ παῖκτες I καί II παίρνουν ἐναλλάξ 0 ἤ 1, παράγοντας ἔτσι ἕνα στοιχεῖο τοῦ 2^{ω}. Ὁ I νικᾶ ἄν τό στοιχεῖο αὐτό ἀνήκει στό A. Ἡ ἔννοια τῆς νικηφόρου στρατηγικῆς γιά τόν I ἤ τόν II ὁρίζεται μέ τόν προφανῆ τρόπο. Τό G_A εἶναι καθορισμένο ἄν ἕνας ἀπό τούς παῖκτες ἔχει μιά νικηφόρο στρατηγική. Χρησιμοποιώντας τό ἀξίωμα ἐπιλογῆς, μποροῦμε νά κατασκευάσουμε ἕνα A τέτοιο, ὥστε τό G_A νά μήν εἶναι καθορισμένο (Δές [21]). Ἀπ'τήν ἄλλη μεριά, ἔχουμε ἀποδείξει πρόσφατα ὅτι τό G_A εἶναι καθορισμένο γιά κάθε σύνολο Borel A (τό καλύτερο προηγούμενο ἀποτέλεσμα [23] ἀναφερόταν σέ $F_{\sigma\delta\sigma}$ σύνολα) καί ὅτι ὁ MC συνεπάγεται [17] πώς τό G_A εἶναι καθορισμένο γιά κάθε Π^1_1 σύνολα A (Ἡ προβολική ἱεραρχία ὁρίζεται μέ τόν ἴδιο τρόπο ὅπως στούς πραγματικούς). Π ρ ο β ο λ ι κ ή κ α θ ο ρ ι σ τ ι κ ό τ η τ α (PD) εἶναι ὁ ἰσχυρισμός ὅτι τό G_A εἶναι καθορισμένο γιά κάθε προβολικό A.

Δέν ὑπάρχει κανένα a p r i o r i ὑπέρ στοιχεῖο γιά τήν PD, ἀλλά ὑπάρχουν ἀρκετά a p o s t e r i o r i ὑπέρστοιχεῖα γι'αὐτήν. Ἡ PD ἔχει εὐχάριστες συνέπειες γιά τή συμπεριφορά τῶν προβολικῶν συνόλων, ὅπως: Κάθε προβολικό σύνολο εἶναι μετρήσιμο κατά Lebesgue [22], κάθε μή ἀριθμήσιμο προβολικό σύνολο ἔχει ἕνα τέλειο ὑποσύνολο [6]. Πιό ἐντυπωσιακό εἶναι τό γεγονός ὅτι ἡ PD μᾶς ἐπιτρέπει νά ἐπεκτείνουμε τήν κλασσική δομική θεωρία τῶν προβολικῶν συνόλων - πού ἀναφερόταν μόνο στά δύο πρῶτα ἐπίπεδα τῆς προβολικῆς ἱεραρχίας - σέ μιά πολύ κομψή καί οὐσιαστικά πλήρη θεωρία τῶν προβολικῶν συνόλων (Δές [3], [16], [20]). Ἡ PD δέν μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ στό ZFC (ἤ τό ZFC+MC, ἄν καί μπορεῖ νά εἶναι ἀποδείξιμη ἀπό ἀξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων), ἀλλά δέν εἶναι παράλογο νά ὑποψιαζόμαστε ὅτι μπορεῖ νά ἀληθεύει.

Όλες οἱ συνέπειες τοῦ MC πού ἀφοροῦν τά προβολικά σύνολα, προκύπτουν ἐπίσης καί ἀπό τήν PD. Ἐπιπλέον [18]

$$PD \rightarrow \delta_4^1 \leq \omega_4$$

PD $\rightarrow$ Κάθε Σ_4^1 σύνολο εἶναι ἡ ἕνωση $\aleph_3$ συνόλων Borel. Ὅσο ἀφορᾶ ψηλότερα ἐπίπεδα, ἔχουμε:

$$PD \rightarrow \delta^1_{2n+2} \leq (\delta^1_{2n+1})^+$$

ὅπου α^+ ἐλάχιστος ἀρχικός διατακτικός ἀριθμός μεγαλύτερος ἀπό α. Ἔτσι ἡ PD ἐπεκτείνει τό ὑπόδειγμα πού προέρχεται ἀπό τό MC (πού ἐπεκτείνει ἐκεῖνο πού προέρχεται ἀπό μόνο τό ZFC)καί ἰσχυροποιεῖ τήν ἄποψη ὅτι ἡ ἀπάντηση στήν CH μπορεῖ νά εἶναι ἀρνητική.

Στό τελευταῖο μέρος τῆς συζήτησής μου, ἔχω μ ι ά ἁ π λ ο ι κ ή καί μή κριτική θέση ἀπέναντι στήν CH. Ἐνῶ αὐτή ε ἶ ν α ι στήν πραγματικότητα ἡ θέση μου, κάθε ἄλλο παρά ἐπιθυμῶ νά ἀγνοήσω τήν ἀντίθετη ἄποψη. Ἐκεῖνοι οἱ ὁποῖοι ἀμφισβητοῦν ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου δέν εἶναι ἱκανοποιητικά καθαρή γιά νά ὁρίσει τήν τιμήν ἀλήθειας τῆς CH ἔχουν μιά θέση πού εἶναι πρός τό παρόν δύσκολο νά ἀνατραπεῖ. Ὅσο δέν μπορεῖ νά βρεθεῖ κάποιο νέο ἀξίωμα πού θά ἀποκρίνεται γιά τήν CH, ἡ θέση τους θά συνεχίσει νά ἐνισχύεται καί ὁ ἰσχυρισμός μας ὅτι ἡ ἔννοια τῆς CH εἶναι καθαρή θά ἠχεῖ ὅλο καί πιό ἄδειος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. J.W. Addison, Separation principles in the hierarchies of classical and effective descriptive set theory, Fund. Math. 46 (1959), 123-135.

2. J.W. Addison, Some consequences of the axiom of constructibility, Fund. Math. 46 (1959), 337-357.

3. J.W. Addison and Y.N. Moschovakis, Some consequences of the axiom of definable determinateness, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 59 (1968) 703-712.

4. P.J. Cohen, The independence of the continuum hypothesis, Parts I, II, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 50 (1963), 1143-1148; 51 (1964), 105-110.

5. J. Cohen, Comments on the foundations of set theory, Proc. A.M.S. Sympos. Pure Math. XIII, Part 1, Axiomatic Set Theory, 9-15.

6. Morton Davis, Infinite games of perfect information, Ann. Math. Studies No. 52 (1964), 85-101.

7. W. Easton, Powers of regular cardinals, Ann. Math. Logic 1 (1970), 137-178.

8. F. Galvin and A. Hajnal, Inequalities for cardinal powers (to appear).

9. K. Gödel, Consistency proof for the generalized continuum hypothesis, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 25 (1939), 220-224.

10. K. Gödel, The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis, Ann. Math. Studies No. 3, Princeton, N.J., 1940.

11. K. Gödel, What is Cantor's continuum problem? Amer. Math. Monthly 54 (1947), 515-25.

12. L. Harrington, Long projective wellorderings (to appear).

13. D. Hilbert, Über das Unendliche, Math. Annalen 95 (1926), 161-192.

14. H.J. Keisler and A. Tarski, From accessible to inaccessible cardinals, Fund Math. 53 (1964), 225-308.

15. J. König, Zum Kontinuumproblem, Math. Annalen 60 (1905), 177-180.

16. D.A. Martin, The axiom of determinateness and reduction principles in the analytical hierarchy, Bull.Amer.Math. Soc. 74 (1968), 687-689.

17. D.A. Martin, Measurable cardinals and analytic games, Fund. Math. 66 (1970), 287-291.

18. D.A. Martin, Projective sets and cardinal numbers, Jour. Symb. Logic (to appear).

19. D.A. Martin and R.M. Solovay, Internal Cohen extensions, Ann. Math. Logic 2 (1970), 143-178.

20. Y.N. Moschovakis, Uniformization in a playful universe. Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1970), 731-736.

21. J. Mycielski, On the axiom of determinateness, Fund. Math. 53 (1964), 205-224.

22. J. Mycielski and S. Swierczkowski, On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness, Fund. Math. 54 (1964), 67-71.

23. J. Paris, ZF + Σ_4^0 determinateness, Jour. Symb. Logic 37 (1972), 661-67.

24. R. Platek, Eliminating the continuum hypothesis, Jour. Symb. Logic 34 (1969), 219-225.

25. D. Scott, Measurable cardinals and constructive sets, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math.Astronom.Phys., 9 (1961), 521-524.

26. R.M. Solovay, On the cardinality of Σ_2^1 sets of reals, Foundations of Mathematics, Symposium papers commemorating the 60th birthday of Kurt Gödel, Springer - Verlag, 1966, 58-73.

27. R.M. Solovay, Strongly compact cardinals and the GCH. (To appear in the Proceeding of the Tarski Symposium).