Authors: Ernest Nagel, James R. Newman

Title: Η απόδειξη του Goedel

Abstract: Παρουσίαση της προϊστορίας ου προβλήματος και η ουσία της ανακάλυψης του Goedel

Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ GÖDEL

από τούς

Ernest Nagel καί James R. Newman

Στά 1931 ένας νέος μαθηματικός 25 χρονών πού όνομάζονταν Kurt Gödel δημοσίευσε σ'ένα γερμανικό έπιστημονικό περιοδικό ένα άρθρο πού διαβάστηκε άπό λίγους μαθηματικούς. Είχε τόν άπρόσμενο τίτλο: "Πάνω σέ τυπικά άνατοκρίσιμες προτάσεις τών Principia Mathematica καί συναφών συστημάτων". Άναφέρονταν σ'ένα θέμα πού ποτέ δέν είχε προσελκύσει παρά μιά μικρή όμάδα έρευνητών, καί τά έπιχειρήματά του ήταν τόσο πρωτότυπα καί πολύπλοκα πού ήταν άκατανόητο καί στούς περισσότερους μαθηματικούς. Άλλά τό άρθρο τοῦ Gödel έχει γίνει σταθμός στήν έπιστήμη τοῦ 20ου αἰῶνα. Μέ τόν τίτλο "ή άπόδειξη τοῦ Gödel", τά γενικά συμπεράσματά του έγιναν γνωστά σέ πολλούς έπιστήμονες, καί θεωρήθηκαν έπαναστατικής σημασίας. Τό έπίτευγμα τοῦ Gödel έχει γνωρίσει πολλές τιμές· όχι πολύ χρόνο άπό τήν έμφάνιση τοῦ άρθρου του ό νέος μαθηματικός προσκλήθηκε άπό τήν Βιέννη νά γίνει μέλος τοῦ Ίνστιτούτου Άνωτέρων Σπουδών στό Princeton, καί είναι μόνιμο μέλος τοῦ Ίνστιτούτου άπό τό 1938. Όταν τό Πανεπιστήμιο Harvard τόν άνακήρυξε έπίσημο διδάκτορα τό 1952, ή προσφώνηση περιέγραφε τήν άπόδειξη του σάν μιά άπό τίς πιό σημαντικές προόδους τής λογικής τής σύγχρονης έποχής.

Ό Gödel άντιμετώπισε ένα κεντρικό πρόβλημα τής θεμελίωσης τών μαθηματικών. Ή άξιωματική μέθοδος πού έπινοήθηκε

---

* Δημοσιεύτηκε άρχικά στό Scientific American, 194 (1956), τεῦχος 6, σελ. 71-86. Μεταφράστηκε γιά τήν Ε.Μ.Ε. μέ τήν άδεια τοῦ περιοδικοῦ.

ἀπό τούς Ἕλληνες πάντα θεωροῦνταν τό ἰσχυρότερο θεμέλιο γιά τήν δόμηση συστημάτων μαθηματικῆς διανόησης. Αὐτή ἡ μέθοδος, ὅπως γνωρίζει κάθε μελετητής τῆς λογικῆς, ἔγκειται στό νά ὑποθέσουμε ὡρισμένες προτάσεις ἤ ἀξιώματα (π.χ. ἄν ἴσα μέρη προστεθοῦν σέ ἴσα, τά ἀθροίσματα εἶναι ἴσα) καί στό νά συνάγουμε ἄλλες προτάσεις ἤ θεωρήματα ἀπό αὐτά τά ἀξιώματα. Μέχρι τήν σύγχρονη ἐποχή ὁ μόνος κλάδος τῶν μαθηματικῶν πού θεωροῦνταν ἀπό τούς περισσότερους μελετητές ὅτι εἶναι θεμελιωμένος σέ ὑγιεῖς ἀξιωματικές βάσεις ἦταν ἡ γεωμετρία. Ἀλλά κατά τούς τελευταίους δύο αἰῶνες ἰσχυρά καί αὐστηρά ἀξιωματικά συστήματα ἔχουν ἀναπτυχθεῖ καί γιά ἄλλους κλάδους τῶν μαθηματικῶν , ὅπως γιά τήν γνωστή ἀριθμητική τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Οἱ μαθηματικοί ἔφθασαν στήν ἐλπίδα καί πίστη ὅτι ὅλο τό οἰκοδόμημα τῆς μαθηματικῆς σκέψης θά μποροῦσε νά τακτοποιηθεῖ μέ τήν ἀξιωματική μέθοδο.

Τό ἄρθρο τοῦ Gödel ἔθεσε τέλος σ'αὐτήν τήν ἐλπίδα. Παρουσίασε στούς μαθηματικούς ἀπόδειξη ὅτι ἡ ἀξιωματική μέθοδος ἔχει ὁρισμένους ἐγγενεῖς περιορισμούς πού ἀποκλείουν κάθε δυνατότητα ὅτι ἀκόμη καί ἡ συνηθισμένη ἀριθμητική τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν μπορεῖ νά συστηματοποιηθεῖ πλήρως μ'αὐτήν. Ἀκόμη περισσότερο, οἱ ἀποδείξεις του περιέχουν τήν ἐνοχλητική καί μελαγχολική ἀποκάλυψη ὅτι εἶναι ἀδύνατον νά ἀποδείξουμε τό λογικά συμβιβαστό ὁποιουδήποτε ἀρκετά "πλούσιου" ἀπαγωγικοῦ συστήματος, παρά μέ τό νά ὑποθέσουμε ἀρχές λογικῆς πού ἡ ἴδια τους ἡ ἐσωτερική συμβιβαστότητα εἶναι ἐξ'ἴσου ἀμφίβολη μέ τή συμβιβαστότητα τοῦ ἴδιου τοῦ συστήματος.

Τό ἄρθρο τοῦ Gödel δέν ἦταν, πάντως, τελείως ἀρνητικό . Εἰσήγαγε στή θεμελίωση τῶν μαθηματικῶν μία νέα μέθοδο ἀνάλυσης πού εἶναι συγκρίσιμη σέ γονιμότητα μέ τήν ἱστορική εἰσαγωγή ἀπό τόν René Descartes τῆς ἀλγεβρικῆς μεθόδου στήν γεωμετρία. Τό ἔργο τοῦ Gödel βρῆκε νέους κλάδους μελέτης στή μαθηματική λογική. Προκάλεσε τήν έπανεξέταση τῶν μαθηματικῶν φι-λοσοφιῶν καί ἀκόμη τῶν φιλοσοφιῶν τῆς γνώσης γενικά.

Τό βαρυσήμαντο ἄρθρο του ἀκόμη δέν εἶναι γνωστό στό εὐρύ κοινό, καί οἱ λεπτομερεῖς ἀποδείξεις του εἶναι πολύπλοκες ὥστε νά μήν εἶναι κατανοητές ἀπό ἕνα μή μαθηματικό, ἀλλά ἡ γενική δομή καί τά συμπεράσματα τῶν ἐπιχειρημάτων του εἶναι προσιτά. Σ'αὐτό τό ἄρθρο θά δοῦμε τήν προϊστορία τοῦ προβλήματος καί τήν οὐσία τῆς ἀνακάλυψης τοῦ Godel.

Τά Νέα Μαθηματικά

Ὁ 19ος αἰῶνας γνώρισε ἕνα τεράστιο κύμα προόδου τῆς μαθηματικῆς ἔρευνας. Πολλά θεμελιώδη προβλήματα πού γιά πολύ καιρό ἀντιστέκονταν στό νά λυθοῦν λύθηκαν· νέες περιοχές μαθηματικῆς μελέτης δημιουργήθηκαν· νέες ἤ βελτιωμένες βάσεις δομήθηκαν γιά διάφορους κλάδους τῶν μαθηματικῶν. Ἡ πιό ἐπαναστατική ἐξέλιξη ἦταν ἡ κατασκευή νέων γεωμετριῶν μέ τήν ἀντικατάσταση ὡρισμένων ἀξιωμάτων τοῦ Εὐκλείδη μέ ἄλλα ἀξιώματα. Εἰδικώτερα ἡ τροποποίηση τοῦ ἀξιώματος τῶν παραλλήλων εὐθειῶν τοῦ Εὐκλείδη ὡδήγησε σέ ἐξαιρετικά γόνιμα ἀποτελέσματα. Αὐτή ἡ ἐπιτυχημένη ἀπόκλιση ἀπό τήν παράδοση ἔδωσε τό ἐρέθισμα καί γιά τήν ἀνάπτυξη σέ ἀξιωματική βάση καί ἄλλων μαθηματικῶν κλάδων πού εἶχαν στό μεταξύ ἀναπτυχθεῖ μ'ἕνα λίγο πολύ διαισθητικό τρόπο. Ἕνα σημαντικό συμπέρασμα πού προέκυψε ἀπό τήν κριτική ἐξέταση τῆς θεμελίωσης τῶν μαθηματικῶν ἦταν ὅτι ἡ παραδοσιακή περιγραφή τῶν μαθηματικῶν σάν "ἐπιστήμη τῆς ποιότητας" ἦταν ἀνεπαρκής καί παραπλανητική. Γιατί συνειδητοποιήθηκε ὅτι τά μαθήματικά οὐσιαστικά ἀσχολοῦνταν μέ τήν συναγωγή ἀναγκαίων συμπερασμάτων ἀπό ἕνα δοσμένο σύνολο ἀξιωμάτων. Ἕτσι ἀναγνωρίσθηκε ὅτι εἶναι πιό "ἀφηρημένη" καί "τυπική" ἐπιστήμη ἀπ'ὅτι παραδοσιακά εἶχε φανεῖ ὅτι εἶναι: Πιό "ἀφηρημένη" γιατί μαθηματικές προτάσεις μποροῦν νά νοηθοῦν γιά ὁποιοδήποτε ἀντικείμενο, καί ὄχι μόνο γιά κάποιο ἐγγενῶς περιορισμένο σύνολο ἀντικειμένων ἤ εἶδος ἀντικειμένων· πιό "τυπική" γιατί ἡ ἰσχύς μιᾶς μαθηματικῆς ἀπόδειξης βασίζεται στή δομή τῶν προτάσεων καί ὄχι στήν φύση καθεαυτή τοῦ συγκεκριμένου ἀντικειμένου μελέτης. Τά ἀξιώματα κάθε κλάδου ἀποδειξίμων μαθηματικῶν δέν ἀναφέρονται ἐγγενῶς στό χῶρο, ποσότητα, μῆλα, γωνίες ἤ προϋπολογισμούς, καί ὅποιο εἰδικό νόημα τυχόν ἀντιστοιχοῦμε στούς περιγραφικούς ὅρους τῶν ἀξιωμάτων δέν παίζει κανένα οὐσιαστικό ρόλο στήν διαδικασία ἀπόδειξης θεωρημάτων. Τό ἐρώτημα πού ἀντιμετωπίζει ἕνας καθαρός μαθηματικός (σέ ἀντιδιαστολή μέ τόν ἐπιστήμονα πού χρησιμοποιεῖ τά μαθηματικά γιά τήν ἐξερεύνηση ἑνός συγκεκριμένου θέματος) δέν εἶναι ἄν τά ἀξιώματα πού ὑποθέτει ἤ τά συμπεράσματα πού συνάγει ἀπό αὐτά εἶναι ἀληθινά, ἀλλά μόνο ἄν τά θεωρούμενα συμπεράσματα εἶναι πραγματικά ἀναγκαῖες λογικές συνέπειες τῶν ἀρχικῶν ὑποθέσεων. Αὐτή ἡ στάση θυμίζει τό φημισμένο ἐπίγραμμα τοῦ Bertrand Russell: Τά καθαρά μαθηματικά εἶναι ἕνας κλάδος γιά τόν ὁποῖο δέν ξέρουμε γιά τί πράγμα μιλᾶμε, οὔτε ἄν αὐτά πού λέμε εἶναι ἀληθινά.

Σέ μιά χώρα αὐστηρῆς ἀφαίρεσης, κενῆς ἀπό συνηθισμένα σημάδια, ἀσφαλῶς δέν εἶναι εὔκολο νά προσανατολιστοῦμε. Ἀλλά μιά τέτοια ἀφαίρεση προσφέρει ἀνταμοιβές στή μορφή μιᾶς ἐλευθερίας κινήσεων καί ἄγνωστων τοπίων.

Καθώς τά μαθηματικά ἔγιναν πιό ἀφηρημένα, ἡ σκέψη τῶν ἀνθρώπων χειραφετήθηκε ἀπό τίς συνηθισμένες ἑρμηνεῖες καί παραστάσεις τῆς γλώσσας καί μπόρεσε νά δομήσει νέα ἀξιωματικά συστήματα. Ὁ φορμαλισμός ὁδήγησε πραγματικά σέ μιά μεγάλη ποικιλία συστημάτων σημαντικοῦ μαθηματικοῦ ἐνδιαφέροντος καί ἀξίας. Μερικά ἀπ'αὐτά τά συστήματα, πρέπει νά παραδεχτοῦμε, δέν προσφέρονται σέ ἑρμηνεῖες τόσο προφανῶς διαισθητικές ("κοινῆς λογικῆς") ὅσο ἡ Εὐκλίδεια γεωμετρία ἤ ἡ ἀριθμητική, ἀλλά κατά τέτοιο δέν εἶναι λόγος γιά δυσανασχέτηση. Ἡ διαίσθηση εἶναι ἔτσι κι ἀλλιῶς, μιά ἐλαστική ἱκανότητα. Τά παιδιά μας δέν θά ἔχουν δυσκολία νά δεχθοῦν σάν διαισθητικά προφανῆ τά παράδοξα τῆς σχετικότητας, ὅπως κι ἐμεῖς δέν εντυπωσιαζόμαστε καθόλου ἀπό ἰδέες πού θεωροῦνταν τελείως ἔξω ἀπ' τή διαίσθηση μερικές γενιές πρίν. Ἐπίσης ἡ διαίσθηση, ὅπως ὅλοι γνωρίζουμε, δέν εἶναι ἀσφαλής ὁδηγός: δέν μπορεῖ νά χρησιμεύσει μέ ἀσφάλεια σάν κριτήριο εἴτε ἀλήθειας εἴτε γόνιμης ἐπιστημονικῆς ἀναζήτησης.

Πάντως ἡ αὐξημένη ἀφαίρεση τῶν μαθηματικῶν δημιούργησε ἕνα πιό σοβαρό πρόβλημα. Ὅταν ἕνα σύνολο ἀξιωμάτων θεωρεῖται γιά ἕνα συγκεκριμένο καί συνηθισμένο πεδίο ἀντικειμένων, εἶναι συνήθως δυνατό νά ἀποφασίσουμε ἄν τά ἀξιώματα εἶναι πραγματικά ἀληθινά γι' αὐτά τά ἀντικείμενα' κι' ἄν εἶναι ἀληθινά, τότε πρέπει νά εἶναι ἀμοιβαία συμβιβαστά. Ἀλλά τά ἀξιώματα γιά τήν ἀφηρημένη μή-Εὐκλείδια γεωμετρία φαινόταν νά εἶναι προφανῆς ψευδή σάν περιγραφή τοῦ χώρου, καί, γιά νά ποῦμε τήν ἀλήθεια, ἀμφίβολα ἀληθινά σάν περιγραφή ὁποιουδήποτε χώρου. Ἔτσι τό πρόβλημα τῆς ἀπόδειξης τοῦ ἐσωτερικῶς συμβιβαστοῦ τῶν μή-Εὐκλειδίων συστημάτων ἦταν τεράστιο. Π.χ. στήν γεωμετρία τοῦ Riemann τό φημισμένο ἀξίωμα τῶν παραλλήλων εὐθειῶν τοῦ Εὐκλείδη ἀντικαθίσταται ἀπό τήν ὑπόθεση ὅτι ἀπό ἕνα δοσμένο σημεῖο ἐκτός μιᾶς εὐθείας καμμιά παράλληλη εὐθεία δέν διέρχεται στό ἴδιο ἐπίπεδο. Τώρα ἄς θεωρήσουμε τό ἐρώτημα: Εἶναι τό σύνολο τῶν ἀξιωμάτων τοῦ Riemann συμβιβαστό; Προφανῶς δέν εἶναι ἀληθινά στόν συνηθισμένο χῶρο τῆς ἐμπειρίας μας. Τότε πῶς μπορεῖ ν' ἀποφασισθεῖ τό συμβιβαστό τους; Πῶς μποροῦμε ν' ἀποδείξουμε ὅτι δέν θά μᾶς ὁδηγήσουν σέ ἀντιφατικά θεωρήματα;

Προτάθηκε μιά γενική μέθοδος λύσης αὐτοῦ τοῦ προβλήματος. Ἡ βασική ἰδέα ἔγκειται στό νά βροῦμε ἕνα "μοντέλο" γιά τ' ἀξιώματα, ἔτσι ὥστε κάθε ἀξίωμα νά γίνεται μιά ἀληθινή πρόταση γι' αὐτό τό μοντέλο.'Η διαδικασία εἶναι περίπου ἡ ἀκόλουθη."Ας θεωρήσουμε τήν λέξη "κλάση" νά σημαίνει μιά οἰκογένεια διακεκριμένων ἀντικειμένων, ἤ "στοιχείων".(Π.χ. ἡ κλάση τῶν πρώτων ἀριθμῶν πού εἶναι μικρότεροι τοῦ 10 εἶναι ἡ οἰκογένεια πού ἔχει σάν στοιχεῖα τούς ἀριθμούς 2,3,5 καί 7)."Εστω τώρα ὅτι θεωροῦμε δύο καθαρά ἀφηρημένες κλάσεις, K καί L, γιά τίς ὁποῖες τά ἀκόλουθα ἀξιώματα ὑποθέτονται:

1. Κάθε δύο στοιχεῖα τοῦ K περιέχονται σέ ἀκριβῶς ἕνα στοιχεῖο τοῦ L.

2. Κανένα στοιχεῖο τοῦ K δέν περιέχεται σέ περισσότερο ἀπό δύο στοιχεῖα τοῦ L.

3. Τά στοιχεῖα τοῦ K δέν περιέχονται ὅλα σ'ἕνα στοιχεῖο τοῦ L.

4. Κάθε δύο στοιχεῖα τοῦ L περιέχουν ἀκριβῶς ἕνα (κοινό) στοιχεῖο τοῦ K.

5. Κανένα στοιχεῖο τοῦ L δέν περιέχει περισσότερα ἀπό δύο στοιχεῖα τοῦ K.

'Απ' αὐτό τό μικρό σύνολο μποροῦμε νά παράγουμε, χρησιμοποιώντας τούς συνηθισμένους κανόνες συνεπαγωγῆς,ὡρισμένα θεωρήματα. Π.χ. μπορεῖ ν'ἀποδειχθεῖ ὅτι τό K περιέχει ἀκριβῶς τρία στοιχεῖα.'Αλλά εἶναι αὐτό τό σύνολο τῶν ἀξιωμάτων συμβιβαστό, ὥστε ἀμοιβαία ἀντιφατικά θεωρήματα νά μή μποροῦν νά ἀποδειχθοῦν ἀπ'αὐτό;'Εδῶ ἐπικαλούμαστε τήν βοήθεια ἑνός μοντέλου, δηλαδή μιᾶς ἑρμηνείας τῶν κλάσεων."Ας εἶναι τό K οἱ κορυφές ἑνός τριγώνου, καί L οἱ πλευρές του. Κάθε ἕνα ἀπό τά πέντε ἀφηρημένα ἀξιώματα μετατρέπεται σέ μιά ἀληθινή πρόταση:π.χ. τό πρῶτο ἀξίωμα ἰσχυρίζεται ὅτι κάθε δύο κορυφές βρίσκονται ἀκριβῶς πάνω σέ μιά πλευρά. Μ'αὐτό τόν τρόπο τό σύνολο τῶν ἀξιωμάτων ἀποδείχνεται σάν συμβιβαστό.

Μιά πρώτη σκέψη εἶναι ὅτι μιά τέτοια διαδικασία ἴσως εἶναι ἀρκετή γιά ν'ἀποδείξει τό συμβιβαστό ἑνός ἀφηρημένου συ -

στήματος ὅπως ἡ ἐπίπεδη γεωμετρία τοῦ Riemann. Μποροῦμε νά πάρουμε σάν ἕνα μοντέλο πού ἱκανοποιεῖ τά ἀξιώματα τοῦ Riemann, ἕνα σύνολο ἀντικειμένων ὅπου ἡ ἔκφραση "ἐπίπεδο" νά ἑρμηνεύεται ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Εὐκλείδιας σφαίρας· ἡ ἔκφραση "σημεῖο" ἀπό ἕνα σημεῖο στήν ἐπιφάνεια· ἡ ἔκφραση "εὐθεία γραμμή" ἀπό ἕνα τόξο ἑνός μέγιστου κύκλου στήν ἐπιφάνεια, κ.ο.κ. Κάθε ἀξίωμα τοῦ Riemman τότε μετατρέπεται σ'ἕνα θεώρημα τοῦ Εὐκλείδη. Π.χ. μ'αὐτή τήν ἑρμηνεία τό ἀξίωμα παραλληλίας τοῦ Riemann μετατρέπεται στήν πρόταση:

Ἀπό ἕνα σημεῖο τῆς ἐπιφάνειας μιᾶς σφαίρας δέν διέρχεται κανένα τόξο ἑνός μέγιστου κύκλου παράλληλου μ'ἕνα δοσμένο τόξο ἑνός μέγιστου κύκλου.

Δυστυχῶς αὐτή ἡ μέθοδος εἶναι τρωτή ὡς πρός μία σοβαρή ἀντίρρηση· δηλαδή, στό ὅτι προσπαθεῖ νά λύσει ἕνα πρόβλημα σέ μιά περιοχή ἁπλῶς μεταφέροντας τό πρόβλημα σέ μιά ἄλλη περιοχή (μέ ἄλλα λόγια, ἐπικαλούμαστε τόν Εὐκλείδη γιά ν' ἀποδείξουμε τό συμβιβαστό ἑνός συστήματος πού ἀνατρέπει τόν Εὐκλείδη). Ἡ γεωμετρία τοῦ Riemann ἀποδείχνεται συμβιβαστή μόνο ἄν ἡ γεωμετρία τοῦ Εὐκλείδη εἶναι συμβιβαστή. Ἐρώτημα, τότε: εἶναι ἡ Εὐκλείδια γεωμετρία συμβιβαστή; Ἄν προσπαθήσουμε ν' ἀπαντήσουμε σ'αὐτό τό ἐρώτημα μέ τήν ἐπίκληση ἑνός ἄλλου μοντέλου, δέν ἔχουμε πλησιάσει καθόλου τό σκοπό μας. Τελικά, κάθε ἀπόδειξη πού ἐπιτυγχάνεται μ'αὐτή τή μέθοδο θά εἶναι μιά "σχετική" ἀπόδειξη τοῦ συβιβαστοῦ, ὄχι μιά ἀπόλυτη ἀπόδειξη.

Ὅταν μποροῦμε νά ἑρμηνεύουμε ἕνα σύστημα μέ ἕνα μοντέλο πού περιέχει μόνο ἕνα πεπερασμένο ἀριθμό στοιχείων, δέν θά ἔχουμε μεγάλη δυσκολία ν'ἀποδείξουμε τό συμβιβαστό τῶν ἀξιωμάτων του. Π.χ. τό τριγωνικό μοντέλο πού χρησιμοποιήσαμε γιά νά δοκιμάσουμε τά ἀξιώματα κλάσεων K καί L εἶναι πεπερασμένο, καί ἔτσι εἶναι σχετικά ἁπλό ν'ἀποφασίσουμε ἄμεσα ὅτι τά ἀξιώματα εἶναι "ἀληθινά" καί ἄρα συμβιβαστά. Δυστυχῶς τά περισσότερα ἀξιωματικά συστήματα πού ἀποτελοῦν τήν θεμελίωση σημαντικῶν κλάδων τῶν μαθηματικῶν δέν μποροῦν νά κατοπτρισθοῦν σέ πεπερασμένα μοντέλα ἱκανοποιοῦνται μόνο ἀπό ἄπειρα μοντέλα. Τό γνωστό σύνολο ἀξιωμάτων γιά τήν στοιχειώδη ἀριθμητική περιέχει ἕνα ἀξίωμα πού ἰσχυρίζεται ὅτι κάθε φυσικός ἀριθμός ἔχει ἕνα ἄμεσο διάδοχο, πού εἶναι διάφορος ἀπό κάθε προηγούμενο φυσικό ἀριθμό. Προφανῶς κάθε μοντέλο πού θά χρησιμοποιήσουμε γιά νά δοκιμάσουμε αὐτό τό σύνολο ἀξιωμάτων πρέπει ν' ἀντικατοπτρίζει τήν ἀπειρία τῶν στοιχείων πού ὑποθέτει τό ἀξίωμα. Ἕπεται ὅτι ἡ ἀλήθεια (καί ἄρα τό συμβιβαστό) αὐτοῦ τοῦ συνόλου δέν εἶναι δυνατόν ν'ἀποδειχθεῖ μέ μιά ἄμεση ἀπαρίθμηση. Φαινομενικά ἔχουμε φθάσει σέ ἀδιέξοδο.

Τό παράδοξο τοῦ Russell

Ἴσως εἶναι πιθανοφανές νά προτείνουμε σ'αὐτό τό σημεῖο ὅτι μποροῦμε νά εἴμαστε βέβαιοι ὅτι ἕνα σύνολο ἀξιωμάτων εἶναι συμβιβαστό, δηλαδή χωρίς ἀντιφάσεις, ἄν οἱ βασικές ἔννοιες πού χρησιμοποιοῦμε εἶναι διαφανῶς "ξεκάθαρες" καί "βέβαιες".'Αλλά ἡ ἱστορία τῆς σκέψης δέν ἦταν ἐπιεικής μέ τό δόγμα τῆς διαισθητικῆς γνώσης, πού κρύβεται σέ μιά τέτοια πρόταση. Σέ ὡρισμένες περιοχές τῆς μαθηματικῆς ἔρευνας ριζικές ἀντιφάσεις ἔχουν ἐμφανισθεῖ παρ'ὅλη τήν "διαισθητική" καθαρότητα τῶν ἐννοιῶν πού χρησιμοποιοῦνται στίς ὑποθέσεις, καί παρ'ὅλο τόν φαινομενικά συμβιβαστό χαρακτήρα τῶν διανοητικῶν κατασκευῶν πού πραγματοποιοῦνται. Τέτοιες ἀντιφάσεις (ἤ, "ἀντινομίες") ἐμφανίσθηκαν, παραδείγματος χάριν στή θεωρία τῶν ἀπείρων πληθαρίθμων πού ἀναπτύχθηκε ἀπό τόν Georg Cantor στόν 19ο αἰῶνα.'Η θεωρία του δομήθηκε στή στοιχειώδη καί φαινομενικά "ξεκάθαρη" ἔννοια τῆς κλάσης (συνόλου).'Εφ'ὅσον σύγχρονα συστήματα σέ ἄλλους κλάδους τῶν μαθηματικῶν, ἰδιαίτερα ἡ στοιχειώδης ἀριθμητική, ἔχουν δομηθεῖ μέ βάση τή θεμελίωση τῆς θεωρίας τῶν κλάσεων, εἶναι σημαντικό νά γνωρίζουμε ὅτι αὐτές εἶναι ἀπαλλαγμένες ἀπό ἀντιφάσεις.

Σχετικά ὁ Bertrand Russell ἔχει κατασκευάσει μία ἀντίφαση μέσα στό πλαίσιο αὐτῆς τῆς ἴδιας τῆς στοιχειώδους λογικῆς.Εἶναι ἀκριβῶς ἀνάλογη μέ τήν ἀντίφαση πού πρῶτα ἀναπτύχθηκε στή θεωρία τῶν ἀπείρων κλάσεων τοῦ Cantor.'Η ἀντινομία τοῦ Russell μπορεῖ νά περιγραφεῖ μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:"Ολες οἱ κλάσεις μποροῦν προφανῶς νά διαιρεθοῦν σέ δύο ὁμάδες: σ'αὐτές πού δέν περιέχουν τόν ἑαυτό τους σάν στοιχεῖο, καί σ'αὐτές πού τό περιέχουν."Ενα παράδειγμα τῆς πρώτης ὁμάδας εἶναι ἡ κλάση ὅλων τῶν μαθηματικῶν, ἐφ'ὅσον αὐτή ἡ κλάση δέν εἶναι ἡ ἴδια καί μαθηματικός, καί ἄρα δέν εἶναι στοιχεῖο τοῦ ἑαυτοῦ της."Ενα παρά - δειγμα τῆς δεύτερης ὁμάδας εἶναι ἡ κλάση ὅλων τῶν διανοητῶν ἐννοιῶν, ἐφ'ὅσον αὐτή ἡ κλάση εἶναι ἡ ἴδια μιά διανοητή ἔννοια, καί ἄρα εἶναι στοιχεῖο τοῦ ἑαυτοῦ της.

"Ας καλέσουμε μιά κλάση τοῦ πρώτου τύπου "φυσιολογική", καί μιά κλάση τοῦ δευτέρου τύπου "ἀφύσικη"."Εστω τώρα Ν ἡ κλάση ὅλων τῶν φυσιολογικῶν κλάσεων. Θέτουμε τό ἐρώτημα ἄν ἡ Ν εἶναι ἡ ἴδια φυσιολογική, ἤ ἀφύσικη κλάση."Αν εἶναι φυσιλογική, τότε εἶναι στοιχεῖο τοῦ ἑαυτοῦ της.'Αλλά σ'αὐτή τήν περίπτωση ἡ Ν εἶναι ἀφύσικη, γιατί ἐξ ὁρισμῶν μιά κλάση πού περιέχει σάν στοιχεῖο τόν ἑαυτό της εἶναι ἀφύσικη."Αν τώρα ἡ Ν εἶναι ἀφύσικη, καί ἄρα στοιχεῖο τοῦ ἑαυτοῦ της,τότε πρέπει νά εἶναι φυσιολογική, ἐφ'ὅσον ἐξ ὁρισμοῦ κάθε στοιχεῖο τῆς Ν εἶναι φυσιολογική κλάση. Τελικά, ἡ Ν εἶναι φυσιολογική ἄν καί μόνο ἄν ἡ Ν εἶναι ἀφύσικη. Αὐτή ἡ μοιραία ἀντίφαση προκύπτει ἀπό μιά ἄκριτη χρήση τῆς φαινομενικά πεντα - κάθαρης ἔννοιας τῆς κλάσης.

"Αλλα παράδοξα βρέθηκαν ἀργότερα, τό καθένα κατασκευα - σμένο μέ τούς συνηθισμένους καί φαινομενικά θεμιτούς τρόπους λογικῆς. Μή-πεπερασμένα μοντέλα ἀπό τή φύση τους μπο - ροῦν νά μᾶς ἐμπλέξουν στή χρήση συνόλων ἀξιωμάτων ἐνδεχομένως ἀσυμβιβάστων."Ετσι ἔγινε γενικά δεκτός ὅτι, ἄν καί ἡ μέθοδος τῶν μοντέλων εἶναι ἕνα πολύτιμο ἐργαλεῖο γιά τήν ἀπόδειξη τοῦ συμβιβαστοῦ ἀξιωμάτων, ὡστόσο αὐτή ἡ μέθοδος δέν μᾶς δίνει μιά τελική ἀπάντηση στό πρόβλημα γιά τήν ἐπίλυση τοῦ ὁποίου ἐπινοήθηκε.

Τά μετα-μαθηματικά τοῦ Hilbert

Ὁ διάσημος γερμανός μαθηματικός David Hilbert υἱοθέτησε τότε τήν ἀντίθετη στάση ἀποφεύγοντας τά μοντέλα καί ἀποστραγίζοντας τά μαθηματικά ἀπό ὁποιαδήποτε ἑρμηνεία. Στόν πλήρη φορμαλισμό τοῦ Hilbert, οἱ μαθηματικές ἐκφράσεις θεωροῦνται ἁπλῶς σάν κενά σύμβολα. Τά ἀξιώματα καί τά θεωρήματα πού κατασκευάζονται ἀπό αὐτό τό σύστημα συμβόλων (ὁ "λογισμός") εἶναι ἁπλῶς ἀκολουθίες ἀπό σύμβολα χωρίς νόημα, πού συνδυάζονται σύμφωνα μέ αὐστηρούς καί συγκεκριμένους κανόνες. Ἡ ἀπόδειξη θεωρημάτων ἀπό ἀξιώματα μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ἁπλά σάν ἕνας μετασχηματισμός ἑνός συνόλου ἀπό τέτοιες ἀκολουθίες, ἤ "ἀράδα", σ'ἕνα ἄλλο σύνολο ἀπό "ἀράδες", σύμφωνα μέ ἀκριβεῖς κανόντες. Μ'αὐτό τόν τρόπο ὁ Hilbert εἶχε τήν ἐλπίδα νά ἐξαλείψει τόν κίνδυνο χρήσης ἀθέμιτων τρόπων λογικῆς.

Ὁ φορμαλισμός εἶναι κάτι τό δύσκολο καί ἐπίπονο, ἀλλά ἐξυπηρετεῖ ἕνα ἀξιόλογο σκοπό. Ἀποκαλύπτει τίς λογικές σχέσεις σέ γυμνή καθαρότητα, ὅπως ἕνα πρότυπο διδακτικό μοντέλο μιᾶς μηχανῆς. Μποροῦμε ἔτσι νά δοῦμε τίς δομικές μονάδες στίς διάφορες "ἀράδες" συμβόλων: πῶς συνυπάρχουν, πῶς συνδυάζονται, πῶς διασυνδέονται κ.ο.κ.

Μιά σελίδα γεμάτη μέ τέτοια σύμβολα "χωρίς νόημα" τυπικῶν μαθηματικῶν δέν ἰσχυρίζεται τίποτα εἶναι ἁπλά ἕνα ἀφηρημένο διάγραμμα ἤ ἕνα μωσαϊκό μέ κάποια δομή. Ἀλλά οἱ σχηματισμοί ἑνός τέτοιου συστήματος μποροῦν νά περιγραφοῦν, καί ἀκόμα μποροῦν νά γίνουν προτάσεις γιά τίς διάφορες σχέσεις πού αὐτοί ἔχουν. Μπορεῖ κάποιος νά ἰσχυρισθεῖ ὅτι μιά "ἀράδα" εἶναι ὡραῖα, ἤ ὅτι μοιάζει μέ κάποια ἄλλη "ἀράδα" ἤ ὅτι μιά "ἀράδα" φαίνεται νά ἔκει γίνει ἀπό τρεῖς ἄλλες, κ.ο.κ. Τέτοιες προτάσεις προφανῶς ἔχουν νόημα.

Τώρα εἶναι σαφές ὅτι ὁποιεσδήποτε προτάσεις μέ κάποιο νόημα, γιά ἕνα σύστημα πού δέν ἔχει νόημα, δέν ἀνήκουν στό σύστημα αὐτό.'Ο Hilbert κατάταξε αὐτές τίς προτάσεις σ' ἕνα ξεχωριστό οἰκοδόμημα πού ὀνόμασε "μετα-μαθηματικά". Οἱ μετα-μαθηματικές προτάσεις εἶναι οἱ προτάσεις γιά τά σύμβολα καί τίς ἐκφράσεις στό τυποποιημένο μαθηματικό σύστημα: γιά τά εἴδη καί τίς διατάξεις τέτοιων συμβόλων ὅταν συνδυάζονται γιά νά σχηματίσουν μακρύτερες ἀράδες συμβόλων, πού καλοῦνται "τύποι", ἤ γιά τίς σχέσεις μεταξύ τύπων πού μπορεῖ νά ὑπάρχουν σάν συνέπεια τῶν κανόνων χρήσης πού ἔχουν δοθεῖ γι'αὐτούς.

Μερικά παραδείγματα θά δείξουν τήν διαφορά πού ἐννοεῖ ὁ Hilbert μεταξύ τῶν μαθηματικῶν (ἕνα σύστημα μέ ἐκφράσεις χωρίς περιεχόμενο) καί τῶν μετα-μαθηματικῶν (προτάσεις γιά τά μαθηματικά). Θεωροῦμε τήν ἀριθμητική ἔκφραση 2+3=5. Αὐτή ἡ ἔκφραση ἀνήκει στά μαθηματικά καί κατασκευάζεται τελείως ἀπό στοιχειώδη μαθηματικά σημεῖα. Τώρα μποροῦμε νά σχηματίσουμε μιά πρόταση γι'αὐτή τήν ἔκφραση, π.χ. "2+3=5" εἶναι ἕνας ἀριθμητικός τύπος.'Η πρόταση αὐτή δέν ἐκφράζει κάτι τό ἀριθμητικό: ἀνήκει στά μετα-μαθηματικά, γιατί περιγράφει τήν ἀράδα τῶν μαθηματικῶν συμβόλων. Κατά παρόμοιο τρόπο ἡ ἔκφραση x=x ἀνήκει στά μαθηματικά, ἀλλά ἡ πρόταση " "x" εἶναι μεταβλητή" ἀνήκει στά μετα-μαθηματικά. Μποροῦμε ἐπίσης νά κάνουμε τήν ἀκόλουθη μετα-μαθηματική πρόταση:

"'Ο τύπος "0=0" συνάγεται ἀπό τόν τύπο "x=x" μέ ἀντικατάσταση τοῦ ἀριθμοῦ "0" γιά τήν μεταβολητή "x"".

Αὐτή ἡ πρόταση περιγράφει μέ ποιό τρόπο ἕνα ἀριθμητικός τύπος μπορεῖ νά συναχθεῖ ἀπό ἕνα ἄλλο τύπο, καί ἔτσι περιγράφει πῶς σχετίζονται οἱ δύο τύποι μεταξύ τους. Πάλι, μποροῦμε νά κάνουμε τήν μετα-μαθηματική πρόταση: "0≠0" δέν εἶναι θεώρημα". Μᾶς λέει ὅτι ὁ τύπος αὐτός δέν εἶναι δυνατόν νά συναχθεῖ ἀπό τ'ἀξιώματα τῆς ἀριθμητικῆς, ἤ μέ ἄλλα λόγια,ὅτι κάποια σχέση δέν ἴσχύει μεταξύ τῶν συγκεκριμένων τύπων τοῦ συστήματος. Τέλος ἡ ἀκόλουθη πρόταση ἐπίσης ἀνήκει στά μετα-μαθηματικά:

"'Η ἀριθμητική εἶναι συμβιβαστή" (δηλαδή, δέν εἶναι δυνατόν νά συνάγουμε ἀπ'τά ἀξιώματα τῆς ἀριθμητικῆς καί τούς δύο τύπους 0=0 καί 0≠0).

Σ'αὐτή τή θεμελίωση-διαχωρισμό τῶν μεταμαθηματικῶν περιγραφῶν ἀπό τά ἴδια τά μαθηματικά- ὁ Hilbert ἐπιχείρησε νά κατασκευάσει μιά μέθοδο "ἀπόλυτης" ἀπόδειξης τῆς ἐσωτερικῆς συνέπειας τῶν μαθηματικῶν συστημάτων. Συγκεκριμένα, προσπάθησε νά ἀναπτύξει μιά θεωρία ἀπόδειξης πού θά ἀπέφερε ἀποδείξεις συνέπειας μέ μιά ἀνάλυση τῶν καθαρά δομικῶν χαρακτηριστικῶν τῶν ἐκφράσεων σέ τελείως φορμαλιστικούς (ἤ "ἀνερμηνεύτους") λογισμούς. Μιά τέτοια ἀνάλυση ἀποτελεῖται ἀποκλειστικά ἀπό τήν θεώρηση τῶν εἰδῶν καί τῶν τρόπων τοποθέτησης τῶν σημείων σέ τύπους καί ἀπό τήν ἀπάντηση στό κατά πόσο μποροῦμε νά καταλήξουμε σ'ἕνα δοσμένο συνδυασμό σημείων ἀπό ἄλλους,σύμφωνα μέ τούς σαφῶς διατυπωμένους κανόνες πράξης. Μιά ἀπόλυτη ἀπόδειξη τῆς συνέπειας τῆς ἀριθμητικῆς, ἄν μποροῦσε νά κατασκευαστεῖ, θά ἔγκειτο στό νά δειχτεῖ μέ μεταμαθηματικές διαδικασίες πεπερασμένου χαρακτήρα ὅτι δύο "ἀντιφατικοί"τύποι, ὅπως (0=0) καί ἡ ἄρνησή του, δέν μποροῦν νά ἀποδειχτοῦν καί οἱ δύο ἀπό τά ἀξιώματα ἤ τούς ἀρχικούς τύπους μέ ἰσχύοντες κανόνες συνεπαγωγῆς.

Μπορεῖ νά εἶναι χρήσιμο, γιά παράδειγμα, νά συγκρίνουμε τά μεταμαθηματικά σάν μιά θεωρία ἀπόδειξης μέ τή θεωρία σκακιοῦ. Τό σκάκι παίζεται μέ 32 κομμάτια μέ ὁρισμένη σχεδίαση, σέ μιά τετράγωνη βάση πού περιέχει 64 ὑποδιαιρέσεις, ὅπου τά κομμάτια μποροῦν νά κινηθοῦν σύμφωνα μέ συγκεκριμένους κανόνες. Οὔτε τά κομμάτια, οὔτε τά τετράγωνα, οὔτε ἡ θέση τῶν κομματιῶν στή σκακιέρα σημαίνουν τίποτα ἔξω ἀπ' τό παιχνίδι. Μ'αὐτή τήν ἔννοια τά κομμάτια καί ὁ σχηματισμός τους στή σκακιέρα εἶναι "χωρίς περιεχόμενο". Ἔτσι τό παιχνίδι εἶναι ἀνάλογο μ'ἕνα φορμαλιστικό μαθηματικό λογισμό. Τά κομμάτια καί τά τετράγωνα τῆς σκακιέρας ἀντιστοιχοῦν στά στοιχειώδη σημεῖα τοῦ λογισμοῦ· οἱ ἀρχικές θέσεις τῶν κομματιῶν, ἀντιστοιχοῦν στά ἀξιώματα ἤ τούς ἀρχικούς τύπους τοῦ λογισμοῦ· οἱ ἑπόμενες θέσεις τους ἀντιστοιχοῦν σέ τύπους πού ἀποδεικνύονται ἀπ'τά ἀξιώματα (δηλ. στά θεωρήματα) καί οἱ κανόνες τοῦ παιχνιδιοῦ ἀντιστοιχοῦν στούς κανόνες συνεπαγωγῆς γιά τό λογισμό. Τώρα, ἄν καί οἱ σχηματισμοί τῶν κομματιῶν στή σκακιέρα εἶναι "χωρίς σημασία", οἱ προτάσεις γιά αὐτούς τούς σχηματισμούς, ὅπως οἱ μεταμαθηματικές προτάσεις γιά τούς μαθηματικούς τύπους, ἀσφαλῶς ἔχουν περιεχόμενο (ἑρμηνεία). Μιά "μετασκακιστική" πρόταση μπορεῖ νά ἰσχυριστεῖ ὅτι ὑπάρχουν 20 πιθανές κινήσεις ἀνοίγματος γιά τά Λευκά, ἤ ὅτι, δεδομένου ἑνός σχηματισμοῦ τῶν κομματιῶν στή σκακιέρα, ὅταν εἶναι ἡ σειρά τῶν Λευκῶν νά παίξουν, τά Μαύρα θά εἶναι μάτ σέ τρεῖς κινήσεις. Ἐπιπλέον, μπορεῖ κανείς νά ἀποδείξει γενικά "μετασκακιστικά" θεωρήματα στή βάση τοῦ πεπερασμένου ἀριθμοῦ ἐπιτρεπτῶν σχηματισμῶν στή σκακιέρα. Τό "μετασκακιστικό" θεώρημα γιά τόν ἀριθμό τῶν πιθανῶν κινήσεων ἀνοίγματος τῶν Λευκῶν μπορεῖ νά διατυπωθεῖ κατ'αὐτό τόν τρόπο ὅπως καί ἐπίσης τό "μετασκακιστικό" θεώρημα ὅτι ἄν τά Λευκά ἔχουν μόνο δύο Ἀξιωματικούς εἶναι ἀδύνατο γι'αὐτά, νά κάνουν μάτ στά Μαῦρα. Αὐτά καί ἄλλα "μετασκακιστικά" θεωρήματα μποροῦν μέ ἄλλα λόγια, νά ἀποδειχθοῦν μέ πεπερασμένες μεθόδους συλλογισμῶν, πού συνίστανται στήν ἐξέταση κάθε μιᾶς ἀπό ἕνα πεπερασμένο ἀριθμό σχηματισμῶν πού μποροῦν νά ὑπάρξουν κάτω ἀπό ὁρισμένες συνθῆκες. Ὁ στόχος τῆς θεωρίας ἀπόδειξης τοῦ Hilbert, ὅμοια, ἦταν νά ἀποδείξει μέ τέτοιες πεπερασμένες μεθόδους ὅτι εἶναι ἀδύνατο νά ἀποδειχτοῦν μερικοί "ἀντιφατικοί" τύποι σ'ἕνα λογισμό.

Principia Mathematica

'Η θέση τοῦ Hilbert, μαζί μέ τήν τυποποίηση τῆς ἴδιας τῆς λογικῆς στό φημισμένο ἔργο Principia Mathematica τῶν Alfred North Whitehead καί Bertrand Russell ὁδήγησαν σέ μία κρίση, τήν ὁποία ὁ Godel ἔδωσε τήν τελική ἀπάντηση.

'Ο φιλόδοξος σκοπός τῶν Principia, πού δημοσιεύθηκε στά 1910, ἦταν νά δείξει ὅτι τά μαθηματικά εἶναι μόνο ἕνα κεφάλαιο τῆς λογικῆς. 'Αλλά ἐπέτυχε δύο συγκεκριμένες συμβολές πού μᾶς ἐνδιαφέρουν. Κατ'ἀρχήν, συνεχίζοντας τό ἔργο τοῦ πρωτοπόρου τοῦ 19ου αἰῶνα George Boole, σύνταξαν ἕνα σύστημα συμβόλων πού ἐπιτρέπει τήν κωδικοποίηση ὅλων τῶν προτάσεων τῶν καθαρῶν μαθηματικῶν κατά ἕνα κανονικό τρόπο. Δεύτερο, καταγράφει κατά συγκεκριμένο τρόπο τούς περισσότερους κανόνες συμβολικῆς λογικῆς πού χρησιμοποιοῦνται στίς μαθηματικές ἀποδείξεις. Ἔτσι οἱ Principia ἔδωσαν ἕνα οὐσιαστικό ἐργαλεῖο γιά τήν ἐξερεύνηση ὁλόκληρου τοῦ συστήματος τῆς ἀριθμητικῆς, σάν ἕνα σύστημα συμβόλων "χωρίς περιεχόμενο", πού μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν σύμφωνα μέ συγκεκριμένα ἐκφρασμένους κανόνες.

Περιγράφουμε τώρα τήν τυποποίηση ἑνός μικροῦ μέρους τῶν Principia, δηλαδή τῆς στοιχειώδους προτασιακῆς λογικῆς. 'Ο σκοπός εἶναι νά μετατρέψουμε αὐτό τό μέρος σ'ἕνα "χωρίς περιεχόμενο" λογισμό ἀνερμήνευτων συμβόλων καί νά δείξουμε μιά μέθοδο ἀπόδειξης ὅτι ὁ λογισμός αὐτός δέν περιέχει ἀντιφάσεις.

Αὐτό ἐπιτυγχάνεται σέ τέσσερα βήματα. Πρῶτα, πρέπει νά καθορίσουμε τό πλῆρες "λεξιλόγιο" τῶν συμβόλων πού θά χρησιμοποιηθοῦν στόν λογισμό. Δεύτερο, ἀναφέρουμε τούς "κανόνες σχηματισμοῦ" (κανόνες "γραμματικῆς") πού δείχνουν τούς ἐπιτρεπτούς συνδυασμούς συμβόλων σέ τύπους (ἤ "προτάσεις"). Τρίτο, καταγράφουμε τούς "κανόνες μετασχηματισμοῦ" πού μᾶς λένε πῶς τύποι μποροῦν νά συναχθοῦν ἀπό ἄλλους τύπους. Τελικά, ἐπιλέγουμε ὡρισμένους τύπους σάν ἀξιώματα πού παίζουν τό ρόλο τῆς θεμελίωσης ὅλου τοῦ συστήματος. Τά "θεωρήματα" τοῦ συστήματος εἶναι οἱ τύποι, συμπεριλαμβανομένων τῶν ἀξιωμάτων, πού μποροῦν νά συναχθοῦν ἀπό τά ἀξιώματα ἐφαρμόζοντας τούς "κανόνες μετασχηματισμοῦ". Μιά "ἀπόδειξη" συνίσταται ἀπό μιά πεπερασμένη ἀκολουθία θεμιτῶν τύπων, κάθε μία τῶν ὁποίων εἶναι ἤ ἀξίωμα ἤ τύπος πού συνάγεται ἀπό τούς προηγούμενους τύπους στήν ἀκολουθία ἀπό τούς κανόνες μετασχηματισμοῦ.

Τό λεξιλόγιο τῆς στοιχειώδους λογικῆς τῶν προτάσεων(πού ἐπίσης ὀναμάζεται "προτασιακός λογισμός") εἶναι ἐξαιρετικά ἁπλό. Οἱ "προτασιακές" μεταβλητές (πού ἀντιστοιχοῦν σέ προτάσεις) εἶναι ὡρισμένα γράμματα:

$$p, q, r \quad \text{κλπ.}$$

Ἐπίσης ὑπάρχουν ὡρισμένα συνεκτικά σύμβολα:

$\sim$,	πού ἑρμηνεύεται	"μή"
$\vee$,	" "	"ἤ"
$\supset$,	" "	"ἄν...τότε"
$\wedge$,	" "	"καί"

Σύμβολα παρενθέσεων χρησιμεύουν σάν σημεῖα στίξεως.

Κάθε προτασιακή μεταβλητή εἶναι ἕνας τύπος, καί τά σύμβολα μποροῦν νά συνδυασθοῦν σύμφωνα μέ τούς κανόνες σχηματισμοῦ γιά νά σχηματίσουν ἄλλους τύπους: π.χ.

$$p \supset q$$

Ἄν μιά πρόταση (π.χ. $p \supset q$) εἶναι τύπος, τότε καί ἡ ἄρνηση της εἶναι τύπος:

$$\sim (p \supset q)$$

Ἄν δύο προτάσεις, S_1 καί S_2, εἶναι τύποι, τότε καί ὁ συνδυασμός

$$(S_1) \vee (S_2)$$

εἶναι τύπος. Παρόμοιοι κανόνες ἰσχύουν γιά τά ἄλλα συνεκτικά σύμβολα.

Γιά τούς μετασχηματισμούς ἰσχύουν δύο κανόνες. Ἕνας, ὁ κανόνας τῆς ἀντικατάστασης, λέει ὅτι ἄν μιά πρόταση πού περιέχει προτασιακές μεταβλητές ἔχει ὑποτεθεῖ, ὁποιοσδήποτε τύπος μπορεῖ ν'ἀντικαταστήσει παντοῦ αὐτές τίς μεταβλητές, ἔτσι ὥστε ἡ νέα πρόταση θά εἶναι λογική συνέπεια τῆς ἀρχικῆς. Π.χ. ἔχοντας ὑποθέσει τήν πρόταση

$$p \supset p \quad (\text{ἄν } p \text{ τότε } p),$$

μποροῦμε νά ἀντικαταστήσουμε τήν p μέ τήν q, λαμβάνοντας σάν θεώρημα τόν τύπο

$$q \supset q.$$

Ἤ μποροῦμε ν'ἀντικαταστήσουμε τήν p μέ τήν $p \vee q$ λαμβάνοντας

$$p \vee q \supset p \vee q.$$

Ὁ ἄλλος κανόνας, ὁ κανόνας τῆς συνεπαγωγῆς, ἁπλά λέει ὅτι ἄν οἱ προτάσεις

$$S_1 \text{ καί } S_1 \supset S_2$$

εἶναι λογικά ἀληθινές, τότε πρέπει νά δεχθοῦμε καί τήν πρόταση

$$S_2$$

σάν λογικά ἀληθινή.

Ὁ λογισμός ἔχει τέσσερα ἀξιώματα, τά ἀκόλουθα:

1. $p \vee p \supset p$ (ἄν p ἤ p, τότε p).
2. $p \supset (p \vee q)$ (ἄν p, τότε p ἤ q).

3. $p \vee q \supset (q \vee p)$ (ἄν p ἤ q, τότε q ἤ p).

4. $(p \supset q) \supset ((r \vee p) \supset (r \vee q))$

(ἄν ἀπό τήν p ἕπεται ἡ q, τότε ἀπό τήν (r ἤ p) ἕπεται ἡ (r ἤ q)).

'Αναζήτηση τῆς ἀπόδειξης

Κάθε ἕνα ἀπ'αὐτά τά ἀξιώματα μπορεῖ νά φανεῖ "προφανές" καί τετριμμένο. Παρ'ὅλ'αὐτά εἶναι δυνατόν νά συναχθοῦν ἀπ'αὐτά μέ τήν βοήθεια τῶν κανόνων μετασχηματισμῶν μιά ἀπεριόριστα μεγάλη κλάση θεωρημάτων πού δέν εἶναι καθόλου προφανῆ ἤ τετριμμένα. Πάντως σ'αὐτό τό σημεῖο ἐνδιαφερόμαστε ὄχι γιά ν'ἀνακαλύψουμε θεωρήματα, ἀλλά γιά ν'ἀποδείξουμε ὅτι τό σύνολο τῶν ἀξιωμάτων δέν εἶναι ἀντιφατικό. Θέλουμε ν'ἀποδείξουμε,χρησιμοποιώντας τούς κανόνες μετασχηματισμοῦ, ὅτι εἶναι ἀδύνατον νά συνάγουμε ἀπό τά ἀξιώματα ὁποιοδήποτε τύπο S καθώς καί τήν ἄρνηση της $\sim S$.

Τώρα εὔκολα ἀποδείχνουμε ὅτι ὁ τύπος

$p \supset (\sim p \supset q)$ (ἄν p, τότε ἄν ὄχι p τότε q)

εἶναι θεώρημα τοῦ λογισμοῦ. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι μπορούσαμε νά ἀποδείξουμε τόν τύπο S καί τήν ἄρνηση τοῦ $\sim S$ ἀπό τ'ἀξιώματα καί ἄς δοῦμε τί συνέπειες ἔχει αὐτό σέ συνδυασμό μέ τό παραπάνω θεώρημα. 'Αντικαθιστώντας τό p μέ τό S, ὅπως ἐπιτρέπεται ἀπό τόν κανόνα ἀντικατάστασης, ἔχουμε κατ'ἀρχή

$$S \supset (\sim S \supset q).$$

'Απ'αὐτό ὑποθέτοντας ὅτι ἡ S ἀποδείχνεται ἀληθινή, μποροῦμε νά συνάγουμε, ἀπ'τόν κανόνα συνεπαγωγῆς, ὅτι

$$\sim S \supset q$$

Τέλος, ὑποθέτοντας ὅτι ἡ ~S ἀποδείχνεται ἀληθινή, ἀπό τόν κανόνα συνεπαγωγῆς ἔχουμε ὅτι

q.

Ἐφ'ὅσον μποροῦμε ν'ἀντικαταστήσουμε κάθε τύπο στό q, αὐτό σημαίνει ὅτι ὁποιοσδήποτε τύπος συνάγεται ἀπό τά ἀξιώματα. Δηλαδή ἄν ὁ S καί ὁ ~S συνάγονται ἀπ'τά ἀξιώματα, τότε κ ά θ ε τύπος συνάγεται ἀπ'τά ἀξιώματα. Φθάνουμε δηλαδή στό συμπέρασμα ὅτι ἄν ὁ λογισμός δέν εἶναι συμβιβαστός (δηλαδή, ἄν καί ὁ S καί ὁ ~S συνάγονται, γιά κ ά π ο ι ο τύπο S) τότε κ ά θ ε τύπος συνάγεται ἀπ'τά ἀξιώματα. Ἄρα, γιά ν'ἀποδείξουμε τό συμβιβαστό τοῦ λογισμοῦ, ἀρκεῖ νά βροῦμε τ ο υ λ ά χ ι σ τ ο ν ἕ ν α τύπο πού δέν συνάγεται ἀπ'τά ἀξιώματα.

Ὁ τρόπος μέ τόν ὁποῖο ἐπιτυγχάνεται αὐτό εἶναι ἡ χρήση μετα-μαθηματικῆς ἐπιχειρηματολογίας γιά τό σύστημα πού ἔχουμε ὁρίσει. Ἡ διαδικασία εἶναι κομψή. Συνίσταται στό νά βροῦμε ἕνα χαρακτηριστικό γνώρισμα τῶν τύπων πού ἱκανοποιεῖ τίς ἀκόλουθες τρεῖς συνθῆκες:
(1) Εἶναι κοινό σ'ὅλα τά τέσσερα ἀξιώματα· (2) εἶναι "κληρονομικό", δηλαδή κάθε τύπος πού συνάγεται ἀπ'τά ἀξιώματα (δηλ. κάθε θεώρημα) πρέπει νά ἔχει αὐτό τό γνώρισμα· (3) πρέπει νά ὑπάρχει τουλάχιστον ἕνας τύπος πού δέν ἔχει αὐτό τό γνώρισμα, καί ἄρα δέν εἶναι θεώρημα. Ἄν ἐπιτύχουμε σ' αὐτό τό τριπλό ἐγχείρημα, ἔχουμε μιά ἀπόλυτη ἀπόδειξη τοῦ συμβιβασμοῦ τῶν ἀξιωμάτων. Ἄν μποροῦμε νά βροῦμε μιά "ἀράδα" πού ἱκανοποιεῖ τίς συνθῆκες τοῦ νά εἶναι τύπος, χωρίς νά ἔχει τό παραπάνω χαρακτηριστικό γνώρισμα, τότε αὐτός ὁ τύπος δέν μπορεῖ νά εἶναι θεώρημα. Μ'ἄλλα λόγια, ἡ εὕρεση ἑνός μοναδικοῦ τύπου πού δέν εἶναι θεώρημα εἶναι ἀρκετή γιά ν'ἀποδείξει τό συμβιβαστό τοῦ συστήματος.

῎Ας ἐπιλέξουμε γιά ἕνα χαρακτηριστικό γνώρισμα τοῦ παραπάνω εἴδους τήν ἰδιότητα τοῦ νά εἶναι ἕνας τύπος "ταυτολογία". Στήν καθημερινή γλώσσα ταυτολογία συνήθως θεωρεῖται μιά πρόταση μέ πλεονάζον μέρος, ὅπως: "ὁ Γιάννης εἶναι ὁ πατέρας τοῦ Κώστα,καί ὁ Κώστας εἶναι ὁ γιός τοῦ Γιάννη". 'Αλλά στή λογική ταυτολογία εἶναι μιά πρόταση πού δέν ἐξαιρεῖ καμμιά λογική δυνατότητα,π.χ. "ἤ βρέχει ἤ δέν βρέχει". Ἕνας ἄλλος τρόπος περιγραφῆς εἶναι νά ποῦμε ὅτι μιά ταυτολογία εἶναι "ἀληθινή σέ κάθε δυνατό κόσμο". 'Εφαρμόζομε αὐτόν τόν ὁρισμό στό σύστημα πού τώρα ἐξετάζουμε. Ἕνας τύπος εἶναι ταυτολογία ἄν εἶναι ἀνεξαίρετα ἀληθινός, ἀνεξάρτητα ἀπ'τό ἄν οἱ στοιχειώδεις μονάδες αὐτοῦ τοῦ τύπου (p,q, r, κλπ.) εἶναι ἀληθινές ἤ ὄχι. Τώρα καί τά τέσσερα ἀξιώματα εἶναι καθαρό ὅτι ἔχουν τήν ἰδιότητα τοῦ νά εἶναι ταυτολογίες. Π.χ. τό πρῶτο ἀξίωμα, $(p \vee p) \supset p$, εἶναι ἀληθινό ἀνεξάρτητα ἀπ'τό ἄν ὑποθέσουμε τόν p νά εἶναι ἀληθινός ἤ ψευδής. Τό ἀξίωμα λέγει, π.χ.:

""Αν ἤ ὁ ""Ολυμπος ἔχει 3.000 μ. ὕψος ἤ ὁ "Ολυμπος ἔχει 3000 μ. ὕψος, τότε ὁ "Ολυμπος ἔχει 3.000 μ. ὕψος".

Δέν ἔχει καμμιά σημασία ἄν ὁ "Ολυμπος ἔχει ὕψος 3.000 μ. ἤ δέν ἔχει: καί στίς δύο περιπτώσεις ἡ πρόταση εἶναι ἀληθινή. Παρόμοια ἀπόδειξη ἰσχύει καί γιά τά ἄλλα ἀξιώματα.

'Η ἀπάντηση τοῦ Gödel

'Ο προτασιακός λογισμός εἶναι ἕνα παράδειγμα ἑνός μαθηματικοῦ συστήματος γιά τό ὁποῖο οἱ στόχοι τῆς θεωρίας ἀπόδειξης τοῦ Hilbert πραγματοποιοῦνται πλήρως. 'Αλλά αὐτός ὁ λογισμός κωδικοποιεῖ μόνο ἕνα κομάτι τῆς τυπικῆς λογικῆς. Τό ἐρώτημα παραμένει: Μπορεῖ ἕνα τυπικό σύστημα πού περιέχει ὅλη τήν ἀριθμητική ν'ἀποδειχθεῖ συμβιβαστό μέ τήν ἔννοια τοῦ προγράμματος τοῦ Hilbert;

Σ'αὐτό τό αἴνιγμα ἀπάντησε ὁ Gödel. Τό ἄρθρο του τοῦ 1931 ἀπόδειξε ὅτι ὅλες οἱ προσπάθειες ν'ἀποδείξουν ὅτι ἡ ἀριθμητική δέν ἔχει ἀντιφάσεις εἶναι καταδικασμένες σέ ἀποτυχία.

Τά κύρια συμπεράσματά του εἶναι δύο εἰδῶν. Πρῶτα, ἀπόδειξε ὅτι εἶναι ἀδύνατον νά βρεθεῖ μιά μετά-μαθηματική ἀπόδειξη τοῦ συμβιβαστοῦ ἑνός συστήματος πού εἶναι ἀρκετά πλούσιο ὥστε νά περιέχει ὅλη τήν ἀριθμητική - ἐκτός ἄν ἡ ἀπόδειξη ἡ ἴδια χρησιμοποιεῖ κανόνες συνεπαγωγῆς κατά πολύ ἰσχυρότερους ἀπό τούς κανόνες μετασχηματισμοῦ πού χρησιμοποιοῦνται γιά νά συνάγονται θεωρήματα μέσα στό σύστημα. Δηλαδή, σκοτώνουμε ἕνα δράκοντα μέ τό νά δημιουργήσουμε ἕνα ἄλλο.

Τό δεύτερο κύριο συμπέρασμα τοῦ Gödel ἦταν ἀκόμη πιό ἐκπληκτικό καί ἐπαναστατικό, γιατί ἔδειξε καθαρά ἕνα θεμελιώδη περιορισμό τῆς δύναμης τῆς ἴδιας τῆς ἀξιωματικῆς μεθόδου. Ἀπόδειξε ὁ Gödel ὅτι τό Principia ἤ ὁποιο ἄλλο σύστημα μέσα στό ὁποῖο μπορεῖ ν'ἀναπτυχθεῖ ἡ ἀριθμητική, εἶναι οὐσιαστικά ὄχι πλῆρες. Μ'ἄλλα λόγια, μέ δοσμένο ἕνα ὁποιοδήποτε συμβιβαστό σύνολο ἀριθμητικῶν ἀξιωμάτων, ὑπάρχουν ἀληθινές ἀριθμητικές προτάσεις πού δέν εἶναι δυνατόν νά συναχθοῦν ἀπό αὐτό τό σύνολο. Ἕνα κλασικό παράδειγμα ἑνός μαθηματικοῦ "θεωρήματος" πού ἔχει ἀντισταθεῖ σ'ὅλες τίς προσπάθειες γιά ἀπόδειξη εἶναι ἡ εἰκασία τοῦ Christian Goldbach, πού ἰσχυρίζεται ὅτι κάθε ἄρτιος φυσικός ἀριθμός εἶναι τό ἄθροισμα δύο πρώτων ἀριθμῶν. Κανένας ἄρτιος φυσικός ἀριθμός δέν ἔχει βρεθεῖ ποτέ πού νά μήν εἶναι τό ἄθροισμα δύο πρώτων, ἀλλά παρ'ὅλ'αὐτά κανένας δέν ἐπέτυχε μέχρι τώρα νά βρεῖ μιά ἀπόδειξη ὅτι αὐτός ὁ κανόνας ἰσχύει γιά ὅλους τούς ἄρτιους ἀριθμούς. Φυσικά μπορεῖ ν'ἀντιταχθεῖ στά ἐπιχειρήματα τοῦ Gödel ὅτι τό σύνολο τῶν ἀριθμητικῶν ἀξιωμάτων μπορεῖ νά τροποποιηθεῖ ἤ νά ἐπεκταθεῖ ὥστε "ὄχι ἀποδείξιμες" προτάσεις νά γίνουν ἀποδείξιμες. Ἀλλά ὁ Gödel ἔδειξε ὅτι αὐτή ἡ προσπάθεια δέν ὑπόσχεται τελική θεραπεία. Δηλαδή, ἀκόμη κι ἄν ὁποιοσδήποτε πεπερασμένος ἀριθμός ἀξιωμάτων προστεθεῖ, πάντα θά ὑπάρχουν παραπέρα ἀριθμητικές ἀλήθειες πού δέν εἶναι τυπικά ἀποδείξιμες.

Πῶς ἀπόδειξε ὁ Gödel αὐτά τά συμπεράσματά του. Τό ἄρθρο του εἶναι δύσκολο. Ὁ ἀναγνώστης πρέπει νά κάνει κτῆμα του 46 προκαταρτικούς ὁρισμούς, καθώς καί ἀρκετά σημαντικά προκαταρτικά θεωρήματα, προτοῦ προχωρήσει στά κύρια ἀποτελέσματα. Ἐμεῖς θ'ἀκολουθήσουμε ἕνα πολύ εὐκολώτερο δρόμο. Παρ'ὅλα αὐτά ἐλπίζουμε ὅτι θά φωτίσουμε κάπως τό βασικό ἐπιχείρημα.

Οἱ ἀριθμοί τοῦ Gödel

Ὁ Gödel πρῶτα ἐπινόησε μιά μέθοδο ἀντιστοιχία ἑνός ἀριθμοῦ σάν ἐτικέτα γιά κάθε στοιχειῶδες σύμβολο, κάθε τύπο, καί κάθε ἀπόδειξη σ'ἕνα τυπικό σύστημα. Στά στοιχειώδη σύμβολα ἀντιστοίχισε τούς ἀκέραιους ἀπό 1 μέχρι 10· στίς μεταβλητές ἀντιστοίχισε ἀριθμούς σύμφωνα μέ ὡρισμένους κανόνες, πού περιγράφονται στόν παρακάτω πίνακα.

Στοιχειώδη καί συνεκτικά σύμβολα

Σύμβολο	Ἀριθμός Gödel	ἑρμηνεία
~	1	ὄχι
v	2	ἤ
⊃	3	ἄν ... τότε
∃	4	ὑπάρχει...
=	5	ἴσον
0	6	μηδέν
S	7	ὁ ἀμέσως ἑπόμενος ἀριθμός
(	8	σημεῖο στίξης
)	9	σημεῖο στίξης
,	10	σημεῖο στίξης.

Προτασιακές μεταβλητές

Μεταβλητή	Ἀριθμός Gödel
p	12
q	15
r	18
κλπ.	

Ἀτομικές μεταβλητές

Μεταβλητή	Ἀριθμός Gödel	Ἑρμηνεία
x	13	ἀριθμητική μεταβλητή
y	16	ἀριθμητική μεταβλητή
z	19	ἀριθμητική μεταβλητή
κλπ.		

Κατηγορικές μεταβλητές

Μεταβλητή	Ἀριθμός Gödel
P	14
Q	17
R	20
κλπ.	

Γιά νά δοῦμε πῶς ἕνας ἀριθμός ἀντιστοιχεῖ σ'ἕνα δοσμένο τύπο τοῦ συστήματος, ἄς θεωρήσουμε τόν τύπο:

$$(\exists x)(x = Sy),$$

πού ἑρμηνεύεται κατά γράμμα "ὑπάρχει ἕνα x, ὥστε ὁ x εἶναι ὁ ἄμεσος διάδοχος τοῦ y ", καί πού ἰσχυρίζεται ὅτι κάθε φυσικός ἀριθμός ἔχει ἕνα ἄμεσο διάδοχο. Οἱ ἀριθμοί πού ἀντιστοιχοῦν στά 10 σύμβολα τοῦ τύπου εἶναι κατά σειρά οἱ

8,4,13,9,8,13,5,7,16,9.

Τώρα αὐτοί οἱ ἀριθμοί θά χρησιμοποιηθοῦν σάν ἐκθέτες τῶν ἀρχικῶν 10 πρώτων ἀριθμῶν (δηλ. 2,3,5,7,11,... κλπ.). Ἔτσι σχηματίζεται ὁ ἀριθμός

$$2^8\times 3^4\times 5^{13}\times 7^9\times 11^8\times 13^{13}\times 17^5\times 19^7\times 23^{16}\times 29^9.$$

Αὐτό τό γινόμενο εἶναι ὁ ἀριθμός Gödel τοῦ τύπου. Μέ τόν ἴδιο τρόπο κάθε τύπος μπορεῖ ν'ἀναπαρασταθεῖ ἀπό ἕνα μοναδικό ἀριθμό.

Ἀντιστοιχοῦμε ἕνα ἀριθμό σέ μιά ἀκολουθία τύπων,πού μπορεῖ νά ἐμφανιστοῦν σέ μιά ἀπόδειξη, μέ μιά ἀνάλογη διαδικασία. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουμε μιά ἀκολουθία δύο τύπων, ἀπό τούς ὁποίους ὁ δεύτερος συνάγεται ἀπό τόν πρῶτο. Γιά παράδειγμα,μέ ἀντικατάσταση τοῦ 0 στό y στόν παραπάνω τύπο λαμβάνομε

$$(\exists x)\ \ (x = S0),$$

πού μᾶς λέει ὅτι τό 0 ἔχει ἕνα ἄμεσο διάδοχο. Τώρα ὁ πρῶτος καί ὁ δεύτερος τύπος ἔχουν ἀριθμούς Gödel, ἔστω m καί n, ἀντιστοίχως. Γιά νά δώσουμε μιά ἐτικέτα σ'αὐτήν τήν ἀκολουθία, χρησιμοποιοῦμε τούς ἀριθμούς Gödel m καί n σάν ἐκθέτες, καί πολλαπλασιάζουμε τούς ἀρχικούς δύο πρώτους ἀριθμούς (2 καί 3) ὑψωμένους στίς ἀντίστοιχες δυνάμεις. Δηλαδή ὁ ἀριθμός Gödel πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἀκολουθία εἶναι

$$2^m \times 3^n.$$

Μ'αὐτό τόν τρόπο ἀντιστοιχοῦμε ἕνα ἀριθμό σέ κάθε ἀκολουθία τύπων, ἤ σέ κάθε ἄλλη ἔκφραση μέσα στό σύστημα.

Ἔτσι ἔχει ἐπιτευχθεῖ, μέχρι τώρα, μιά μέθοδος γιά τήν πλήρη ἀριθμοποίηση ἑνός τυπικοῦ συστήματος. Ἡ μέθοδος συνίσταται οὐσιαστικά σ'ἕνα κατάλογο ὁδηγιῶν γιά νά κάνουμε μιά,μία-πρός μία, ἀντιστοίχιση μεταξύ συγκεκριμένων ἀριθμῶν καί διαφόρων στοιχείων ἤ συνδυασμῶν στοιχείων τοῦ συστήματος. Μία δοσμένη ἔκφραση ἀριθμεῖται κατά τρόπο μοναδικό. Ἀκόμη, μποροῦμε ἀντίστροφα ἀπό κάθε ἀριθμό Gödel νά ἐπανερμηνεύσουμε τήν ἔκφραση πού ἀναπαριστᾶ μέ τό νά γράφουμε τόν ἀριθμό σάν γινόμενο δυνάμεων πρώτων ἀριθμῶν, κάτι πού σύμφωνα μ'ἕνα φημισμένο θεώρημα τῆς ἀριθμητικῆς μπορεῖ νά γίνει κατά ἕνα ἀκριβῶς τρόπο.

Παράδειγμα. Ὁ ἀριθμητικός τύπος "μηδέν ἴσον μηδέν" ἔχει ἀριθμό Gödel ἴσο μέ 125 ἑκατομμύρια. Ὁ ὑπολογισμός γίνεται σύμφωνα μέ τ'ἀκόλουθα βήματα

A	125.000.000	
B	64×125×15.625	
Γ	$2^6\times 3^5\times 5^6$	
Δ	$\begin{matrix} 6 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & = & 0 \end{matrix}$	(σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη ἀντιστοίχιση).
E	0 = 0	

Διαβάζοντας αὐτόν τόν ὑπολογισμό ἀπό τό A πρός τό E μᾶς δείχνει ὅτι ὁ ἀριθμός αὐτός εἶναι ἀριθμός Gödel καί ἑρμηνεύει τόν τύπο "0=0". Διαβάζοντάς τον ἀπό τό E πρός τό A περιγράφει τόν τρόπο πού ὑπολογίζεται ὁ ἀριθμός Gödel αὐτοῦ τοῦ τύπου.

Μ'ἄλλα λόγια, μποροῦμε ν'ἀναλύσουμε τόν ἀριθμό σάν νά ἦταν μιά μηχανή, νά δοῦμε πῶς κατασκευάστηκε καί τί βρίσκεται μέσα του, καί μέ τόν ἴδιο τρόπο μποροῦμε ν'ἀναλύσουμε μιά ἔκφραση ἤ μιά ἀπόδειξη.

Αὐτό ὁδηγεῖ στό ἑπόμενο βῆμα. Ὁ Gödel σκέφτηκε ὅτι μετα-μαθηματικές προτάσεις μποροῦν νά μεταφρασθοῦν σέ ἀριθμη -

τικούς ὅρους μέ μιά διαδικασία ἀνάλογη τῆς ἀντιστοίχισης. Στή γεωγραφία οἱ σχέσεις μέσα στό χῶρο μεταξύ σημείων στήν σφαιρική γῆ μποροῦν νά προβληθοῦν σ'ἕνα ἐπίπεδο χάρτη. Στή μαθηματική φυσική σχέσεις μεταξύ τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἠλεκτρικῶν ρευμάτων μποροῦν νά ἀντιστοιχισθοῦν καί περιγραφοῦν μέ τήν ροή τῶν ὑγρῶν. Στά ἴδια τά μαθηματικά οἱ σχέσεις στή γεωμετρία μποροῦν νά ἑρμηνευθοῦν μέ τήν ἄλγεβρα. 'Ο Gödel ἀντιλήφθηκε ὅτι ἄν πολύπλοκες μετα-μαθηματικές προτάσεις γιά ἕνα σύστημα μποροῦσαν νά ἑρμηνευθοῦν ἀπό, ἤ νά κατοπτρισθοῦν σέ ἀριθμητικές προτάσεις μέσα στό ἴδιο τό σύστημα, θά μποροῦσε νά ἐπιτευχθεῖ ἕνα μεγάλο κέρδος σέ καθαρότητα ἔκφρασης καί εὐκολίας στήν ἀνάλυση. Ξεκάθαρα θά ἦταν εὐκολότερο νά μεταχειρισθοῦμε τά ἀριθμητικά ἀντίστοιχα συνθέτων λογικῶν σχέσεων παρά τίς ἴδιες τίς λογικές σχέσεις. Μιά τετριμμένη ἀναλογία εἶναι ἡ ἀκόλουθη: Ἄν οἱ πελάτες σέ ἕνα σουπερμάρκετ ἐφοδιασθοῦν μέ ἀριθμημένα εἰσιτήρια πού καθορίζουν τήν σειρά πού βρίσκονται στήν οὐρά ἀναμονῆς, τότε ἁπλῶς ἐξετάζοντας τούς ἀριθμούς μποροῦμε νά δοῦμε πόσοι πελάτες ἔχουν ἤδη ἐξυπηρετηθεῖ, πόσοι ἀναμένουν ἀκόμη ποιός προηγεῖται ποιοῦ καί κατά πόσους πελάτες, κ.ο.κ.

'Ο Gödel δέν σκόπευε τίποτα λιγότερο ἀπό τήν πλήρη ἀριθμοποίηση τῶν μετα-μαθηματικῶν. Ἄν κάθε μετα-μαθηματική διατύπωση μπορεῖ νά ἀναπαρασταθεῖ μέ μοναδικό τρόπο στό τυπικό σύστημα μ'ἕνα τύπο πού ἐκφράζει μιά σχέση μεταξύ ἀριθμῶν, τότε προβλήματα λογικῆς ἐξάρτησης μεταξύ μετα-μαθηματικῶν προτάσεων θά μποροῦσαν νά ἐρευνηθοῦν μελετώντας τίς ἀντίστοιχες σχέσεις μεταξύ ἀκεραίων ἀριθμῶν. 'Ο Gödel πραγματικά ἐπέτυχε ἐξαιρετικά ν'ἀντιστοιχίσει τά μετα-μαθηματικά τῆς ἀριθμητικῆς στήν ἴδια τήν ἀριθμητική. Ἄς δοῦμε ἕνα μόνο παράδειγμα πῶς μιά μετα-μαθηματική πρόταση μπορεῖ ν'ἀντιστοιχισθεῖ μέ ἕνα τύπο στό τυπικό σύστημα τῆς ἀριθμητικῆς. Ἄς θεωρήσουμε τόν τύπο

$$(p \vee p) \supset p.$$

Μποροῦμε νά κάνουμε τήν μετα-μαθηματική πρόταση ὅτι ὁ τύπος $(p \vee p)$ εἶναι ἕνα ἀρχικό τμῆμα αὐτοῦ τοῦ τύπου. Μποροῦμε ν' ἀναπαραστήσουμε αὐτήν τήν μετα-μαθηματική πρόταση μέ τόν ἀριθμητικό τῦπο πού μᾶς λέει ὅτι ὁ ἀριθμός Gödel τοῦ ἀρχικοῦ τμήματος εἶναι ἕνας παράγοντας τοῦ ἀριθμοῦ Gödel τοῦ πλήρους τύπου. Αὐτό ἐμφανῶς συμβαίνει ἐφ'ὅσον ὁ ἀριθμός Gödel τοῦ $(p \vee p)$ εἶναι $2^8 \times 3^{12} \times 5^{12} \times 7^{12} \times 11^9$, ἐνῶ ὁ ἀριθμός Gödel τοῦ $(p \vee p) \supset p$ εἶναι $2^8 \times 3^{12} \times 5^{12} \times 7^{12} \times 11^9 \times 13^3 \times 17^{12}$.

Ἡ ἀναποκρίσιμη πρόταση

Ἔχουμε φθάσει τώρα στήν καρδιά τῆς ἀνάλυσης τοῦ Gödel. Ἀπόδειξε ὅτι μποροῦμε νά κατασκευάσουμε ἕνα ἀριθμητικό τύπο G, τοῦ ὁποίου τόν ἀριθμό Gödel ἄς συμβολίσουμε μέ h, πού ἀντιστοιχεῖ στήν μεταμαθηματική πρόταση:

"Ὁ τύπος μέ ἀριθμό Gödel h δέν εἶναι ἀποδείξιμος". Μ' ἄλλα λόγια, αὐτός ὁ τύπος G τελικά ἰσχυρίζεται τήν ἴδια τήν δική του μή-ἀποδειξιμότητα, παρ'ὅλο πού εἶναι ἕνας φορμαλιστικά νόμιμος τύπος πού ἀνήκει στό τυπικό σύστημα τῆς ἀριθμητικῆς. Ὁ Gödel τότε προχώρησε στήν ἐξέταση τοῦ προβλήματος κατά πόσο ὁ G εἶναι ἤ δέν εἶναι ἕνας ἀποδείξιμος τύπος τῆς ἀριθμητικῆς. Ἐπέτυχε ν'ἀποδείξει ὅτι:

Ὁ G εἶναι ἀποδείξιμος τότε καί μόνο ἄν ἡ ἄρνηση του ~G εἶναι ἐπίσης ἀποδείξιμη.

Ἀλλά ἄν ἕνας τύπος καί ἡ ἄρνηση του εἶναι καί οἱ δύο ἀποδείξιμοι ἀπό ἕνα σύνολο ἀξιωμάτων, τότε προφανῶς τά ἀξιώματα δέν εἶναι συμβιβαστά. Ἕπεται ὅτι ἄν ἡ ἀριθμητική εἶναι συμβιβαστή τότε οὔτε ὁ G οὔτε ἡ ἄρνηση του εἶναι ἀποδείξιμοι. Δηλαδή, ὁ G εἶναι ἀναποκρίσιμος τύπος τῆς ἀριθμητικῆς. Τώρα ἀπ'αὐτό ὁ Gödel ἀπόδειξε τήν μή ἀποδειξιμότητα τῆς πρότασης ὅτι ἡ ἀριθμητική εἶναι συνεπής. Μπορεῖ νά δειχτεῖ ὅτι μιά μεταμαθηματική διατύπωση τῆς συνέπειας τῆς ἀριθμητικῆς ἀντιστοιχεῖ σέ ἕνα συγκεκριμένο ἀριθμητικό τύπο, A, καί ὅτι ὁ ἀριθμητικός τύπος $A \supset G$ (ἄν A, τότε G) εἶναι ἀποδείξιμος. Ἔτσι ἄν ὁ A ἦταν ἀποδείξιμος, θά ἦταν ἐπίσης καί ὁ G. Ἀλλά μόλις εἴδαμε ὅτι ὁ G δέν εἶναι ἀποδείξιμος. Συνεπάγεται ὅτι ὁ A εἶναι ἀναποκρίσιμος. Ἐν ὀλίγοις ἡ συνέπεια τῆς ἀριθμητικῆς εἶναι ἀναποκρίσιμη μέ ὁποιαδήποτε μεταμαθηματική συλλογιστική πού μπορεῖ νά παρασταθεῖ μέσα στό φορμαλισμό τῆς ἀριθμητικῆς.

Ἡ ἀνάλυση τοῦ Gödel δέν ἀποκλείει μιά μεταμαθηματική ἀπόδειξη τῆς συνέπειας τῆς ἀριθμητικῆς· στήν πραγματικότητα τέτοιες ἀποδείξεις ἔχουν κατασκευαστεῖ, πιό ἀξιομνημόνευτα ἀπό τόν Gerhard Gentzen, μέλος τῆς σχολῆς τοῦ Hilbert. Ἀλλ'αὐτές οἱ "ἀποδείξεις" δέν πετυχαίνουν ἀκριβῶς τόν ἀρχικό τους στόχο, γιατί χρησιμοποιοῦν κανόνες συνεπαγωγῆς τῶν ὁποίων ἡ ἐσωτερική συνέπεια εἶναι τόσο "ἀνοικτή" σέ ἀμφιβολία, ὅσο εἶναι καί ἡ τυπική συμβιβαστότητα τῆς ἀριθμητικῆς. Ἡ ἀπόδειξη τοῦ Gentzen χρησιμοποιεῖ ἕνα κανόνα συνεπαγωγῆς, πού στήν πράξη ἐπιτρέπει σ'ἕναν τύπο νά μπορεῖ νά συναχθεῖ ἀπό μιά ἄπειρη κλάση προϋποθέσεων. Καί ἡ χρησιμοποίηση αὐτῆς τῆς μή πεπερασμένης μεταμαθηματικῆς ἔννοιας μᾶς γυρίζει γιά μιά ἀκόμα φορά στή δυσκολία πού τό ἀρχικό πρόγραμμα του ὁ Hilbert σκόπευε νά λύσει.

Ὑπάρχει καί μιά ἄλλη ἔκπληξη. Ἄν καί ὁ τύπος G εἶναι ἀναποκρίσιμος, μπορεῖ νά δειχτεῖ μέ μεταμαθηματικούς συλλογισμούς ὅτι ὁ G εἶναι παρά ταῦτα μιά ἀληθινή ἀριθμητική πρόταση καί ὅτι ἐκφράζει μιά ἰδιότητα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Τό ἐπιχείρημα γι'αὐτό τό συμπέρασμα εἶναι πολύ ἁπλό. Ἀρκεῖ νά θυμηθοῦμε μόνο ὅτι ὁ Gödel ἀπεικόνισε μεταμαθηματικές προτάσεις σέ ἀριθμητικούς τύπους, μέ τέτοιο τρόπο ὥστε, κάθε ἀληθινή μεταμαθηματική πρόταση ἀντιστοιχεῖ σέ ἕναν ἀληθινό ἀριθμητικό τύπο. Τώρα ὁ G ἀντιστοιχεῖ σέ μιά μεταμαθηματική πρόταση ("ὁ τύπος μέ ἀριθμό Gödel h δέν εἶναι ἀποδείξιμος") πού, ὅπως εἴδαμε εἶναι ἀληθινή, ἐκτός ἄν ἡ ἀριθμητική εἶναι μή συνεπής. Συνεπάγεται ὅτι ὁ ἴδιος ὁ G πρέπει νά εἶναι ἀληθινός. Ἔχουμε,μ' αὐτό τόν τρόπο, ἀποδείξει μιά ἀριθμητική ἀλήθεια μέ ἕνα μεταμαθηματικό ἐπιχείρημα.

Ἔτσι ἐρχόμαστε στό φινάλε τῆς ἐκπληκτικῆς καί βαθειᾶς πνευματικῆς συμφωνίας τοῦ Gödel. Ἡ ἀριθμητική εἶναι μή πλήρης, μέ τήν ἀπόλυτα καθαρή ἔννοια, ὅτι ὑπάρχει τουλάχιστον μιά ἀριθμητική ἀλήθεια πού δέν μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ ἀπό τά ἀριθμητικά ἀξιώματα καί, ἀκόμα, πού μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ μέ ἕνα μεταμαθηματικό ἐπιχείρημα ἔξω ἀπό τό σύστημα. Ἐπιπλέον ἡ ἀριθμητική εἶναι οὐσιαστικά μή πλήρης, γιατί ἀκόμα καί ἄν ὁ ἀληθινός μεταμαθηματικός τύπος G θεωρηθεῖ σάν ἀξίωμα καί προστεθεῖ στά ἀρχικά ἀξιώματα τό αὐξημένο σύστημα δέν θά πετύχαινε νά "παράγει" φορμαλιστικά ὅλες τίς ἀλήθειες τῆς ἀριθμητικῆς: θά μπορούσαμε ἀκόμα νά κατασκευάσουμε ἕναν ἀληθινό τύπο, πού δέν θά ἦταν φορμαλιστικά ἀποδείξιμος μέσα στό σύστημα. Καί τέτοια θά ἦταν ἡ περίπτωση, ἄσχετα μέ τό πόσο συχνά θά ἐπαναλαμβάναμε τή διαδικασία πρόσθεσης ἀξιωμάτων στό ἀρχικό σύνολο ἀξιωμάτων.

Αὐτό τό ἀξιοσημείωτο συμπέρασμα καθιστᾶ προφανή ἕνα ἐγγενή περιορισμό τῆς ἀξιωματικῆς μεθόδου. Ἀντίθετα ἀπό προηγούμενες παραδοχές, ἡ ἀπέραντη "ἤπειρος" τῆς ἀριθμητικῆς ἀλήθειας δέν εἶναι δυνατόν νά συστηματοποιηθεῖ μέ τόν προσδιορισμό ἑνός σταθεροῦ ἀρχικοῦ καταλόγου ἀξιωμάτων.

Ἄνθρωποι καί Ὑπολογιστικές Μηχανές

Δέν ἔχουμε φθάσει ἀκόμη στό πλῆρες βάθος τῶν συνεπειῶν τῶν ἀποτελεσμάτων τοῦ Gödel. Δείχνουν ὅτι ἡ ἐλπίδα γιά τήν εὕρεση μιᾶς ἀπόλυτης ἀπόδειξης γιά τή συνέπεια ὁποιουδήποτε ἀπαγωγικοῦ συστήματος πού νά ἐκφράζει τό ὅλο τῆς ἀριθμητικῆς δέν μπορεῖ νά πραγματοποιηθεῖ, ἄν μιά τέτοια ἀπόδειξη πρέπει νά ἱκανοποιεῖ τίς περί πεπερασμένου ἀπαιτήσεις τοῦ ἀρχικοῦ προγράμματος τοῦ Hilbert. Δείχνουν ἐπίσης ὅτι ὑπάρχει ἕνας ἀτέλειωτος ἀριθμός ἀληθινῶν ἀριθμητικῶν προτάσεων πού δέν μποροῦν νά ἀποδειχτοῦν φορμαλιστικά ἀπό κανένα συγκεκριμένο σύνολο ἀξιωμάτων, σύμφωνα μέ ἕνα κλειστό σύνολο κανόνων συνεπαγωγῆς Συνεπάγεται πώς μιά ἀξιωματική προσέγγιση στή θεωρία ἀριθμῶν γιά παράδειγμα, δέ μπορεῖ νά ἐξαντλήσει τό πεδίο τῆς ἀριθμητικῆς ἀλήθειας. Κατά πόσο ἕνας γενικός καθολικός ὁρισμός γιά τή μαθηματική ἤ τή λογική ἀλήθεια μπορεῖ νά ἐπινοηθεῖ καί κατά πόσο καθώς ὁ ἴδιος ὁ Gödel φαίνεται νά πιστεύει, μόνο ἕνας ἀκρεφνής Πλατωνικός ρεαλισμός μπορεῖ νά ὁδηγήσει σ' ἕνα τέτοιο ὁρισμό, εἶναι προβλήματα ὑπό συζήτηση.

Τά συμπεράσματα τοῦ Gödel ἔχουν σχέση μέ τό ἐρώτημα, ἄν μπορεῖ νά κατασκευαστεῖ μιά ὑπολογιστική μηχανή πού θά εἶναι ἴση μέ τόν ἀνθρώπινο ἐγκέφαλο, ὡς πρός τόν μαθηματικό συλλογισμό. Οἱ σημερινές ὑπολογιστικές μηχανές εἶναι ἐφοδιασμένες μέ ἕνα ὁρισμένο σύνολο κατευθύνσεων καί λειτουργοῦν μ'ἕνα τρόπο βῆμα-πρός-βῆμα. 'Αλλά ὑπό τό φῶς τοῦ θεωρήματος μή πληρότητας τοῦ Gödel, ὑπάρχει ἕνα ἀτέλειωτο σύνολο προβλημάτων στήν στοιχειώδη θεωρία ἀριθμῶν, γιά τά ὁποῖα τέτοιες μηχανές εἶναι ἐγγενῶς ἀνίκανες νά δώσουν ἀπαντήσεις, ὅσο περίπλοκοι καί ἄν εἶναι οἱ ἐσωτερικοί τους μηχανισμοί καί ὅσο γρήγορες καί ἄν εἶναι στήν ἐκτέλεση τῶν πράξεών τους.'Ο ἀνθρώπινος ἐγκέφαλος μπορεῖ νά ἔχει δικούς του ἔμφυτους περιορισμούς καί μπορεῖ νά ὑπάρχουν μαθηματικά προβλήματα πού νά εἶναι ἀνίκανος νά λύσει. 'Αλλά, ἀκόμα καί ἔτσι, ὁ ἀνθρώπινος ἐγκέφαλος φαίνεται ὅτι ἔχει ἐνσωματωμένη μιά δομή κανόνων λειτουργίας, πού εἶναι πολύ πιό ἰσχυρή ἀπό τήν δομή τῶν σήμερα έπινοηθέντων τεχνητών μηχανών. Δέν ύπάρχει άμεση προοπτική άντικατάστασης τοῦ ἀνθρώπινου μυαλοῦ ἀπό ρομπότ.

Ἡ ἀπόδειξη τοῦ Gödel δέν θά πρέπει νά ἑρμηνευτεῖ σάν πρόσκληση γιά ἀπελπισία. Ἡ ἀνακάλυψη ὅτι ὑπάρχουν ἀριθμητικές ἀλήθειες πού δέν μποροῦν νά ἀποδειχτοῦν φορμαλιστικά, δέ σημαίνει ὅτι ὑπάρχουν ἀλήθειες πού εἶναι γιά πάντα ἀδύνατο νά γίνουν γνωστές, ἤ ὅτι μιά μυστικιστική διαίσθηση (ἐνόραση)πρέπει νά ἀντικαταστήσει τήν πειστική ἀπόδειξη. Σημαίνει ὅτι, οἱ πηγές τῆς ἀνθρώπινης διάνοιας δέν ἔχουν, καί δέν μποροῦν, νά τυποποιηθοῦν (φορμαλιστικοποιηθοῦν) πλήρως, καί ὅτι νέες ἀρχές ἀπόδειξης περιμένουν πάντα νά ἀνακαλυφθοῦν. Ἔχουμε δεῖ ὅτι οἱ μαθηματικές προτάσεις πού δέν μποροῦν νά ἀποδειχτοῦν μέ φορμαλιστική ἀπαγωγή (ἀπό ἕνα δοσμένο σύνολο ἀξιωμάτων ἔχουν τήν δυνατότητα παρά ταῦτα, νά ἀποδειχτοῦν μέ "ὄχι τυπικό" μεταμαθηματικό συλλογισμό.

Οὔτε τό γεγονός ὅτι εἶναι ἀδύνατο νά κατασκευαστεῖ μιά ὑπολογιστική μηχανή ἰσοδύναμη μέ τόν ἀνθρώπινο ἐγκέφαλο, σημαίνει ἀναγκαστικά, ὅτι δέν μποροῦμε νά ἐλπίζουμε ὅτι θά ἑρμηνεύσουμε τή ζωντανή ὕλη καί τό ἀνθρώπινο λογικό μέ φυσικούς καί χημικούς ὅρους. Ἡ δυνατότητα τέτοιων ἑρμηνειῶν οὔτε ἀποκλείεται οὔτε ἐπιβεβαιώνεται ἀπό τό θεώρημα μή πληρότητας τοῦ Gödel. Τό θεώρημα δείχνει ὅτι ἡ δομή καί ἡ δύναμη τοῦ ἀνθρώπινου ἐγκέφαλου εἶναι πολύ πιό περίπλοκες ἀπό ὁποιασδήποτε μή ζωντανῆς μηχανῆς πού ἔχει ὁραματιστεῖ κανείς. Ἡ ἴδια ἡ δουλειά τοῦ Gödel εἶναι ἕνα ἀξιοσημείωτο παράδειγμα περιπλοκότητας καί εὐφυίας. Εἶναι μιά εὐκαιρία ὄχι γιά ἀποθάρρυνση, ἀλλά γιά ἀνανεωμένη ἐκτίμηση στίς δυνάμεις τῆς δημιουργικῆς λογικῆς.