Author: Δ. Α. Αναπολιτάνος

Title: Το άπειρο στα Μαθηματικά

Abstract: Στο άρθρο αυτό δίδονται οι έννοιες του δυναμικού (ή δυνητικού) και πραγματικού άπειρου, καθώσ και κάποιες άλλες πλευρές της έννοιας του απείρο, ιδιάιτερα σπουδαίες και σημαντικές και άλλες πλευρές συνδεδεμένες με το αξίωμα της επιλογής

Creator: HDML

ΤΟ ΑΠΕΙΡΟ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Δ.Α. Ἀναπολιτάνος

1. Εἰσαγωγικά

Ὁ τίτλος τοῦ ἄρθρου μας αὐτοῦ ἀκούγεται σχετικά φιλόδοξος. Δίνει ἴσως τήν ἐντύπωση πώς θά ἀκολουθήσει μιά ἐξαντλητική ἀνάλυση τῆς ἔννοιας τοῦ ἀπείρου καί τοῦ ρόλου, πού παίζει στά Μαθηματικά. Κάτι τέτοιο εἶναι μακριά ἀπό τίς προθέσεις μας, πού περιορίζονται στό νά μπορέσουμε νά διατυπώσουμε μερικές σκέψεις μας γύρω ἀπό τό ἄπειρο, δίνοντας συγχρόνως ὅσο γίνεται πιό πολλές πληροφορίες γύρω ἀπό τόν ρόλο, πού παίζει αὐτό στά Μαθηματικά καί ἰδιαίτερα στή Θεωρία Συνόλων. Κάποιες ἀπό τίς πληροφορίες καί σκέψεις μας θά ἔχουν ἀναγκαστικά τεχνικό χαρακτήρα καί κάποιες ἄλλες θά συνεπάγονται ἴσως τή δυνατότητα συγκεκριμένων φιλοσοφικῶν προεκτάσεων.

Τό κίνητρο γιά τή γραφή αὐτοῦ μας τοῦ ἄρθρου μπορεῖ νά ἀποδοθεῖ στήν γοητεία, πού προσωπικά ἀσκεῖ ἡ ἔννοια τοῦ ἀπείρου πάνω μας. Ἕνας πρόσθετος λόγος γιά τή γραφή του ἀποτελεῖ τό γεγονός πώς, σύμφωνα μέ ὅσα ξέρομε, ἡ Ἑλληνική τουλάχιστον βιβλιογραφία γύρω ἀπό τό θέμα εἶναι φτωχή. Πιστεύοντας λοιπόν, πώς καλύπτουμε, ὅσο αὐτό εἶναι δυνατό, ἕνα κάποιο κενό, ἐλπίζουμε πώς ἡ προσπάθειά μας αὐτή θά βρεῖ ἀπό τόν ἀναγνώστη τήν ὑποδοχή, πού προσδοκοῦμε.

Οἱ ρίζες τῆς ἔννοιας τοῦ ἀπείρου χάνονται μέσα στά δαιδαλώδη μονοπάτια τῆς ἱστορίας τῆς ἀνθρώπινης σκέψης. Ἴσως, θά μποροῦσε κανένας νά ἀνιχνεύσει κάποιες ἀπαρχές τῆς ἔννοιας αὐτῆς στόν τρόπο, πού τό ἀνθρώπινο μυαλό προσπαθοῦσε νά συλλάβει τό "ὅλον" καί τό "μέρος", ἤ γιά παράδειγμα στόν τρόπο, πού προσπαθοῦσε νά προσδιορίσει τό "θεῖο" σέ συνάρτηση μέ τό πρόβλημα τοῦ θανάτου καί τῆς ἀθανασίας. Θά μποροῦσε κανένας ἀκόμα νά ἀνιχνεύσει αὐτές τίς ἀπαρχές στήν ἴδια τή διαδικασία τῆς ἀρίθμησης, πού φαίνεται πώς εἶναι τουλάχιστο τόσο παλιά ὅσο κι ὁ ἄνθρωπος.

Εἶναι σίγουρο πιά, πώς οἱ 'Αρχαῖοι Ἕλληνες καταλάβαιναν τό "ἐν πορεία" ἄπειρο καί πώς χρησιμοποιούσαν τήν ἔννοια τῆς ἐπαγωγῆς. 'Ακόμα εἶναι σίγουρο πώς εἶχαν μιά ἀντίληψη τοῦ ἀπείρου σάν ὁλότητας ἄν καί δέν ὑπάρχουν κείμενα πού νά δείχνουν πώς ἔκαναν διάκριση ἀνάμεσα στά δύο αὐτά εἴδη ἀπείρου. 'Επίσης πίστευαν, πώς τό "μέρος" εἶναι μικρότερο τοῦ ὅλου. Σύμφωνα μέ τόν B. Russel ὁ πρῶτος, πού ἔδειξε πώς κάτι τέτοιο δέν ἰσχύει ἦταν ὁ Γαλλιλαῖος, ὁ ὁποῖος τοποθέτησε τούς Φυσικούς ἀριθμούς σέ ἕνα πρός ἕνα ἀντιστοιχία μέ τό σύνολο τῶν τετραγώνων τους, πού συμβαίνει νά εἶναι γνήσιο ὑποσύνολό τους.

'Η ἔννοια τοῦ ἀπείρου, πού προσωπικά πιστεύουμε, πώς πρέπει νά δημιουργήθηκε σάν ὁ ἀντίποδας τῆς ἔννοιας τοῦ πεπερασμένου καί πού νομίζουμε πώς βρίσκονταν καί βρίσκεται σέ κατάσταση συνεχοῦς διαπάλης μαζί της, ἀποτέλεσε τήν γόνιμη πηγή πολλῶν "παραδόξων" καί μποροῦμε νά ποῦμε πώς τά θεμέλια τῶν Μαθηματικῶν πολλές φορές μπῆκαν σέ σοβαρότατο κίνδυνο ἐξ αἰτίας της. Οἱ ἴδιοι οἱ Μαθηματικοί βρέθηκαν πολλές φορές σέ κατάσταση ὀξύτατης ἀντιδικίας, πού σέ κάποιες περιπτώσεις μποροῦσε νά πάρει, καί πῆρε, προσωπικές διαστάσεις, μέ ἐπίκεντρο τήν ἔννοια τοῦ ἀπείρου καί τήν ἀποδοχή του σάν ὑπαρκτοῦ ἤ μή.

Ένα τέτοιο παράδειγμα άντιδικίας άποτελεΐ ή άντιδικία τοῦ Kronecker μέ τόν Cantor στά τέλη τοῦ προηγούμενου αίώνα. Ὁ Cantor ἔχοντας είσαγάγει τήν ἔννοια τοῦ συνόλου προχώρησε σέ μιά σοβαρότατη καί σημαντικότατη ἀνάλυση τῆς ἔννοιας τοῦ ἀπείρου, πού ὁδηγοῦσε σέ ἀποδοχή τῆς ὕπαρξης του μέσα στά πλαίσια τοῦ Καντοριανοῦ σύμπαντος. Ὁ Kronecker πολέμησε μέ πάθος αὐτή τήν ἰδέα τῆς ἀποδοχῆς τοῦ ἀπείρου σάν ὑπαρκτοῦ ἀπορρίπτοντας στό σύνολό της τήν δουλειά τοῦ Cantor.

Χαρακτηριστική αὐτῆς τῆς ἀντιδικίας εἶναι ἡ παρακάτω φράση, πού ἀποδίδεται ἀπό τούς Ἱστορικούς τῶν Μαθηματικῶν στόν Kronecker.

"Τούς ἀκέραιους ἀριθμούς τούς ἔφτιαξε ὁ καλός θεός,ὅλα τά ἄλλα εἶναι ἀνθρώπινο ἔργο".

Ἡ ἀντιδικία αὐτή βρῆκε ἄξιο διάδοχο της στήν ἀντιδικία ἀνάμεσα στήν Ἐνορατική Σχολή (Intuitionists) καί στήν Σχολή τῶν Φορμαλιστῶν τοῦ D. Hilbert. Ἡ ἀντιδικία αὐτή εἶχε σάν ἐπίκεντρό της, ἀνάμεσα στά ἄλλα καί τήν ἔννοια τοῦ ἀπείρου.

Κάτι πού πρέπει πάντως νά δεχθοῦμε εἶναι, πώς ἀνεξάρτητα μέ τό ποιά θέση παίρνει καθένας στό πρόβλημα τοῦ ἀπείρου, ἡ εἰσαγωγή τῆς ἔννοιας ὑπῆρξε ἐξαιρετικά γόνιμη στά Μαθηματικά, ὅπως ἄλλωστε ἐλπίζουμε πώς θά φανεῖ καί ἀπό τή συνέχεια τοῦ ἄρθρου μας.

2. Δυνητικό καί Πραγματικό Ἄπειρο.

Εἶναι γεγονός, πώς ἡ δουλειά τοῦ Cantor καί συγκεκριμένα ἡ εἰσαγωγή ἀπ'αὐτόν τῆς ἔννοιας τοῦ συνόλου ἔπαιξε καταλυτικό ρόλο στό ξεκαθάρισμα τῆς ἔννοιας τοῦ ἀπείρου καί στήν τελική ἀποδοχή τῆς ὕπαρξης του ἀπό τό μεγαλύτερο κομμάτι τῆς Μαθηματικῆς κοινότητας. Βέβαια ὁ ὁρισμός τῆς ἔννοιας τοῦ συνόλου ἀπό τόν Cantor, (τόν ὁποῖο δίνουμε ἀμέσως παρακάτω), ἀπέχει πολύ ἀπό τοῦ νά εἶναι ἕνας αὐστηρά διατυπωμένος ὁρισμός. Τά τρωτά του ὅμως δέν μᾶς ἐμποδίζουν νά δοῦμε, πώς μ'αὐτόν εἰσάγεται ἡ δυνατότητα νά ἀντιληφθεῖ κανένας τό ἄπειρο σάν κάτι "ὁλικό" καί "τελειωμένο". Ὅρισε λοιπόν ὁ Cantor τήν ἔννοια τοῦ συνόλου ὡς ἑξῆς (Βλέπε (9)):

"Ἕνα σύνολο εἶναι μιά συλλογή καθορισμένων καί διακεκριμένων μεταξύ τους ἀντικειμένων τῆς διαίσθησης ἤ τῆς σκέψης μας".

Πρέπει βέβαια νά ποῦμε πώς χρησιμοποιώντας τήν λέξη "καθορισμένων" ἐννοεῖ, πώς δεδομένου ἑνός συνόλου a θά πρέπει νά εἶναι, ἀπό τήν ἴδια τή φύση τοῦ συνόλου a, καθορισμένο ἄν ὁποιοδήποτε ἀντικείμενο x ἀνήκει στό a ἤ ὄχι. Αὐτό δέν σημαίνει ἀναγκαστικά, πώς πρέπει νά ὑπάρχει ἕνας ἀλγόριθμος , δηλαδή μιά ἀποτελεσματική ἀναγνωριστική διαδικασία, πού νά καθορίζει ἄν τό ὁποιοδήποτε ἀντικείμενο x ἀνήκει στό a ἤ ὄχι. Γιά παράδειγμα, ὁ ὁρισμός τῆς ἔννοιας τοῦ ὑπερβατικοῦ ἀριθμοῦ θά ἦταν ἀρκετός γιά τόν ὁρισμό τοῦ συνόλου ὅλων τῶν πραγματικῶν ὑπερβατικῶν ἀριθμῶν.

Μά ἄς ξαναγυρίσουμε στήν ἔννοια τοῦ ἀπείρου. Πρέπει ἐδῶ νά ποῦμε, πώς δέν εἶναι δυνατό νά μιλᾶμε γιά μιά "ἑνιαῖα" ἔννοια ἀπείρου καί πρέπει νά ξεκαθαρίσουμε πώς ἄν ὑπάρχει μιά τέτοια, αὐτή σίγουρα δέν εἶναι ἑνιαῖα.

Σέ ἕνα πρῶτο ἐπίπεδο μποροῦμε νά ξεχωρίσουμε τίς ἔννοιες δ υ ν α μ ι κ ό (ἤ δ υ ν η τ ι κ ό) ἄ π ε ι ρ ο καί π ρ α γ μ α τ ι κ ό ἄ π ε ι ρ ο. Μ' αὐτές τίς ἔννοιες καί ἰδιαίτερα μέ τήν πρώτη εἶναι συνδεδεμένες οἱ ἔννοιες τῆς ἐπαγωγῆς τῆς ἀναλογίας καί τῆς συμμετρίας.

Τί ἐννοοῦμε λοιπόν ὅταν λέμε δυναμικό (ἤ δυνητικό) ἄπειρο; Θά προσπαθήσουμε νά άπαντήσουμε όσο γίνεται άναλυτικώτερα καί διαυγέστερα. Ἄς ὑποθέσουμε πώς ἀντιμετωπίζουμε μιά διαδικασία, ἡ ὁποία ἔχει μιά συγκεκριμένη ἀρχή καί συντελεῖται σέ τελείως διακριτά βήματα, τό ἕνα πίσω ἀπό τό ἄλλο. Ἄς ὑποθέσουμε ἐπίσης πώς δέν ξέρουμε σέ πόσα μ ε τ ρ ή σ ι μ α βήματα τελειώνει. Τό πρόβλημά μας εἶναι λοιπόν: τελειώνει αὐτή ἡ διαδικασία καί ἄν τελειώνει ποιό εἶναι τό τέλος της; Ἀκόμα καί ἄν τελειώνει τό γεγονός, πώς δέν ξέρουμε ποῦ τελειώνει μᾶς βυθίζει σέ μιά ἄλλο κάί πιό πέρα ψηλάφιση τοῦ πεπερασμένου. Δέν ξέρουμε ποῦ ἡ διαδικασία τελειώνει (ἄν τελειώνει), πράγμα πού νοητικά μᾶς στέλνει σέ μιά πορεία μέσα στό ἄ-πειρο, πού ἔτσι γίνεται ἀπροσπέλαστο σάν "ὅλο". Ἔτσι μποροῦμε νά δεχθοῦμε τήν ὕπαρξη ἑνός ὁποιουδήποτε φυσικοῦ ἀριθμοῦ χωρίς νά εἶναι ἀπαραίτητο νά δεχθοῦμε τήν ὕπαρξη τοῦ συνόλου τῶν φυσικῶν. Ἄς δώσουμε ὅμως σ'αὐτά πού εἴπαμε περισσότερο μαθηματικό χαρακτῆρα. Ἄς ὑποθέσουμε πώς μέ $\varphi(x)$ παριστάνουμε ἕνα τυχαῖο τύπο τῆς γλώσσας τῆς θεωρίας τῶν Ἀξιωμάτων τοῦ Peano, μέ μιά ἐλεύθερη μεταβλητή. Τότε τό Ἀξίωμα τῆς ἐπαγωγῆς γι'αὐτόν τόν τύπο διατυπώνεται ὡς ἑξῆς:

$$\varphi(0) \wedge (\forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1))) \rightarrow \forall x\varphi(x).$$

Τό Ἀξίωμα αὐτό μᾶς λέει, πώς ὁποτεδήποτε μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι ἰσχύει $\varphi(0)$ καί ὅτι ἰσχύει $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1)$ γιά τόν τυχαῖο φυσικό x, τότε εἶναι σάν νά ἔχουμε ἀποδείξει $\forall x\varphi(x)$.

Τό Ἀξίωμα αὐτό στηρίζεται ἀκριβῶς σ'αὐτή τήν ἔννοια τοῦ "ἐν πορεία" ἀπείρου καί ἀπαντάει στό ἐρώτημα τοῦ πότε μποροῦμε νά μιλᾶμε γιά ἰδιότητες, πού μοιράζονται ὅλοι οἱ φυσικοί ἀριθμοί. Εἶναι προφανές πώς πίσω ἀπό τήν ἀπαίτηση τῆς ἀποδειξιμότητας τοῦ $\varphi(x) \to \varphi(x+1)$, κρύβεται ἡ τάση μας νά ἀναγνωρίσουμε πῶς συμπεριφέρεται τό σύμπαν μας (ὄχι ἀναγκαστικά σάν τελειωμένη ὀντότητα), ἀπό τόν τρόπο, πού συμπεριφέρονται τυχαῖα κομμάτια του μέ χρήση ἐννοιῶν ἀναλογίας καί συμμετρίας. Προσπαθοῦμε δηλαδή νά γνωρίσουμε αὐτό τό "ἐν πορεία" ἄπειρο ψάχνοντας γιά κανονικότητες στή συμπεριφορά του, μέ ἐργαλεῖα τίς ἔννοιες πού ἀναφέραμε ἀκριβῶς πρίν. Γι'αὐτή τήν θεώρηση τό ἄπειρο δέν εἶναι ἀπαραίτητο νά γίνει ἀντιληπτό σάν ὑπαρκτό "ἐν ὅλῳ". Αὐτή τήν ἔννοια τοῦ δυναμικοῦ (ἤ δυνητικοῦ) ἀπείρου μποροῦμε νά τήν ἔχουμε ἐπίσης καί ὁποτεδήποτε δουλεύουμε μέσα σέ "συνεχῆ" σύμπαντα ὅπως, γιά παράδειγμα, ὅταν δουλεύουμε μέσα στήν πραγματική εὐθεία. Τότε ἡ πορεία δέν γίνεται ἀναγκαστικά μέ διακριτά βήματα, ὅμως ὑπάρχει ἡ ἴδια αἴσθηση ἀτέρμονου ὅταν ὁδεύουμε μέσα στή πραγματική εὐθεία κατά τρόπο μή φραγμένο. 'Υπάρχει ὅμως μιά σημαντική διαφορά ἀνάμεσα στήν πραγματική εὐθεία καί στούς φυσικούς ἀριθμούς. Στήν πραγματική εὐθεία ὑπάρχουν διατακτικά ὁμοιώματά της πού εἶναι σχετικά "μικρά" π.χ. τό ἀνοικτό διάστημα (0,1). Τό γεγονός τῆς ὕπαρξης τῶν ἀριθμῶν 0 καί 1 πρίν ἀπ'ὅλα καί μετά ἀπ'ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ (0,1) μᾶς δίνει μιά πρώτη γεύση αὐτοῦ πού στή συνέχεια θά ὀνομάσουμε πραγματικό ἄπειρο.

"Ας δοῦμε λοιπόν τί ἐννοοῦμε ὅταν χρησιμοποιοῦμε τόν ὅρο πραγματικό ἄπειρο. "Ηδη μιά πρώτη γεύση τῆς ἔννοιας ἔχουμε πάρει στίς ἀρχές τῆς παραγράφου. 'Η ἔννοια τοῦ πραγματικοῦ ἀπείρου συνδέεται μέ τήν ὕπαρξη ἑνός μή πεπερασμένου ἀντικειμένου μέσα σέ κάποιο συγκεκριμένο μαθηματικό σύμπαν. Μποροῦμε δηλαδή, ὅπως εἴπαμε καί προηγουμένως, νά μιλᾶμε γιά φυσικούς ἀριθμούς καί ἰδιότητες τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, πού μπορεῖ νά εἶναι καί συνολιστικές (πού μπορεῖ νά εἶναι ἰδιότητες δηλαδή, πού μοιράζονται ὅλοι οἱ φυσικοί), χωρίς ἀναγκαστικά νά δεχόμαστε τό σύνολο ὅλων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν σάν ἕνα ἀντικείμενο μέσα σέ κάποιο μαθηματικό σύμπαν. Μποροῦμε δηλαδή, ὅπως εἴπαμε, νά ἔχουμε μιά ἔννοια δυναμικοῦ ἀπείρου, παρακάμπτοντας ἔτσι τό πρόβλημα τῆς ὀντολογικῆς ὑπόστασης τοῦ ἀπείρου. Ἄν ὅμως δεχθοῦμε τήν ὕπαρξη τοῦ συνόλου τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν δίνουμε μιά καταφατική ἀπάντηση στό παραπάνω πρόβλημα, ἀντιμετωπίζοντας ἔτσι τήν ὁλότητα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν σάν κάτι τελειωμένο. Δίνουμε ἔτσι στήν ὁλότητά τους τόν χαρακτῆρα ἀντικειμένου σέ κάποιο ἄλλο μαθηματικό σύμπαν, πού μπορεῖ νά εἶναι, γιά παράδειγμα, ἕνα σύμπαν συνολοθεωρητικό. Ὅταν δηλαδή ἀντιμετωπίζουμε τούς φυσικούς ἀριθμούς σάν τό μαθηματικό σύμπαν μέσα στό ὁποῖο κινούμαστε, μποροῦμε νά μιλᾶμε μόνο γιά τήν ἔννοια τοῦ δυναμικοῦ ἀπείρου ἐνῶ ὅταν ἀντιμετωπίζουμε τήν ὁλότητα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν σάν ἀντικείμενο μέσα σέ ἕνα ἄλλο μαθηματικό σύμπαν μποροῦμε νά μιλᾶμε καί γιά τήν ἔννοια τοῦ πραγματικοῦ ἀπείρου δίνοντας ἔτσι, ὅπως εἴπαμε παραπάνω, καταφατική ἀπάντηση στό ὀντολογικό πρόβλημα τῆς ὕπαρξής του.

Τά παραπάνω γενικεύονται καί γιά τήν περίπτωση ὁποιασδήποτε, μή πεπερασμένης ὁλότητας ἀντικειμένων, πού δέν διαθέτει ἰσομορφικό "μικρό" κομμάτι (βλέπε περίπτωση πραγματικῆς εὐθείας).

Ἐδῶ πρέπει νά τονιστεῖ ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ πραγματικοῦ ἀπείρου δέν εἶναι ἀναγκαστικά συνδεδεμένη μέ ἔννοιες πού ἔχουν σχέση μέ διαδικασίες προσπέλασής του ὅπως π.χ. οἱ ἔννοιες τῆς ἐπαγωγῆς τῆς ὁμοιότητας, τῆς συμμετρίας κ.τ.λ.

Γιά τήν ἔννοια τοῦ πραγματικοῦ ἀπείρου ἀρκεῖ ἡ εἰκόνα ἑνός μή πεπερασμένου ἀντικειμένου ἀνεξάρτητα ἀπό τίς διαδικασίες ἤ τίς ἐσωτερικές πράξεις καί σχέσεις ἀνάμεσα στά στοιχεῖα τοῦ ἀντικειμένου, ὑπαρκτοῦ σέ κάποιο μαθηματικό σύμπαν. Ἀπό τήν ἄλλη μεριά γιά τήν ἔννοια τοῦ δυναμικοῦ ἀπείρου χρειάζεται ἡ εἰκόνα τῆς ἀτέρμονης πορείας μέσα σέ κάποιο μαθηματικό σύμπαν, πού δέν ἔχει ἀπόλυτη σημασία ἄν θά εἶναι ἐλέγξιμου βηματισμοῦ ἤ μή. Αὐτό βέβαια δέν εἶναι ἀποδεκτό ἀπό ὅλους. Γιά ἀρκετούς Μαθηματικούς ἡ ἔννοια τοῦ δυναμικοῦ ἀπείρου εἶναι ἄρρηκτα συνδεδεμένη μέ τήν ὕπαρξη διαδικασιῶν προσπέλασής του.

Στήν παράγραφο πού ἀκολουθεῖ θά προσπαθήσουμε νά δώσουμε κάποιες ἄλλες πλευρές τῆς ἔννοιας τοῦ ἀπείρου, ἰδιαίτερα σπουδαῖες καί σημαντικές κατά τή γνώμη μας.

3. Διατακτικότητα καί πληθικότητα

Εἶναι γνωστό, πώς ἡ ἔννοια τῆς ἀντιστοιχίας παίζει ἕναν ἰδιαίτερο ρόλο στά Μαθηματικά. Ἀκόμα εἶναι γνωστό πώς παρόμοιο ρόλο παίζει καί ἡ ἔννοια τῆς διατάξεως. Ὅπως θά δοῦμε στή συνέχεια αὐτές οἱ δύο ἔννοιες ἀποτελοῦν τήν σπονδυλική στήλη ἀντίστοιχα τῶν ἐννοιῶν τῆς πληθικότητας καί τῆς διατακτικότητας.

Μά ἄς προσπαθήσουμε νά ὁρίσουμε τίς ἔννοιες τῆς πληθικότητας καί τῆς διατακτικότητας.

Π λ η θ ι κ ό τ η τ α ἑνός συνόλου Α θά καλοῦμε τήν κλάση τῶν συνόλων, πού μποροῦν νά τεθοῦν σέ μιά ἀμφιμονοσήμαντη καί ἐπί ἀντιστοιχία μέ τό σύνολο Α. Βέβαια ὁ ὁρισμός αὐτός μέσα στά πλαίσια μιᾶς αὐστηρά διατυπωμένης θεωρίας συνόλων (π.χ. τῆς Zermelo - Fraenkel) δέν θά ἦταν ἐπιτρεπτός γιατί γίνεται χρήση τῆς ἔννοιας τῆς ὁλότητας τῶν συνόλων, πού μποροῦν νά μποῦν σέ μιά ἀμφιμονοσήμαντη καί ἐπί ἀντιστοιχία μέ ἕνα δεδομένο σύνολο Α καί ἡ ὁλότητα αὐτή δέν εἶναι σύνολο. Ὑπάρχουν ὅμως μέθοδοι τροποποίησης τοῦ ὁρισμοῦ ἔτσι ὥστε ἡ οὐσία του νά παραμείνει σχετικά ἀνέπαφη.

Ἀντί τώρα γιά τόν ὅρο διατακτικότητα θά χρησιμοποιοῦμε τόν ὅρο διατακτικός τῦπος. Ἔστω ὅτι (A,R) εἶναι μιά γραμμικά διατεταγμένη δομή (δηλαδή ἕνα σύνολο A καί μιά σχέση $R \subseteq A \times A$ πού εἶναι μιά γραμμική διάταξη πάνω στό A).

Δ ι α τ α κ τ ι κ ό ς τ ῦ π ο ς τῆς (A,R) εἶναι ἡ κλάση ἰσοδυναμίας τῶν δομῶν (A', R') τέτοιων ὥστε $(A,R) \equiv$ $\equiv (A',R')$ (τῶν δομῶν (A',R') δηλαδή πού εἶναι ἰσόμορφες μέ τήν (A,R)). Ἐδῶ βέβαια ἰσχύουν οἱ παρατηρήσεις, πού κάναμε ἀκριβῶς προηγουμένως στόν ὁρισμό τῆς πληθικότητας.

Στά πεπερασμένα λοιπόν σύνολα μπορεῖ κανένας νά ἀντιπροσωπεύσει καί τήν πληθικότητα καί τόν διατακτικό τῦπο ἑνός συνόλου A, (ἄν αὐτό θεωρηθεῖ γραμμικά διατεταγμένο), μέ τόν φυσικό ἀριθμό n μέ τόν ὁποῖο τό σύνολο A μπορεῖ νά τεθεῖ σέ μιά ἀμφιμονοσήμαντη καί ἐπί ἀντιστοιχία.

Στά ἀπειροσύνολα ὅμως (τά σύνολα δηλαδή πού δέν μποροῦν νά μποῦν σέ μιά ἀμφιμονοσήμαντη καί ἐπί ἀντιστοιχία μέ ὁποιονδήποτε φυσικό n) κάτι τέτοιο δέν μπορεῖ νά συμβεῖ. Δέν μποροῦμε νά παραστήσουμε δηλαδή πάντα τήν πληθικότητα καί τόν διατακτικό τῦπο ἑνός γραμμικά διατεταγμένου ἀπειροσυνόλου χρησιμοποιῶντας τό ἴδιο ἀντικείμενο.

Ἄς δοῦμε ὅμως ἕνα παράδειγμα. Ἔστω ὅτι ἔχουμε τίς δομές $(\mathbb{N},R_1)$, $(\mathbb{N},R_2)$ ὅπου μέ $\mathbb{N}$ παριστάνουμε τό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, μέ R_1 παριστάνουμε τήν κανονική γραμμική διάταξη τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καί μέ R_2 τήν γραμμική διάταξη πού παίρνουμε ἄν μετακινήσουμε τό 0 καί τό βάλουμε μετά ἀπό ὅλους τούς ἄλλους ἀριθμούς ἀφήνοντας τήν ὑπόλοιπη διάταξη ἀνέπαφη, Δηλαδή:

$R_1=\{(n,m) \mid n,m\in \mathbb{N} \text{ καί } n<m\}$

$R_2=\{(n,m) \mid n,m\in \mathbb{N}-\{0\} \text{ καί } n<m\}\cup\{(n,0) \mid n\in \mathbb{N}-\{0\}\}$

Τότε οἱ δομές $(\mathbb{N},R_1)$, $(\mathbb{N},R_2)$ δέν εἶναι ἰσόμορφες, δηλαδή δέν ἔχουν τόν ἴδιο διατακτικό τύπο, ἄν καί ἔχουν τήν ἴδια πληθικότητα.

Ὁ διατακτικός τύπος τῆς δομῆς $(\mathbb{N},R_1)$ παριστάνεται μέ τό ω ἐνῶ ὁ διατακτικός τύπος τῆς δομῆς $(\mathbb{N},R_2)$ μέ τό $\omega+1$.

Ἡ πληθικότητα καί τῶν δύο παρίσταται μέ τό ω.

Καταλήγουμε λοιπόν στό συμπέρασμα ὅτι οἱ ἔννοιες τῆς πληθικότητας καί τοῦ διατακτικοῦ τύπου συγχωνεύονται στήν ἔννοια τοῦ ἀριθμοῦ στά πεπερασμένα σύνολα, γιά νά ξεχωρίσουν καθαρά ὅταν ἐπιχειρήσει κανένας τό πνευματικό πήδημα στή περιοχή τοῦ ἀπείρου, ὅταν δηλαδή δεχθεῖ τό ἄπειρο σάν πραγματικό ἀντικείμενο.

Μά ἄς τελειώσουμε, παραθέτοντας τί λέει ὁ ἴδιος ὁ Cantor, (βλέπε (3)), γι'αὐτό τό θέμα:

"Ὅταν διαννοῦμαι τό ἄπειρο... μέ καταλαμβάνει μιά γνήσια εὐχαρίστηση, στήν ὁποία ὑποκύπτω μέ εὐγνωμοσύνη, βλέποντας πῶς ἡ ἔννοια τοῦ ἀκέραιου ἀριθμοῦ, πού γιά τήν περίπτωση τοῦ πεπερασμένου στηρίζεται μόνο στήν ἔννοια τῆς ἀ ρ ι θ μ η σ η ς, ὅταν ἀνεβαίνουμε στό ἄπειρο χωρίζεται σέ δυό ἔννοιες, στήν ἔννοια τῆς π λ η θ ι κ ό τ η τ α ς, πού εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τήν διάταξη τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου καί στήν ἔννοια τῆς ἀ ρ ί θ μ η σ η ς, πού εἶναι ἀναγκαστικά συνδεδεμένη μέ μιά καθορισμένη διάταξη τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου... Καί ὅταν κατεβαίνω ξανά ἀπό τό ἄπειρο στό πεπερασμένο βλέπω πάλι τόσο καθαρά καί ὄμορφα, οἱ δυό ἔννοιες ἑνώνονται καί συγχωνεύονται γιά νά σχηματίσουν τήν ἔννοια τοῦ πεπερασμένου ἀκέραιου ἀριθμοῦ".

4. Ταξινόμηση ἀπείρων συνόλων κατά μέγεθος

Εἶναι σχετικά γνωστό, πώς ὑπάρχουν ἄπειρα σύνολα, πού δέν μποροῦν νά τεθοῦν σέ μιά ἀμφιμονοσήμαντη καί ἐπί ἀντιστοιχία μεταξύ τους. Αὐτό ἔχει σάν συνέπεια τήν εἰσαγωγή κάποιας ἔννοιας "μεγαλύτερου" στά ἄπειρα σύνολα, πού ἔτσι τά διαβαθμίζει κατά μέγεθος.

Μά ἄς ξεκινήσουμε ἀπό ὡρισμένες τεχνικές λεπτομέρειες, πού θά μᾶς βοηθήσουν νά κατανοήσουμε τίς παραπάνω παρατηρήσεις. Ἰσχύει τό παρακάτω θεώρημα τῶν Cantor - Bernstein.

""Εστω δυό σύνολα A καί B καί ἔστω ὅτι ὑπάρχουν: $f_1: A \to B$, $f_2: B \to A$ δυό ἀμφιμονοσήμαντες (ὄχι ἀναγκαστικά ἐπί) συναρτήσεις. Τότε ὑπάρχει $f: A \to B$, πού εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη καί ἐπί".

Ἄν μέ $\overline{\overline{A}}$ παραστήσω τήν πληθικότητα τοῦ συνόλου A τότε μέ $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$ παριστάνω τήν ὕπαρξη μιᾶς συναρτήσεως $f_1: A \to B$ πού εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη. Μέ $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ παριστάνω τήν ὕπαρξη μιᾶς συναρτήσεως $f: A \to B$ πού εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη καί ἐπί.

Τό παραπάνω θεώρημα τότε γράφεται ὡς ἑξῆς:

"Γιά τυχόντα σύνολα A καί B ἰσχύει ὅτι $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$ καί $\overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}}$ συνεπάγονται $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$".

Ἄν A εἶναι ἕνα τυχόν σύνολο μέ P(A) συμβολίζουμε τό δυναμοσύνολό του, (δηλαδή τό σύνολο ὅλων τῶν ὑποσυνόλων του) θά ἀποδείξουμε τό παρακάτω θεώρημα τοῦ Cantor.

"Δεδομένου ἑνός συνόλου A ἰσχύει $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{P(A)}}$". Ὅταν γράφουμε $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{P(A)}}$ ἐννοοῦμε ὅτι ἰσχύει $\overline{\overline{A}} \leq P(A)$ καί $\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{P(A)}}$.

Ἀπόδειξη

Σχηματίζουμε τήν συνάρτηση $f: A \to P(A)$ ὡς ἑξῆς: $f(x)=\{x\}$.

Ἡ f εἶναι προφανῶς ἀμφιμονοσήμαντη. Ἀρκεῖ τώρα νά δείξουμε ὅτι δέν ὑπάρχει συνάρτηση $g: P(A) \to A$, πού νά εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη. (Αὐτό εἶναι ἀρκετό μέ βάση τό θεώρημα τῶν Cantor - Bernstein).

Ἔστω λοιπόν πώς μιά τέτοια συνάρτηση ὑπάρχει. Σχηματίζουμε τό παρακάτω σύνολο:

$$Y=\{g(y) \mid g(y) \notin y\} \subseteq A$$

Τό παραπάνω σύνολο εἶναι μή κενό γιατί ὑπάρχει $x \in A$ τέτοιο ὥστε $g(\varnothing)=x$.

Τώρα ἔχουμε τίς παρακάτω συνεπαγωγές. Ἄν $g(Y) \in Y$ τότε $g(Y) \notin Y$ γιατί τό $g(Y)$ σάν στοιχεῖο τοῦ Y θά ἱκανοποιεῖ τήν ἰδιότητα τῶν στοιχείων τοῦ Y.

Ἄν $g(Y) \notin Y$ τότε $g(Y) \in Y$ γιά τό $g(Y)$ ἱκανοποιεῖ τήν ἰδιότητα τῶν στοιχείων τοῦ Y καί ἑπομένως εἶναι στοιχεῖο τό Y.

Δηλαδή $g(Y) \in Y \Leftrightarrow g(Y) \notin Y$ πάργμα πού σημαίνει πώς δέν ὑπάρχει συνάρτηση $g: P(A) \to A$, πού νά εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη.

Ἔτσι λοιπόν πετύχαμε μιά ἀπόδειξη τοῦ ἀρχικοῦ μας ἰσχυρισμοῦ γιά τήν δυνατότητα διαβάθμισης κατά μέγεθος τῶν ἀπείρων συνόλων.

Εἶναι ἄξιο λόγου νά ἀναφέρει ἐδῶ κανένας τό παρακάτω παράδοξο (πού οὐσιαστικά δέν εἶναι παράδοξο), καί πού εἰσάγεται ἀπό ἀκριβῶς αὐτή τή διαβάθμιση.

Ἔστω τό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν $\mathbb{N}$. Ἡ περιγραφή ἰδιοτήτων τμημάτων τοῦ συνόλου τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν γίνεται μέσα σέ μιά γλώσσα. Αὐτή ἡ γλώσσα εἶναι τά Νεοελληνικά ἤ τά Ἀγγλικά (ἤ ὁποιαδήποτε ἄλλη "φυσική" γλώσσα) ἤ μιά τυπική πρωτοβάθμια γλώσσα ἱκανή νά ἐκφράσει ὁτιδήποτε μπορεῖ νά γραφεῖ γιά τούς φυσικούς ἀριθμούς. Οἱ γλῶσσες αὐτές διαθέτουν πεπερασμένα τό πλῆθος σύμβολα καί δεδομένου ὅτι οἱ προτάσεις τους εἶναι πεπερασμένες ἀκολουθίες συμβόλων τους, αὐτό σημαίνει πώς διαθέτουν μόνο ἄπειρες ἀριθμήσιμες τό πλῆθος προτάσεις. Δεδομένου λοιπόν πώς ὁ πληθάριθμος τοῦ P(N) εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν πληθάριθμο τοῦ N καί ἑπομένως μεγαλύτερος ἀπό τόν πληθάριθμο τοῦ συνόλου τῶν προτάσεων τῆς γλώσσας, αὐτό σημαίνει πώς ὑπάρχουν ἄπειρα ὑπεραριθμήσιμα τό πλῆθος ὑποσύνολα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, πού δέν μποροῦν νά περιγραφοῦν στήν γλώσσα μας. Αὐτό σημαίνει πώς ὁρίζουμε τήν ἔννοια τοῦ συνόλου ὅλων τῶν ὑποσυνόλων ἑνός ἄπειρου συνόλου χωρίς νά ξέρουμε ποιά εἶναι αὐτά τά ὑποσύνολα. Αὐτοῦ τοῦ εἴδους οἱ ὁρισμοί καλοῦνται μ ή - κ α τ η γ ο ρ η μ α τ ι κ ο ί καί ὑπάρχει ἡ ἀνάγκη τους μόνον ἐφ'ὅσον δεχθοῦμε τήν ὕπαρξη τοῦ πραγματικοῦ ἀπείρου, ἡ ὁποία ἀναγκαστικά μᾶς ὁδηγεῖ στήν διαβάθμιση, πού ἀναφέραμε προηγουμένως.

Βέβαια αὐτή δέν εἶναι ἡ μοναδική διαβάθμιση ἀπείρων συνόλων κατά μέγεθος, ἀλλά αὐτό θά ἀφήσουμε νά τό δοῦμε στή συνέχεια τοῦ ἄρθρου μας.

5. Τό Ἄπειρο στή συνολοθεωρία Zermelo - Fraenkel (ZF)

Τά ἀξιώματα τῆς ZF δίνονται περιγραφικά παρακάτω. Γιά μιά αὐστηρότερη διατύπωσή τους θά μποροῦσε κανένας νά ἀνατρέξει στό (1).

(ZF_1) Δυό σύνολα, πού ἔχουν τά ἴδια στοιχεῖα εἶναι μεταξύ τους ἴσα.

(ZF_2) Δεδομένου ἑνός συνόλου A ὑπάρχει ἕνα σύνολο B πού ἔχει σάν στοιχεῖα του ἀκριβῶς τά στοιχεῖα τῶν στοιχείων τοῦ A.

(ZF_3) Δεδομένου ἑνός συνόλου A ὑπάρχει ἕνα σύνολο B, πού ἔχει σάν στοιχεῖα του ἀκριβῶς τά ὑποσύνολα τοῦ συνόλου A.

(ZF_4) Ὑπάρχει ἕνα σύνολο A, πού δέν περιέχει καθόλου στοιχεῖα. Αὐτό λέγεται κενό σύνολο καί συμβολίζεται κατά τά γνωστά μέ $\varnothing$. (Ἡ μοναδικότητα τοῦ συνόλου αὐτοῦ καθώς καί ἡ μοναδικότητα συνόλων τῶν ὁποίων τήν ὕπαρξη διασφαλίζουν ἄλλα ἀξιώματα εἶναι συνέπεια τοῦ ἀξιώματος ZF_1).

(ZF_5) Ὑπάρχει ἕνα σύνολο A, πού περιέχει τό $\varnothing$, σάν στοιχεῖο του καί πού ἄν περιέχει τό x σάν στοιχεῖο τότε περιέχει καί τό $x \cup \{x\}$. (Μέ $x \cup \{x\}$ παριστάνουμε τό σύνολο πού ἔχει σάν στοιχεῖα του τά στοιχεῖα τοῦ x καί τό ἴδιο τό x).

(ZF_6) Δεδομένου ἑνός συνόλου A καί μιᾶς συναρτήσεως f μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό A, ὑπάρχει τό πεδίο τιμῶν τῆς f, πού τό συμβολίζουμε μέ $f[A]$.(Ἡ συνάρτηση f θά δίδεται ἀπό ἕναν τύπο τῆς γλώσσας τῆς θεωρίας συνόλων ZF, πού μπορεῖ νά περιέχει καί παραμέτρους.Γιά πιό πολλές λεπτομέρειες (βλέπε(1)).

(ZF_7) Δεδομένου ἑνός συνόλου $A \neq \varnothing$ ὑπάρχει ἕνα στοιχεῖο B τοῦ A τέτοιο ὥστε $A \cap B = \varnothing$. (Μέ $A \cap B$ συμβολίζουμε τό σύνολο τῶν κοινωῦ στοιχείων τῶν A καί B).

Τά ἀξιώματα τῆς συνολοθεωρίας ZF εἶναι λοιπόν τά παραπάνω ZF_1-ZF_7. Τό ἀξίωμα ZF_5 πιστοποιεῖ τήν ὕπαρξη τοῦ συνόλου τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, δεδομένου πώς ἐξασφαλίζει τήν ὕπαρξη ἑνός συνόλου, πού περιέχει τό κενό σύνολο (πού μποροῦμε νά τό θεωρήσουμε ὁμοίωμα τοῦ μηδενός τῶν φυσικῶν) καί πού εἶναι κλειστό κάτω ἀπό τήν πράξη τοῦ "ἑπομένου". Δηλαδή ἄν μέ n παραστήσουμε κάποιο ὁμοίωμα ἑνός φυσικοῦ ἀριθμοῦ x καί μέ $x \cup \{x\}$ τό ὁμοίωμα τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ n+1, τότε ἄν τό σύνολο αὐτό περιέχει τόν n περιέχει καί τόν n+1.

Ἡ ἔννοια τοῦ δυναμικοῦ ἀπείρου μέσα στήν συνολοθεωρία ZF συνδέεται ἄρρηκτα μέ τίς δυό συγκεκριμένες πράξεις πού εἰσάγουν τά ἀξιώματα ZF_2 καί ZF_3, τήν πράξη δηλαδή τῆς ένωσης καί τήν πράξη τοῦ δυναμοσυνόλου, βοηθοῦντος βέβαια καί τοῦ ἀξιώματος ZF_6. Μέ αὐτό ἐννοοῦμε πώς τό σύμπαν τῆς συνολοθεωρίας μας εἶναι κλειστό κάτω ἀπ'αὐτές τίς πράξεις, χωρίς τό ἴδιο νά εἶναι ἀντικείμενο τοῦ ἑαυτοῦ του.'Ενῶ δηλαδή ὑπάρχουν ἀντικείμενα μή πεπερασμένα μέσα στό σύμπαν μας τό ἴδιο τό σύμπαν γίνεται ἀντιληπτό μόνο "ἐν πορεία" ὅταν κανένας δουλεύει μέσα σ'αὐτό. Ἔτσι τό γεγονός, πώς δεχόμαστε τήν ὕπαρξη ἀπείρων ἀντικειμένων δέν μᾶς ἀπαλλάσει ἀπό τό πρόβλημα τοῦ ἀπείρου. Ἁπλῶς μεταθέτει τήν σύγκρουση ἀνάμεσα στό πραγματικό καί στό δυναμικό ἄπειρο σέ ἕνα πιό πέρα ἐπίπεδο. Συγκεκριμένα τήν μεταθέτει στό ἐπίπεδο τοῦ νέου μας σύμπαντος. Κι αὐτό γιατί, ὅπως εἴπαμε προηγουμένως, μποροῦμε νά ἀντιληφθοῦμε τό σύμπαν μας ὅταν δουλεύουμε μέσα του, μόνο σάν ἕνα "ἐν πορεία" ὑπερ-ἄπειρο καί ποτέ σάν ὑπαρκτό ἐν ὅλω. Ἐδῶ πρέπει νά ποῦμε πώς δέν εἶναι σίγουρο, πώς παντοῦ στά μαθηματικά ἡ ἔννοια τοῦ δυναμικοῦ ἀπείρου συνδέεται μέ τήν κλειστότητα τοῦ σύμπαντος κάτω ἀπό κάποιες συγκεκριμένες πράξεις, ἐπιτρεπτές στό σύμπαν μας.

Ἄν τώρα θέλουμε νά δοῦμε τό σύμπαν μας αὐτό σάν ἀντικείμενο, πρέπει νά πάψουμε νά δουλεύουμε "μέσα του" καί νά τό ἐξετάσουμε σάν τέτοιο μέσα στά πλαίσια τοῦ σύμπαντος μιᾶς ἄλλης ἀξιωματικῆς θεωρίας. Πολλές φορές αὐτό γίνεται μέ τήν ἐπισύναψη ἰσχυρότατων ἀξιωμάτων στά ἤδη γνωστά ἀξιώματα τῆς ZF. Τέτοια ἀξιώματα εἶναι τά ἀξιώματα πού πιστοποιοῦν τήν ὕπαρξη "μεγάλων" πληθαρίθμων. Ἕνα τέτοιο παράδειγμα εἶναι τό ἀξίωμα, πού πιστοποιεῖ τήν ὕπαρξη ἑνός ἀ π ρ ό σ ι τ ο υ πληθάριθμου. Χωρίς νά ἀνατρέξουμε σέ πολλές τεχνικές λεπτομέρειες θά μπορούσαμε νά ποῦμε, πώς ἕνας ἀπρόσιτος πληθάριθμος εἶναι ἕνας διατακτικός ἀριθμός, πού δέν μπορεΐ νά μπεΐ σά μιά άμφιμονοσήμαντη έπί άντιστοι-χία μέ όποιονδήποτε μικρότερό του καί πού δέν "προσεγγίζε-ται" μέ τίς δύο βασικές πράξεις τοΰ σύμπαντος μας, δηλαδή τήν πράξη της ένωσης καί τοΰ δυναμοσυνόλου. 'Η ύπαρξη ένός τέτοιου πληθάριθμου έχει σάν συνέπεια τήν ύπαρξη ένός συνό-λου μέσα σ'αύτό τό νέο σύμπαν, πού είναι ένα σύμπαν της συ-νολοθεωρίας ZF. Αύτό τό νέο σύμπαν δέν γίνεται άντιληπτό "έν όλω" άλλά μόνο "έν πορεία" όντας κλειστό κάτω άπό τίς δύο βασικές πράξεις της ZF σύν τήν πράξη της ύπαρξης άπρόσιτων πληθαρίθμων. 'Η διαδικασία αύτή μπορεΐ νά συνεχιστεΐ, ίσως χωρίς τελειωμό.

"Ενας άλλος τρόπος γιά νά δοΰμε τό συνολοθεωρητικό μας σύμπαν σάν άντικείμενο είναι νά έπισυνάψουμε νέα άξιώματα στά άξιώματα της ZF σέ μιά βελτιωμένη γλώσσα, ξεχωρίζοντας δύο είδών άντικείμενα,τά σύνολα,πού μποροΰν καί νά περιέ-χουν καί νά περιέχονται καί τίς κλάσεις,πού μποροΰν μόνο νά περιέχουν. "Ενα συνολοθεωρητικό σύμπαν της ZF θά είναι λοιπόν μιά κλάση σ'αύτό τό νέο ύπερσύμπαν. Μιά τέτοιου εί-δους συνολοθεωρία είναι ή συνολοθεωρία Gödel - Bernays (GB). Γιά περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε (5).

Στήν παράγραφο, πού άκολουθεΐ θά δοΰμε κάποιες άλλες πλευρές της έννοιας τοΰ άπείρου συνδεδεμένες μέ τό 'Αξίωμα της 'Επιλογης.

6. Τό Ἄπειρο καί τό Ἀξίωμα τῆς Ἐπιλογῆς.

Στήν προηγούμενη παράγραφο θεωρήσαμε γνωστές τίς έννοιες τοῦ διατακτικοῦ ἀριθμοῦ καί τοῦ πληθάριθμου. Θά ἐξακολουθήσουμε νά τίς θεωροῦμε γνωστές σ'ὅλη τή συνέχεια τοῦ ἄρθρου μας. Γιά περισσότερες τεχνικές λεπτομέρειες θά μποροῦσε ὁ ἀναγνώστης νά ἀνατρέξει στό (1).

Ἀρχικά θά πρέπει νά διατυπώσουμε, ὅσο γίνεται ἁπλούστερα, τό Ἀξίωμα τῆς Ἐπιλογῆς. Μιά σχετικά ἁπλή διατύπωση του εἶναι ἡ ἀκόλουθη:

"Δεδομένης μιᾶς μή κενῆς οἰκογένειας $\{A_i\}_{i\in I}$ μή κενῶν καί ξένων μεταξύ τους συνόλων ὑπάρχει ἕνα σύνολο Α πού περιέχει ἀκριβῶς ἕνα στοιχεῖο a_i ἀπό κάθε A_i."

Εἶναι γνωστό, πώς τό Ἀξίωμα τῆς Ἐπιλογῆς ἔχει ἕνα σωρό σοβαρές συνέπειες σ'ὅλη τή σφαίρα τῶν Μαθηματικῶν. Θεωρήματα ὑπάρξεως μεγίστων, ὅπως γιά παράδειγμα θεωρήματα ὑπάρξεως μεγίστου ἰδεώδους ἤ ὑπερφίλτρου, δέν θά ὑπῆρχαν χωρίς αὐτό. Εἶναι ἐπίσης γνωστό, πώς εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπό τά ὑπόλοιπα ἀξιώματα τῆς ZF συνολοθεωρίας, (ὅπως π.χ. εἶναι ἀνεξάρτητο τό Ἀξίωμα τῶν Παραλλήλων ἀπό τά ὑπόλοιπα ἀξιώματα τῆς Εὐκλείδιας Γεωμετρίας).

Τό Ἀξίωμα τῆς Ἐπιλογῆς, ὅταν ἀναφέρεται σέ πεπερασμένες οἰκογένειες πεπερασμένων συνόλων, μιλάει γιά κάτι τελείως προφανές . Μιλάει γιά τή δυνατότητα μας νά διαλέξουμε ἕνα ἀκριβῶς στοιχεῖο ἀπό κάθε σύνολο. Καθένας μας καταλαβαίνει πώς ἡ ἐλεγξιμότητα καί τῆς οἰκογένειας τῶν συνόλων καί τῶν ἴδιων τῶν συνόλων μας εἶναι μέσα στίς δυνατότητες μας λόγω τοῦ πεπερασμένου χαρακτήρα τους. Ἔτσι ἡ ὕπαρξη μιᾶς διαδικασίας ἐκλογῆς ἑνός ἀκριβῶς στοιχείου ἀπό κάθε σύνολο τῆς οἰκογένειας γιά τόν σχηματισμό τοῦ συνόλου Α, ἀνάγεται στό νά τοποθετήσουμε τά στοιχεῖα αὐτῶν τῶν συνόλων στή σειρά (νά τά διατάξουμε δηλαδή γραμμικά) καί νά διαλέξουμε τό πρῶτο στοιχεῖο κάθε τέτοιου συνόλου σ'αὐτή τή διάταξη. Βέβαια ἐδῶ μιλᾶμε γιά πεπερασμένα σύνολα, τῶν ὁποίων τά, στοιχεῖα εἶναι ἐντελῶς καθορισμένα καί ἐλέγξιμα. Θεωροῦμε αὐτή τή διευκρίνηση ἀναγκαία, γιατί ὑπάρχουν πεπερασμένα σύνολα χωρίς καθορισμένα ἐπακριβῶς στοιχεῖα. Ἕνα σχετικό παράδειγμα εἶναι τό ἑξῆς:"Ἔστω ὅτι B εἶναι ἕνα σύνολο μέ ἕνα ἀκριβῶς στοιχεῖο, τό ὁποῖο στοιχεῖο του εἶναι τό 0 ἄν μιά συγκεκριμένη μαθηματική εἰκασία ἰσχύει ἤ τό 1 ἄν δέν ἰσχύει. Μιά τέτοια συγκεκριμένη εἰκασία θά μποροῦσε νά εἶναι γιά παράδειγμα ἡ εἰκασία τοῦ Goldbach (ὅτι δηλαδή κάθε ἄρτιος ἀριθμός μπορεῖ νά γραφεῖ σάν ἄθροισμα δύο πρώτων). Στό παράδειγμα πού δώσαμε εἶναι τελείως προφανές πώς, ἄν καί ξέρουμε πώς τό σύνολο B ἔχει ἕνα μόνο στοιχεῖο καί ἑπομένως εἶναι πεπερασμένο, ἀπό τήν ἄλλη μεριά δέν ξέρουμε ποιό εἶναι αὐτό τό στοιχεῖο δεδομένου ὅτι δέν ξέρουμε ἄν ἡ εἰκασία τοῦ Goldbach ἰσχύει ἤ ὄχι.

Μποροῦμε τώρα νά ἀντιληφθοῦμε πιό εὔκολα γιατί τό 'Αξίωμα 'Επιλογῆς εἶναι μιά πολύ ἰσχυρή ὑπόθεση, ὅταν ἀναφέρεται σέ μιά τυχοῦσα μή κενή οἰκογένεια μή κενῶν καί ξένων μεταξύ τους συνόλων. Ὅταν ἡ οἰκογένεια αὐτή εἶναι ἄπειρη καί μερικά ἤ καί ὅλα τά σύνολα, πού τήν ἀποτελοῦν εἶναι ἐπίσης ἄπειρα, θέλει ἀρκετό πνευματικό θάρρος νά δεχθεῖς τήν ὕπαρξη ἑνός συνόλου πού νά περιέχει ἕνα ἀκριβῶς στοιχεῖο ἀπό τό καθένα, ἀνεξάρτητα ἀπό τή διαδικασία ἐκλογῆς αὐτῶν τῶν στοιχείων' ἀνεξάρτητα δηλαδή ἀπό τήν ὕπαρξη ἤ μή διαδικασίας ἐκλογῆς. Τό νά δεχθεῖ κανένας λοιπόν τό ἀξίωμα τῆς ἐπιλογῆς εἶναι πολύ σοβαρή ὑπόθεση, ἀπό φιλοσοφικῆς πλευρᾶς τουλάχιστον. 'Υπάρχουν Μαθηματικοί, πού, ἄν καί δέχονται τήν ὕπαρξη πραγματικοῦ ἀπείρου, εἶναι διστακτικοί στήν ἀποδοχή τοῦ 'Αξιώματος 'Επιλογῆς.

Αὐτή ἡ ἀδιαφορία γιά τήν ὕπαρξη διαδικασίας ἐκλογῆς στοιχείων (ἡ ἀνυπαρξία τῆς ὁποίας διαδικασίας τίς πιό πολλές φορές ὀφείλεται στό ἄπειρο τῆς $\{A_i\}_{i\in I}$ ἤ στό ἄπειρο μερικῶν A_i),ἐνοχλεῖ περισσότερο καί ἀπ'αὐτή τήν ἀποδοχή τῆς ὕπαρξης πραγματικοῦ ἀπείρου.

Ἄς δοῦμε ὅμως κάποιες ἄλλες πλευρές τοῦ 'Αξιώματος 'Επιλογῆς σέ σχέση μέ τήν ἔννοια τοῦ ἀπείρου. Εἶναι γνωστό πώς μιά πρόταση ἰσοδύναμη μέ τό ἀξίωμα τῆς ἐπιλογῆς εἶναι αὐτή, πού δίνουμε ἀμέσως παρακάτω:

"Κάθε σύνολο A μπορεῖ νά τοποθετηθεῖ σέ μιά ἀμφιμονοσήμαντη καί ἐπί ἀντιστοιχία μέ κάποιον διατακτικό ἀριθμό".

Αὐτό σημαίνει ὅτι μπορεῖ νά θεωρήσει κανένας τήν ταξινόμηση τῶν ἄπειρων συνόλων κατά μέγεθος, ὅπως αὐτή διατυπώθηκε στήν παράγραφο 4, σάν ἕνα μέρος τῆς ταξινόμησης τῶν διατακτικῶν ἀριθμῶν καί ἰδιαίτερα τῶν πληθαρίθμων.

Ἄς δοῦμε τώρα κάτι ἄλλο. Πρῶτα-πρῶτα ἄς ὁρίσουμε τήν ἔννοια τοῦ πεπερασμένου κατά Dedekind συνόλου. Ἕνα σύνολο A λέγεται π ε π ε ρ α σ μ έ ν ο κ α τ ά D e d e k i n d, ἄν δέν ὑπάρχει ἀμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $f\colon \mathbb{N} \to A$ (ὄχι ἀναγκαστικά ἐπί), ὅπου $\mathbb{N}$ εἶναι τό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

'Η συνηθισμένη ἔννοια πεπερασμένου συνόλου εἶναι ἡ ἑξῆς: Ἕνα σύνολο A λέγεται π ε π ε ρ α σ μ έ ν ο, ἄν ὑπάρχει ἕνας φυσικός ἀριθμός n τέτοιος, ὥστε $\bar{\bar{A}} = n$.

Εἶναι προφανές, πώς ἕνα πεπερασμένο σύνολο εἶναι πεπερασμένο κατά Dedekind, γιατί ἀλλοιῶς θά ὑπῆρχε μιά ἀμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $f\colon \mathbb{N} \to n$. Τό ἀντίστροφο δέν εἶναι καθόλου προφανές. Γενικά δέν ἰσχύει. Γιά νά ἰσχύσει γενικά ἀπαιτεῖται τό 'Αξίωμα τῆς 'Επιλογῆς. 'Η ἀπόδειξη ἔχει ὡς ἑξῆς: Ἔστω A ἕνα σύνολο, πού δέν εἶναι πεπερασμένο. Τότε δέν ὑπάρχει φυσικός ἀριθμός n τέτοιος, ὥστε $n = \bar{\bar{A}}$. 'Επομένως τό A δέν εἶναι κενό. 'Επιλέγουμε κάποιο στοιχεῖο a_0 τοῦ A. Τό σύνολον τῶν στοιχείων τοῦ A χωρίς τό a_0 δέν εἶναι κενό γιατί ἄλλιῶς τό A θά εἶχε ἕνα ἀκριβῶς στοιχεῖο καί ἑπομένως θά εἴχαμε $\bar{\bar{A}} = 1$. 'Επιλέγουμε κάποιο στοιχεῖο a_1, πού ἀνήκει στό σύνολο τῶν στοιχείων τοῦ A χωρίς τό a_0 καί συνεχίζουμε αὐτή τή διαδικασία ἐπ' ἄπειρο. Ἔτσι δημιουργοῦμε μιά ἄπειρη ἀκολουθία διαφορετικῶν ἀνά δύο στοιχείων τοῦ A, δηλαδή δημιουργοῦμε μιά ἀμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $f: \mathbb{N} \to A$, πρᾶγμα πού σημαίνει πώς τό σύνολο A δέν εἶναι πεπερασμένο κατά Dedekind.

'Εδῶ βέβαια θά σταματήσουμε τήν περιγραφή τῆς διασύνδεσης τῆς ἔννοιας τοῦ ἀπείρου μέ τό 'Αξίωμα τῆς 'Επιλογῆς ἐλπίζοντας, πώς ὅσα εἴπαμε χωρίς νά ἐξαντλοῦν τό θέμα, ρίχνουν κάποιο φῶς στήν ὅλη ὑπόθεση. Στό παραπάνω θέμα πού θίξαμε πιστεύουμε πώς αὐτή ἡ διασύνδεση γίνεται ἰδιαίτερα ἀντιληπτή.

7. Γενικά Σχόλια:

Θά πρέπει ἐδῶ νά τονίσουμε ξανά αὐτό, πού θελήσαμε νά φανεῖ ἀπό τήν ἀρχή. Τό ἄρθρο μας αὐτό δέν εἶναι καί δέν θά μποροῦσε νά εἶναι ἐξαντλητικό τοῦ θέματος. Θά ἀρκεστοῦμε λοιπόν στό νά περιγράψουμε, στή τελευταία αὐτή παράγραφο κάποιες ἄλλες πλευρές τῆς ἔννοιας τοῦ ἀπείρου καί τῶν διασυνδέσεων της ὅσο γίνεται πιό συνοπτικά, προβαίνοντας ἴσως σέ κάποια πολύ γενικά σχόλια.

Εἶναι γεγονός λοιπόν, πώς μέ τήν ἔννοια τοῦ ἀπείρου συνδέεται ἄρρηκτα ἡ περίφημη 'Υπόθεση τοῦ Συνεχοῦς. Σύμφωνα μ'αὐτή τήν ὑπόθεση δέν ὑπάρχει καθαρό ὑποσύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν μέ πληθάριθμο ἐνδιάμεσο τῶν πληθαρίθμων τοῦ συνόλου τῶν φυσικῶν καί τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν. Εἶναι τελείως προφανές πώς ἡ ἀνάγκη μιᾶς τέτοιας ὑποθέσεως δέν θά ὑπῆρχε ἄν δέν είχαμε δεχθεῖ τό ἄπειρο σάν ὑπαρκτό ἀντικείμενο, πρᾶγμα πού ὅπως εἴδαμε ὁδηγεῖ σέ διαβάθμιση τῶν ἀπείρων συνόλων κατά μέγεθος. Ὅμως οἱ συνέπειες τῆς ἀποδοχῆς τοῦ ἀπείρου σάν πραγματικοῦ δέν τελειώνουν ἐδῶ. Εἶναι γνωστό, πώς ἡ Συνδυαστική πού ξεκίνησε σάν παιχνίδι μέ πεπερασμένα μεγέθη, ὅταν ἐπεκταθεῖ στά ἄπειρα μεγέθη παίρνει ἀπρόσμενες καί ἰδιαίτερα ἐνδιαφέρουσες διαστάσεις. Ἀπό τήν ἄλλη μεριά ἡ θεωρία Ἀπείρων Παιχνιδιῶν βρίσκεται σέ πλήρη ἄνθιση, ἡ δέ Περιγραφική Συνολοθεωρία χρωστάει πολλά σ'αὐτή τήν ἔννοια τῶν Ἀπείρων Παιχνιδιῶν.

Θά μποροῦσε κανένας νά συνεχίσει ἀπαριθμῶντας παραδείγματα πού θά πιστοποιοῦσαν τοῦ λόγου τό ἀληθές. Θά περιοριστοῦμε ὅμως τελικά στήν ψηλάφιση τῆς ἔννοιας τῶν ἀπειροστῶν καί στή προσπάθεια νά δώσουμε κάπως περιληπτικά τίς σοβαρές φιλοσοφικές ἀντιρρήσεις τῶν ὀπαδῶν τῆς Ἐνορατικῆς Σχολῆς (Intuitionists) στήν ἀποδοχή τοῦ ἀπείρου σάν ὑπαρκτοῦ.

Ἡ ἔννοια τῶν ἀπειροστῶν ὅπως αὐτή γίνεται πιά ἀντιληπτή μετά καί τήν εἰσαγωγή τῆς non-standard Ἀνάλυσης ἀπό τόν A. Robinson (βλέπε (12)), ἔχει ἀρκετές ὁμοιότητες μέ τήν ἔννοια τοῦ ἀπείρου. Θά μποροῦσε νά πεῖ κανένας, πώς εἶναι ἡ ἔννοια τοῦ ἀπείρου στή σφαίρα τοῦ ἀπροσμέτρητα μικροῦ. Μά ἄς τό δοῦμε ἀναλυτικότερα. Ἄν θεωρήσουμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα, τό ὁποῖο διχοτομοῦμε, καί στή συνέχεια ἐπαναλάβουμε τήν πράξη τῆς διχοτόμησης σέ ἕνα ἀπό τά δύο του κομμάτια, φροντίζοντας ἡ διαδικασία αὐτή νά συνεχιστεῖ χωρίς τελειωμό, ἔχουμε ἀμέσως μιά εἰκόνα γιά τό ἄπειρα μικρό ἀντίστοιχης τῆς εἰκόνας πού ἔχουμε γιά τό δυναμικό ἄπειρο. Ἄν δεχθοῦμε τώρα τήν ὕπαρξη ἑνός ἀντικειμένου, πού νά εἶναι τό ἀποτέλεσμα αὐτῆς τῆς διαδικασίας ὅταν θεωρηθεῖ "τελειωμένη", τότε εἴμαστε πολύ κοντά στήν ἔννοια τοῦ ἀπειροστοῦ. Τό ἀντικείμενο αὐτό θά εἶναι διατακτικά μικρότερο ἀπό κάθε πραγματικό ἀριθμό χωρίς νά εἶναι τό μηδέν. Δέν νομίζουμε ὅτι εἶναι σκόπιμο νά μποῦμε σέ πιό πολλές λεπτομέρειες δεδομένου, πώς κάτι τέτοιο θά μᾶς ὁδηγοῦσε σέ καθαρά τεχνικές περιγραφές, πού εἶναι ἔξω ἀπό τό σκοπό τοῦ ἄρθρου.

Καταλήγοντας ἄς δοῦμε σέ γενικές γραμμές τίς ἀντιρρήσεις τῶν 'Ενορατικῶν στήν ἀποδοχή τοῦ ἀπείρου σάν πραγματικοῦ ἀντικειμένου. Οἱ ἀντιρρήσεις ξεκινοῦν ἀπό τό γεγονός τοῦ ὅτι ἡ μαθηματική πράξη συντελεῖται ἀπό τό συγκεκριμένο μαθηματικό ὄν (τόν ἄνθρωπο), πού ἀπό τήν ἴδια του τήν φύση δρᾶ καί ἐλέγχει καί σκέφτεται κατά τρόπο πεπερασμένο. 'Ο πεπερασμένος χαρακτῆρας τῆς μαθηματικῆς δραστηριότητας λοιπόν ἔχει σάν συνέπεια τό πεπερασμένο τῆς δυνατότητας ἐλέγχου, ὅπως εἴπαμε προηγουμένως καί αὐτό μέ τή σειρά ὁδηγεῖ σέ μιά σειρά ἀντιλήψεις γύρω ἀπό τό τί εἶναι ἀπόδειξη καί τί ὄχι. Γιά τόν ὀπαδό τῆς 'Ενορατικῆς Σχολῆς ἡ ἔννοια τοῦ ἀποδείξιμου συνδέεται ἄρρηκτα μέ τήν ἔννοια τοῦ κατασκευάσιμου (ἔννοια, πού ὡς ἕνα βαθμό ὁρίζεται κατάλληλα ἀπό τούς 'Ενορατικούς). Αὐτό ὁδηγεῖ σέ ἀπόρριψη ὅλων τῶν ἀποδείξεων, γιά παράδειγμα, πού χρησιμοποιοῦν ἀπαγωγή σέ ἄτοπο. Τοῦτο εἶναι συνέπεια, τοῦ γεγονότος πώς γιά τούς 'Ενορατικούς δέν ἰσχύει ἡ ἀρχή τῆς ἀποκλείσεως τοῦ τρίτου. Δηλαδή, γιά παράδειγμα, γι'αὐτούς δέν ἔχει νόημα ἡ φράση: "Κάθε ἄνθρωπος εἶναι θνητός ἤ ὑπάρχει ἕνας ἄνθρωπος, πού εἶναι ἀθάνατος". Βέβαια ἡ μή ἀποδοχή τῆς ἀρχῆς τῆς ἀποκλείσεως τοῦ τρίτου, ἔχει σχέση μέ τό πώς ὁρίζεται ἡ ἔννοια τοῦ ἀποδείξιμου, μέσα στά πλαίσια τῶν 'Ενορατικῶν Μαθηματικῶν. Ὅμως χονδρικά θά μπορούσαμε νά ποῦμε, πώς τό γεγονός ὅτι ἡ παραπάνω ἀρχή ἰσχύει γιά πεπερασμένες ὁλότητες δέν σημαίνει ἀναγκαστικά πώς ἰσχύει καί γιά ἄπειρες. Προσωπικά πιστεύουμε πώς καμμιά ἀπό τίς δύο ἀπόψεις δέν μπορεῖ νά χαρακτηρισθεῖ σάν σωστή ἤ λάθος. Τό νά ἰσχυριστεῖ κανένας πώς ἡ ἀποδοχή τῆς ὕπαρξης τοῦ ἀπείρου σάν πραγματικοῦ ἀντικειμένου εἶναι ἡ σωστή ἄποψη εἶναι ἐξ ἴσου ἐπικίνδυνο μέ τό νά ἰσχυριστεῖ πώς δέν εἶναι. Καταφατικές ἤ ἀρνητικές ἀπαντήσεις σέ τέτοια προβλήματα εἶναι ἐπικίνδυνες. Πιστεύουμε ἀκόμα πώς ἀπαντῶντας θετικά ἤ ἀρνητικά στό ἐρώτημα κατά τρόπο τελεσίδικο, ἀποκλείουμε τήν δυνατότητα ὑπάρξεως τῆς ἀντίθετης ἄποψης, ἀποκλείοντας, ἔτσι, ἴσως σοβαρές περιοχές γνώσης ἀπό τό ἀνθρώπινο γνωσιολογικό οἰκοδόμημα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

(1). Δ.Α. 'Αναπολιτάνος "Εισαγωγή στή Θεωρία Μοντέλων, 'Αξιωματική Συνολοθεωρία καί Μέθοδος τῆς 'Επιβολῆς (Forcing) τοῦ Cohen" Τεῦχος Διαλέξεων 1977, 'Ελληνικῆς Μαθηματικῆς 'Εταιρείας.

(2). G. Cantor "Contributions to the founding of the Theory of Transfinite Numbers" Dover, New York (1955).

(3). G. Cantor "On infinite, linear point-manifolds" English mimeographed translation of the German paper appeared in Mathematische Annalen Vol XXI, pp. 545-591 (1883).

(4) C.C.Chang and H. Keisler "Model Theory" North-Holland, Amsterdam (1973).

(5). P.J.Cohen "Set Theory and the Continuum Hypothesis" Benjamin, New York (1966).

(6). F.R. Drake "Set Theory, An Introduction to Large Cardinals" North-Holland (1974).

(7). J.M. Dubbey "Development of Mondern Mathematics" Butterworths, London (1970).

(8). M. Dummet "Intnitionistic Mathematics and Logic Part I" Mathematical Institute, Oxford (1974).

(9). A.A. Fraenkel "Abstract set Theory" 2nd ed. North-Holland (1961).

(10). A.A. Fraenkel- Y.Bar-Hillel "Foundations of Set Theory" North-Holland (1958).

(11). P.R. Halmos "Naive Set Theory" Van Norstrand, Princeton, N.J. (1960).

(12) A. Robinson "Non-standard analysis" North-Holland, Amsterdam (1966).

(13). B. Rotman and G.T. Kneebone "The Theory of Sets and Tranfinite Numbers" Oldbourne, London (1966).

(14) G. Wilmers "Notes on Set Theory" Lecture Notes, Manchester (1973).