Author: Π. Δρακόπουλος

Title: Το θεώρημα του Taylor και εφαρμογές του στην κατασκευή λογαριθμικών πινάκων

Abstract: Η εργασία αυτή εξετάζει το θεώρημα του Taylor στην απλούστερη μορφή του, καθώς και τη συνάρτηση ex και υπολογίζεται ο e. Στη συνέχεια εξετάζονται οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ημx και συνx και η συνάρτηση logxκαι μέθοδος υπολογισμού φυσικών και δεκαδικών λογαρίθμων πρώτων αριθμών. Εξετάζεται επίσης η συνάρτηση τοξεφx και υπολογίζεται ο π. Τέλος εξετάζεται η συνάρτηση (1+x)α,αΕIIR, το διωνυμικό ανάπτυγμα.

Creator: HDML

Τό θεώρημα τοῦ Taylor καί ἐφαρμογές του στήν κατασκευή λογαριθμικῶν πινάκων.

Ἀπό τόν Παναγιώτη Δρακόπουλο

Τό ἄρθρον αὐτό γράφτηκε γιά νά δειχθεῖ ὅτι ὁ ὑπολογισμός διαφόρων μεγεθῶν πού ἀπαντῶνται στά σχολικά βιβλία, δηλαδή ὁ ὑπολογισμός τῶν ἀριθμῶν e καί π, τῶν πινάκων οἱ ὁποῖοι δίδουν τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς διαφόρων τόξων, τούς φυσικούς καί δεκαδικούς λογαρίθμους τῶν θετικῶν ἀριθμῶν, δέν χρειάζονται ὁπωσδήποτε τή χρήση πολυπλόκων ὑπολογιστικῶν μηχανῶν, ἀλλά ὅτι μέ κατάλληλη πορεία καί μέ ἁπλή λογιστική πράξη εἶναι δυνατό νά εὑρεθοῦν αὐτά τά μεγέθη καί προπαντός μέ ἀκρίβεια περισσοτέρων δεκαδικῶν ψηφίων.

Ὅλη ἡ ἐργασία χωρίζεται σέ ἕξη κεφάλαια.

Στό πρῶτο ἐξετάζεται τό θεώρημα τοῦ Taylor στήν ἁπλούστερη ἴσως μορφή του. Τό θεώρημα τοῦ Taylor ἀποτελεῖ τό θεμέλιον ὅλης τῆς ἐργασίας.

Στό δεύτερο ἐξετάζεται ἡ συνάρτηση e^x καί ὑπολογίζεται ὁ e.

Στό τρίτο ἐξετάζονται οἱ τριγωνομετρικές συναρτήσεις ημx συνx· ἀναπτύσσεται καί μέθοδος ὑπολογισμοῦ τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.

Στό τέταρτο ἐξετάζεται ἡ συνάρτηση logx, καί μέθοδος ὑπολογισμοῦ φυσικῶν καί δεκαδικῶν λογαρίθμων πρώτων ἀριθμῶν.

Στό πέμπτο ἐξετάζεται ἡ συνάρτηση τοξεφx καί ὑπολογίζεται ὁ π.

Στό ἕκτο ἐξετάζεται ἡ συνάρτηση $(1+x)^{\alpha}$, $\alpha \in R$, τό διωνυμικόν ἀνάπτυγμα.

1. Τό θεώρημα τοῦ Taylor

1.1. Θεώρημα τοῦ Taylor: Ἔστω $f, f', \dots, f^{(n+1)}$ συναρτήσεις ὁρισμένες στό $[\alpha, x]$ καί ἐπιπλέον ἡ $f^{(n+1)}$ εἶναι ὁλοκληρώσιμος στό $[\alpha, x]$, τότε ἰσχύει:

$$f(x)=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)+\cdots+\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n+R_{n,\alpha}(x)$$

ὅπου

$$R_{n,\alpha}(x)=\int_\alpha^x \frac{f^{(n+1)}(y)(x-y)^n}{n!}\,dy$$

Ἀπόδειξη. Θεωρῶ $y\in[\alpha,x]$ καί ἔστω $S(y)=R_{n,y}(x)$ (α)

τότε $$f(x)=f(y)+f'(y)(x-y)+\cdots+\frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n+S(y) \qquad (1)$$

$y\in[\alpha,x]$. Τῆς σχέσεως (1) παραγωγίζουμε καί τά δύο μέλη ὡς πρός y καί παίρνουμε:

$$0=f'(y)+\{f''(y)(x-y)-f'(y)\}+f'''(y)\frac{(x-y)^2}{2!}-f''(y)\frac{x-y}{1!}+$$

$$+\cdots+\left\{\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n-\frac{f^{(n)}(y)}{(n-1)!}(x-y)^{n-1}\right\}+S'(y)$$

$$S'(y)=-\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n \qquad (2)$$

Στήν (2) ὁλοκληρώνομεν καί τά δύο μέλη ἀπό α ἕως x καί τότε προκύπτει:

$$S(x)-S(\alpha)=-\int_\alpha^x \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n dy \qquad (3)$$

Ἀπό τή σχέση (α) ὅμως $S(x)=0$ καί ἐπομένως ἀπό τή

(3) $$S(\alpha)=\int_\alpha^x \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n dy = R_{n,\alpha}(y).$$

2. Ἡ ἐκθετική συνάρτηση e^x

2.1. Λῆμμα: Νά δειχτεῖ ὅτι $2 \leq e \leq 4$.

Ἀπόδειξη: Γνωρίζουμε ὅτι $\int_1^e \frac{dt}{t} = \log e - \log 1 = 1 - 0 = 1$ (1)

ἐπίσης ὅτι $$\int_1^2 \frac{dt}{t} \leq 1\cdot(2-1) = 1 \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (1),(2) $2 \leq e$ (β).

Ἰσχύει $\int_1^4 \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{4}(4-2) + \frac{1}{2}(2-1) = 1$ $\quad e \leq 4$ (γ)

(Β. Σταῖκος).

Ἐκ τῶν (β),(γ) $2 \leq e \leq 4$.

2.2. Θεώρημα: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n,0}(x)$

ὅπου $$R_{n,0}(x) = \int_0^x \frac{e^x(x-y)^n}{n!}\,dy$$

Ἀπόδειξη: Ἐάν καλέσουμε τήν $e^x = f(x)$ τότε εἶναι γνωστό ὅτι $f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1 \quad \forall n = 1,2,\ldots$

Εἰς τόν τύπον τοῦ Taylor

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \cdots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n + R_{n,\alpha}(x)$$

ὅπου $$R_{n,\alpha}(x) = \int_\alpha^x \frac{f^{(n+1)}(x-y)^n}{n!}\,dy$$

ἐάν βάλουμε $\alpha = 0$

$$f(x) = e^x = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n,0}(x)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{e^y(x-y)^n}{n!}\,dy$$

2.3. Λῆμμα: Ἐάν $x \geq 0 \Rightarrow 0 < \int_0^x \frac{e^y(x-y)^n}{n!}dy \leq$

$$\leq \frac{e^x}{n!} \int_0^x (x-y)^n dy.$$

Ἀπόδειξη: Ἰσχύει

$$\frac{1}{n!}\int_0^x (x-y)^n dy \leq \int_0^x \frac{e^y(x-y)^n}{n!}dy \leq \frac{e^x}{n!}\int_0^x (x-y)^n dy =$$

$$= \frac{e^x \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (1)$$

Ἀπό τό λῆμμα 2.1 $e \leq 4$ (2).

Ἐκ τῶν (1),(2) $0 < \int_0^x \frac{e^y(x-y)^n dy}{n!} \leq \frac{4^x \, x^{n+1}}{(n+1)!}$.

2.4. Λῆμμα: Νά δειχθεῖ ὅτι $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ μέ $x \in R^+$ (Β. Στάϊκος).

Ἀπόδειξη: Θεωρῶ τήν ἀκολουθία $\alpha_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^n}{n!}\,\frac{x}{n+1}$ γιά νά ἰσχύει $\alpha_n \to 0$ ἀρκεῖ νά δειχθεῖ ὅτι $x^n/n! \to 0$.

Ἔστω ὁ φυσικός $u > x$ καί φυσικός $n > u$

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1\cdot 2 \ldots n} = \frac{1}{1\cdot 2\ldots(u-1)n(u+1)\ldots n} \leq \frac{1}{1\cdot 2\ldots(u-1)\underbrace{u\cdot u\ldots n}_{n-(u-1)\text{πλῆθος παραγόντων}}} =$$

$$= \frac{1}{(u-1)!n^{u-(u-1)}} = \frac{u^{n-1}}{(u-1)!n} =$$

$$= \frac{u^{u-1}}{(u-1)!}\cdot\frac{1}{u^n} \Rightarrow \frac{1}{n!} \leq \frac{u^{n-1}}{(u-1)!}\cdot\frac{1}{u^n} \qquad u > n$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{x^n}{n!} < \frac{u^{n-1}}{(u-1)!}\cdot\frac{x^n}{u^n} = \frac{u^{n-1}}{(u-1)!}\;\frac{x^n}{u^n}$$

ἀλλά $\left|\frac{x}{u}\right|=\frac{x}{u}<1 \Rightarrow \left(\frac{x}{u}\right)^n \to 0 \Rightarrow \frac{u^{n-1}}{(u-1)}\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^n \to 0$

$$\frac{x^n}{n!} \to 0.$$

2.5. Πόρισμα: Μέ $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R$

ὅπου $0<R \leq \frac{4}{(n+1)!}$ καί $e<3$.

'Απόδειξη: 'Από τό προηγούμενο λῆμμα 2.3 τό πρῶτο ἐρώτημα τοῦ πρός ἀπόδειξη εἶναι φανερό.

Μέ n=4 ἔχουμε $0<R<\frac{4}{5!}<\frac{1}{10}$ καί

$e=e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+R=\frac{65}{24}+R=2+\frac{17}{24}+R<3.$

2.6. Θεώρημα: $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R$ ὅπου

$|R|<\frac{3^x\cdot x^{n+1}}{(n+1)!}$.

'Απόδειξη: 'Η ἰσχύς του φανερή ἀπό τά προηγούμενα.

2.7. Θεώρημα: Νά δειχτεῖ ὅτι $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

'Απόδειξη: 'Από τό προηγούμενο θεώρημα ἀλλά καί λῆμμα ἕπεται ὅτι:

$$f(x)=e^x=1+x+\cdots+\frac{x^n}{n!}+0$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

2.8. Θεώρημα: Ὁ e εἶναι ἄρρητος.

'Απόδειξη: 'Από τό θεώρημα 2.6 προκύπτει ὅτι:

$$e=1+1+\cdots+\frac{1}{n!}+R \quad \text{όπου} \quad 0<R\leq\frac{3}{(n+1)!}$$

Ἔστω ὅτι $e=\frac{\alpha}{\beta}$ μέ α,β φυσικούς καί $(\alpha,\beta)=1$. Ἐάν $n>\beta$ καί $n>3$ τότε ἰσχύει:

$$\frac{\alpha}{\beta}=1+1+\cdots+\frac{1}{n!}+R\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\alpha}{\beta}\cdot n!=n!+n!+\cdots+\frac{n!}{n!}+n!R$$

ἄρα ὁ ἀριθμός $n!R$ εἶναι ἀκέραιος (1).

Ἰσχύει ὅμως ὅτι $0<n!R<\frac{3}{n+1}<\frac{3}{4}<1$ (2), πού εἶναι ἄτοπο ἀπό τήν (1).

2.9. Παρατήρηση: Ὁ e εἶναι καί ἐπιπλέον ὑπερβατικός ἀριθμός δηλ. δέν εἶναι ρίζα πολυωνύμου μέ ἀκέραιους συντελεστές. Τοῦτο τό ἀπέδειξε πρῶτος ὁ Hermite τό 1873 μετά ἀπό μελέτη ἐκθετικῶν συναρτήσεων. Στή συνέχεια οἱ Hilbert, Hugwitz, Gördan ἁπλοποίησαν τήν ἀπόδειξη τοῦ Hermite τό 1893.

2.10. Θεώρημα: Ἡ τιμή τοῦ e μέ ἀκρίβεια 7ου δεκαδικοῦ ψηφίου εἶναι ἡ $e=2,7182818$.

Ἀπόδειξη: Προηγουμένως δείχτηκε ὅτι

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+R \ (1) \quad \text{όπου} \quad 0<R<\frac{3}{(n+1)!}.$$

Ἐπειδή δέ $\forall x\in(0,1)\Rightarrow 1<e^x<e<3\Rightarrow\frac{1}{(n+1)!}<R<$

$$<\frac{3}{(n+1)!} \quad (2).$$

Ἀπό τήν τελευταία ἀνισότητα μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τό e μέ κάθε ἐπιθυμητό βαθμό ἀκρίβειας. Ἐάν λάβουμε n=12 τότε τό $\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{2}\cdot 10^{-8}$ καί ἔτσι βρίσκουμε μιά τιμή γιά τά πρῶτα 7 δεκαδικά ψηφία τοῦ e.

Αἱ τιμαί τοῦ $\frac{1}{n!}$ εὑρίσκονται ἀρκετά εὔκολα, ἐάν εἶναι γνωστές οἱ τιμές τοῦ $\frac{1}{(n-1)!}$. Τίς τιμές αὐτές τίς δίδει ὁ παρακάτω πίνακας διά $3 \leq n \leq 12$ πού περιέχει τούς ἀριθμούς στά πρῶτα φ ψηφία τους κατά προσέγγισιν

n	$\frac{1}{n!}$	
3	0,166 666 667	-
4	0,041 666 667	-
5	0,008 333 333	+
6	0,001 388 889	-
7	0,000 198 413	-
8	0,000 024 802	-
9	0,000 002 756	-
10	0,000 000 276	-
11	0,000 000 025	+
12	0,000 000 002	+

Ἡ προσέγγιση στόν πίνακα χαρακτηρίζεται σέ κάθε περίπτωση ὡς θετική ἤ ἀρνητική, πρᾶγμα πού μᾶς λέει, ἐάν ἡ προσέγγιση εἶναι μεγαλύτερη ἤ μικρότερη ἀπό τήν ἀκριβή τιμή της Οἱ τρεῖς πρῶτοι ὅροι τῆς σειρᾶς (1) ἔχουν ἄθροισμα $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!} = \frac{5}{2} = 2{,}5$. Ἄν προσθέσουμε τό 2,5 στό ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τοῦ πίνακα, βρίσκουμε ὁλικό ἄθροισμα $\Sigma=2{,}718281830$. Ἄν λάβουμε ὑπόψη μας τά σφάλματα τῆς προσεγγίσεως τότε ἡ πραγματική τιμή τοῦ ἀθροίσματος $S_{12}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{12!}$ πρέπει νά εἶναι μικρότερη ἀπό τό Σ τό πολύ κατά $\frac{7}{2}$ μιᾶς μονάδας τῆς τελευταίας δεκαδ. τάξης λόγω τῶν ἑπτά ἀρνητικῶν προσήμων ἤ μεγαλύτερη ἀπό τό Σ κατά $\frac{3}{2}$ μιᾶς μονάδας τῆς τελευταίας δεκαδικῆς τάξεως, λόγω τῶν τριῶν θετικῶν προσήμων. Ἄρα ἔχουμε:

$$\left.\begin{array}{ll} & 2,718281826 < S_{12} < 2,718281832 \\ \text{καί} & 0,000000000 < R \quad < 0,000000001 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2,718281826 < e < 2,718281833$$

καί ἑπομένως ἡ ἀκριβής τιμή τοῦ e μέχρι τά πρῶτα ἑπτά δεκαδικά ψηφία εἶναι

$$e=2,7182818.$$

3. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

3.1. **Θεώρημα:** Νά δειχτεῖ ὅτι γιά τή συνάρτηση ημx, $x\in R$ ἰσχύει $\eta\mu x = x-\frac{x}{3!}+\frac{x}{5!}-\frac{x}{7!}+\cdots+(-1)^{\nu-1}\frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}+P$ ὅπου $0\leq|P| \quad \frac{|x|^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$.

Ἀπόδειξη: Εἶναι γνωστό ὅτι ἐάν $f(x)=\eta\mu x$ τότε: $f^{(2\nu-1)}(x)=(-1)^{\nu-1}\sigma\upsilon\nu x$ καί $f^{(2\nu)}(x)=(-1)^{\nu}\eta\mu x$ $\forall \nu=1,2,\dots$, ἑπομένως $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f'''(0)=-1$, $f^{(4)}(0)=0$ καί γενικῶς $f^{(2\nu-1)}(0)=(-1)^{\nu-1}$, $f^{(2\nu)}(0)=0$ $\forall\nu=1,2,\dots$.

Ἔχουμε τόν τύπο τοῦ Taylor (1.1)

$$f(x)=f(\alpha)+\frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha)+\cdots+\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^{n}+R_{n,\alpha}(x) \qquad (1)$$

ἐάν εἰς τόν τύπον (1) ἀντικαταστήσουμε ὅπου α=0 καί τίς τιμές τῶν $f^{(2\nu-1)}(0)$ καί $f^{(2\nu)}(0)$ τότε προκύπτει:

$$\eta\mu x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!} +$$

$$+(-1)^{\nu} \int_0^x \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \sigma\upsilon\nu x dx.$$

'Ισχύει ὅμως ὅτι:

$$|R_{n,\alpha}(x)| \leq \frac{|x|^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$$

καί ἐπειδή μέ $x \theta R$ σταθερό ἔχει δειχτεῖ ὅτι

$$\lim_{\nu \to +\infty} \frac{|x|^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} = 0 \Rightarrow \lim R_{n,\alpha}(x) = 0$$

καί ἐπομένως τό θεώρημα ἰσχύει.

3.2. Πόρισμα: Νά δειχτεῖ ὅτι $\eta\mu x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} +$ $+ \cdots + (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!} + \ldots$.

'Απόδειξη: Φανερή ἀπό τό προηγούμενο θεώρημα.

3.3. Λῆμμα: Νά δειχτεῖ ὅτι $|\eta\mu x - \eta\mu y| \leq |x-y|$.

'Απόδειξη: 'Από τό θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ ἔχουμε $\eta\mu x - \eta\mu y = (x-y)\sigma\upsilon\nu\alpha$ (1), ὅπου $\alpha \theta (x,y)$ καί $|\sigma\upsilon\nu\alpha| \leq 1$. 'Εκ τῆς (1) ἕπεται $|\eta\mu x - \eta\mu y| =$ $= |x-y| |\sigma\upsilon\nu\alpha| \leq |x-y|$. 'Από τό θεώρημα τοῦ Taylor ἔχομε ὅτι $\eta\mu x = P(x) + R(x)$ ὅπου $P(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots +$

$$+(-1)^{\nu-1} \frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}$$

$$|\eta\mu x - P(y) - R(y)| \leq |x-y| \quad \text{ἤ}$$

$$|\eta\mu x - P(y)| \leq |x-y| + R(y)$$

καί ἔτσι ἄν τά x,y διαφέρουν λ ί γ ο τότε καί τά ημx καί P(y) διαφέρουν καί αὐτά λίγο.

3.4. Ὑπολογισμός τῶν ημ1 καί ημ10 .

Ἀπό τή σχέση $\frac{\mu}{180}=\frac{x}{\pi}$ μέ $\mu=1^0$ $x=\frac{\pi}{180}$ ἡ τιμή τῆς 1 σέ ἀκτίνια καί ἑπομένως $x=\frac{\pi}{180}=0,0174532925$ (+) , στήν εὕρεση τῆς τιμῆς τοῦ x χρησιμοποιήθηκε ἡ τιμή τοῦ π κατά προσέγγιση, ἡ μέθοδος ἀκόμη προσέγγισης τοῦ π δίνεται στά ἑπόμενα.

Ἔχουμε λοιπόν τό παρακάτω πίνακα τιμῶν στόν ὁποῖον τό πρόσημον + ἤ - τῆς τελευταίας στήλης χαρακτηρίζει τήν προσέγγιση ἐάν εἶναι μεγαλύτερη ἤ μικρότερη ἀπό τήν ἀκριβή τιμή

x	0,0174532925	+
$\frac{x^2}{2!}$	0,0001523087	+
$\frac{x^3}{3!}$	0,0000008861	+
$\frac{x^4}{4!}$	0,0000000039	-
$\frac{x^5}{5!}$	0,0000000013	+

ἄρα

$$\eta\mu 1^0 = -\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!} = 0,0174532925^+$$
$$-0,0000008861^+$$
$$+0,0000000000^+$$
$$\eta\mu 1^0 = 0,0174524064$$

καί

$$0,0174524063 < \eta\mu 1^0 < 0,0174524065$$

ἐπομένως

$$ημ1^0=0,017452406$$

μέ ἀκριβή τά πρῶτα 9 δεκαδικά ψηφία ἔναντι τῶν 5 πού δίνουν οἱ πίνακες.

Ἀπό τό προηγούμενο παράδειγμα συμπεραίνουμε ὅτι γιά τόξα ἴσα ἤ μικρότερα τῆς 1^0 ἀρκεῖ γιά τόν ὑπολογισμό 4 ἤ 5 δεκαδικῶν ψηφίων τῆς τιμῆς τῆς συναρτήσεως $f(x)=x$ ἡ προσέγγιση $\approx ημx$ x.

Ἀλλά καί γιά τόξα μέχρι 10 ἀρκεῖ ἡ προσέγγιση

$$ημx \approx x-\frac{x^3}{3!}$$

π.χ. Ἔχουμε $τοξ10^0=\frac{\pi}{180}10=\frac{\pi}{18} \Rightarrow \frac{\pi}{18}=0,74533$ (-)
καί

$$ημ\frac{\pi}{18}=\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}=\begin{array}{r}0,174533\ (-)\\ -0,000886\ (-)\\ \hline\end{array}$$

$$ημ10^0=ημ\frac{\pi}{18}=0,173647$$

Φανερά τά 4 πρῶτα δεκαδικά ψηφία εἶναι ἀκριβή. Ὁ δέ σχετικός πίνακας πού περιλαμβάνεται στά σχολικά βιβλία δίνει τήν τιμή μέ δύο μόνο δεκαδικά ψηφία, δηλαδή $ημ10^0=0,174$ (Μαθηματικά Α΄ Λυκείου Ἄλγεβρα, Βαβαλέσκου - Μπούσγου).

3.5. **Θεώρημα:** Νά δειχτεῖ ὅτι γιά τήν συνάρτηση συνx $x\in R$ ἰσχύει $συνx=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots+(-1)^{\nu-1}\frac{x^{2\nu-2}}{(2\nu-2)!}+P$, $x\in R$ ὅπου $0\leq|P|<\frac{|x|^{2\nu}}{(2\nu)!}$.

Ἀπόδειξη: Γνωρίζουμε ὅτι ἄν $f(x)=συνx$ τότε $f^1(x)=συν\left(x+\frac{\pi\nu}{2}\right)$ καί ἑπομένως $f^{(\nu)}(0)=συν\frac{\nu\pi}{2}$ (1). Ἀπό τόν τύπο (1) λαμβάνουμε $f'(0)=0$, $f''(0)=-1$, $f'''(0)=0$, $f^4(0)=-1$, κ.τ.λ.

῎Εχουμε τόν τύπο τοῦ Taylor

$$f(x)=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)+\cdots+\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n+R_{n,\alpha}(x) \qquad (2)$$

Στόν τύπο (2) ἐάν βάλουμε ὅπου $\alpha=0$ καί τίς τιμές τῆς $f^{(\nu)}(0)$ προκύπτει ὅτι:

$$f(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}-$$

$$-(-1)^n\int_0^x\frac{x^{2n}}{(2n)!}\,\eta\mu x dx$$

ὅπου τό $R_{n,\alpha}(x)=(-1)^n\int_0^x\frac{x^{2n}}{(2n)!}\,\eta\mu x dx.$

᾿Ισχύει ὅμως ὅτι $|R_{n,\alpha}(x)|\leq\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ καί ἐπειδή γιά

σταθερόν γνωρίζουμε ὅτι $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=0$ $\lim\limits_{n\to+\infty}R_{n,\alpha}(x)=0$ καί ἑπομένως

$$\sigma\upsilon\nu x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$$

3.6. Λῆμμα: Νά δειχτεῖ ὅτι $|\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu y|\leq|x-y|$.

᾿Απόδειξη: ᾿Από τό θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς ἔχομε ὅτι $\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu y=(x-y)\eta\mu\alpha$ (1), ὅπου $\alpha\in(x,y)$.

᾿Επειδή δέ $\eta\mu\alpha\leq 1$ (2), ἀπό τίς (1) καί (2) λαμβάνουμε $|\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu y|=|x-y||\eta\mu\alpha|\leq|x-y|$ (3).

᾿Από τό θεώρημα τοῦ Taylor ἔχουμε ὅτι $\sigma\upsilon\nu x=P(x)+R(x)$ ὅπου $P(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$ ὁπότε ἀπό τόν τύπο (3) προκύπτει ὅτι

$$|\text{συν}x-P(y)-R(y)| \leq |x-y| \quad \text{ἤ}$$

$$|\text{συν}x-P(y)| \leq |x-y|+R(y)$$

καί ἔτσι ἄν τά x,y διαφέρουν λίγο τότε καί τά συνx, $P(y)$ διαφέρουν καί αὐτά λίγο.

3.7. Ὑπολογισμός τοῦ συν1°

Στήν παράγραφο 3.4 ὑπολογίσαμε τίς παραστάσεις

$= \frac{\pi}{180}$, $\frac{x^2}{2!}$, $\frac{x^3}{3!}$,... Κατά τόν ὑπολογισμό τῶν παραστάσεων αὐτῶν ἡ τιμή τοῦ π πάρθηκε κατά προσέγγιση, ὑπολογίζεται δέ ἡ προσεγγιστική αὐτή τιμή τοῦ π, στά ἑπόμενα.

Ἔχοντας λοιπό αὐτά ὑπόψη μας καταρτίζουμε τόν ἑξῆς πίνακα:

1	1,000 000 000 0	
$\frac{x^2}{2!}$	0,000 152 308 7	+
$\frac{x^4}{4!}$	0,000 000 003 9	-
$\frac{x^6}{6!}$	0,000 000 000 0	+

ἄρα

$$\begin{aligned} \text{συν}1^\circ \approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!} &= 1,\ 000\ 000\ 000\ 0 \\ &\ \ -0,\ 000\ 152\ 308\ 7 \\ &\ \ +0,\ 000\ 000\ 003\ 9 \\ &\ \ -0,\ 000\ 000\ 000\ 0 \\ \text{συν}1^\circ &\approx 0,\ 999\ 847\ 695\ 2 \end{aligned}$$

ὥστε ἔχουμε

$$0,999\ 847\ 695\ 0 < \text{συν}1^\circ < 0,999\ 847\ 695\ 2$$

ἄρα

$$συν1^0=0,999\ 847\ 695$$

μέ ἀκριβή 9 δεκαδικά ψηφία.

Ἀπό τό προηγούμενο παράδειγμα εἶναι φανερό ὅτι γιά πολύ μικρά τόξα (μικρότερα ἤ ἴσα τῆς 1^0) ἀρκεῖ γιά τόν ὑπολογισμόν 4 ἤ 5 δεκαδικῶν ψηφίων τῆς συνάρτησης $f(x)=συνx$ ἡ προσέγγιση $συνx=1-\frac{x^2}{2!}=1-\frac{x^2}{2}$, καί γιά τόξα μέχρι 10^0 ἡ προσέγγιση $συν=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$.

4. Ἡ συνάρτηση logx, $x\in(0,+\infty)$

4.1. Ἡ συνάρτηση $f(x)=\log x|(0,+\infty)$ ὁρίζεται ἐδῶ ὅπως καί ἀπό τό Δ. Κάππον Σελ. 70, 1960.

Ἡ συνάρτηση $f(x)=\log x$ δέν ὁρίζεται στό σημεῖο 0. Γιά τή συνάρτηση αὐτή ἔχουμε

$$\frac{d^k\log x}{dx^k}=(-1)^{k-1}\cdot\frac{(k-1)!}{x^k},\quad k\geq 1\quad \forall x>0$$

ἄρα
$$\frac{1}{k!}f^{(k)}(1)=\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

4.2. Γιά $x>-1\Rightarrow\log(1+x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t}$ ἀλλά

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-\cdots-(-1)^{n-1}\ t^{n-1}+\frac{(-1)^n t^n}{1+t}$$

καί ἐπομένως

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\int_0^x\frac{t^n}{1+t}dt \qquad (1)$$

4.3. Θεώρημα: Νά δειχτεῖ ὅτι:

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}+R_{n,a}(x)\qquad x\in(-1,1|$$

'Απόδειξη: "Αν $x \geq 0 \Rightarrow R_{n,\alpha}(x) = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \leq \int_0^x t^n dt =$

$= \frac{x^{n+1}}{n+1}$ τό όποῖον ἐάν $x \leq 1$ τείνει στό μηδέν.

"Αν $x \in (-1,0] \Rightarrow \left|\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt\right| \leq \int_0^x t^n dt \quad \frac{1}{x+1} =$

$= \frac{x^{n+1}}{(1+x)(4+1)}$ τό όποῖον συγκλίνει στό 0 ἄν $x > -1$.

"Αρα τελικά $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$ ἄν $x \in (-1,1]$.

4.3.1. Τό ὅτι ἡ σχέση $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$ δέν ἰσχύει ἐκτός τοῦ διαστήματος $(-1,1]$ ἀποδεικνύεται ἔτσι: Μέ $x=-1$ ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$ γίνεται $-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots =$ $=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\right)$ δηλαδή ἡ ἀντίθετη τῆς ἁρμονικῆς σειρᾶς, ἡ ὁποία, ὅπως εἶναι γνωστό, δέν συγκλίνει πρός πεπερασμένον ἀριθμόν.

Μέ $x > 1$ ἐάν ἡ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ συγκλίνει τότε πρέπει $\lim_{\nu\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = 0 \quad \lim_{\nu\to+\infty} \frac{x^n}{n} = 0$, αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο ἐπειδή

$$\frac{x^n}{n} = \frac{\{1+(x-1)\}^n}{n} > \frac{\binom{n}{2}(x-1)^2}{n} = (n-1)\frac{(x-1)^2}{2} \geq \frac{(x-1)^2}{2} > 0$$

4.4. Λῆμμα: "Αν οἱ ἀριθμοί $\alpha,\beta,\theta \in R^+$ καί $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$ τότε ἰσχύει

$$\lambda o\gamma_\beta \theta = \frac{\lambda o\gamma_\alpha \theta}{\lambda o\gamma_\alpha \beta} \quad (\tau)$$

'Απόδειξη: 'Από τήν βασική λογαριθμική ταυτότητα ἔχομε:

$$\beta^{\lambda o\gamma_\beta \theta}=\theta \ (2) \Rightarrow \lambda o\gamma_\alpha(\beta^{\lambda o\gamma_\beta \theta})=\lambda o\gamma_\alpha \theta$$

$$\lambda o\gamma_\beta \theta \cdot \lambda o\gamma_\alpha \beta=\lambda o\gamma_\alpha \theta \Rightarrow \lambda o\gamma_\beta \theta=\frac{\lambda o\gamma_\alpha \theta}{\lambda o\gamma_\alpha \beta}$$

4.4.1. Παρατήρηση: Ἡ προηγούμενη σχέση (τ) γίνεται $\lambda o\gamma_\beta \theta=\lambda o\gamma_\beta \alpha \cdot \lambda o\gamma_\alpha \theta$ (τ΄).

Ὁ ἀριθμός $M=\lambda o\gamma_\beta \alpha$ ὀνομάζεται σταθερή τῆς ἀλλαγῆς βάσεως. Ὁ τύπος (τ΄) γιά β=10 καί α=e γίνεται

$$\lambda o\gamma\theta=\lambda o\gamma e \cdot \log\theta \quad (2).$$

Ἀπό τή σχέση (2) λαμβάνουμε: $\lambda o\gamma\theta=\frac{1}{\log 10}\log\theta$ καί

$$\theta=\frac{1}{\lambda o\gamma e}\lambda o\gamma\theta \quad (3).$$

Ἡ σταθερή τῆς ἀλλαγῆς βάσεως εἶναι

$$M=\lambda o\gamma e=\lambda o\gamma 2,72...=0,43429$$

ὁπότε ἀπό τήν (3) ἔχομε

$$\log\theta=\frac{1}{M}\lambda o\gamma\theta \simeq \frac{1}{0,43420}\cdot\lambda o\gamma\theta \simeq 2,30258\cdot\lambda o\gamma\theta$$

Ἄρα $\forall\theta>0$ ἰσχύει.

$$\left.\begin{array}{rl} & \log\theta \simeq 2,30258\ \lambda o\gamma\theta \\ \text{καί} & \lambda o\gamma\theta = 0,43429\ \log\theta \end{array}\right\} \ (4)$$

4.5. Λῆμμα: Νά βρεθεῖ μέτρο προσεγγίσεως τοῦ $\frac{x}{y}$, $x,y\in R$ καί $y\neq 0$.

Ἀπόδειξη: Ἔστω ὅτι προσεγγίζομε τό κλάσμα $\frac{x}{y}$ μέ τό κλάσμα $\frac{x+\varepsilon''}{y+\varepsilon'}$ μέ ε΄, ε΄΄ πραγματικούς, τότε θά πρέπει νά ἰσχύει:

$$\left|\frac{x+\varepsilon''}{y+\varepsilon'}-\frac{x}{y}\right|=\left|\frac{\varepsilon'' y-\varepsilon' x}{y(y+\varepsilon')}\right|\leq\frac{\varepsilon\{|x|+|y|\}}{2}=\varepsilon\cdot\frac{|x|+|y|}{2}$$ μέ

$$\varepsilon'',\varepsilon'\leq\varepsilon<1 \quad \text{καί} \quad y>2.$$

4.6. Ὑπολογισμός κατά προσέγγιση λογαρίθμων.

Ἀπό τό θεώρημα 4.3. ὑπολογίζεται ὁ λογάριθμος ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι ἀνήκουν στό διάστημα $(0,1|$, ὅπως καί κάθε θετικοῦ ἀριθμοῦ.

Πράγματι ἐάν ζητεῖται ὁ $\log a$ μέ $a>1$ τότε ἀρκεῖ νά ὑπολογιστεῖ ὁ $\log\frac{1}{a}$ ὁπότε $\log a=-\log\frac{1}{a}$.

Ὁ τρόπος ὅμως αὐτός δέν εἶναι πάντοτε ὁ περισσότερο κατάλληλος λόγω τῶν πολλῶν πράξεων πού χρειάζονται. Ἐάν π.χ. βάλουμε στόν τύπο (1) ὅπου $x=1$ λαμβάνουμε

$$2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}+R, \quad \text{ὅπου } R\to 0$$

στόν ὁποῖον προκειμένου νά ὑπολογίσουμε τό $\log 2$ μέ ἀκρίβεια 6 πρώτων δεκαδικῶν ψηφίων πρέπει $\nu\geq 10^6$.

Ἀκολουθοῦμεν λοιπόν τήν ἑξῆς μέθοδον:

Ἀπό τή 4.3 ἔχουμε: $\log(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}=$

$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}+\cdots$ ἐάν ἀντικαταστήσουμε στή προηγούμενη σχέση τό x μέ $-x$ καί πολ/σουμε καί τά δύο μέλη μέ -1 λαμβάνουμε

$$\log\frac{1}{1-x}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots$$

καί διά προσθέσεως κατά μέλη τῶν δύο αὐτῶν σχέσεων

$$\log\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{n-1}+\cdots\right) \quad \text{διά } n \text{ ἄρτιον.}$$

'Από τόν τελευταίο τύπο γιά νά βρεθεί ό log2 πρέπει $\frac{1+x}{1-x}=2$

$x=\frac{1}{3}$ καί έπομένως

$$2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^{2n-1}}+\cdots\right)$$

όπότε γιά τήν άκρίβεια 8 πρώτων δεκαδικών ψηφίων της προσέγγισης άρκεί νά είναι ν=9. Μέ έφαρμογή λοιπόν έχουμε $\log 2 \simeq 0,693145$ καί άπό τόν τύπο (4) $\lambda o\gamma 2 \simeq 0,301026$ δηλαδή άκρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων άντί τών 5 πού δίνουν οί πίνακες.

'Υπολογίσαμε τούς log2, λογ2 γιατί τό 2 είναι πρώτος άριθμός, καί έπειδή έάν έχουμε μέθοδο ύπολογισμού τών λογαρίθμων τών πρώτων άριθμών γνωστού όντος ότι οί άλλοι άριθμοί οί σύνθετοι άναλύονται σέ γινόμενα πρώτων παραγόντων, ή εύρεση τού λογαρίθμου των είναι θέμα έφαρμογής τών ίδιοτήτων τών λογαρίθμων π.χ. $12=2^2\cdot 3$ καί συνεπώς $\log 12=2\log 2+\log 3$.

5. 'Η συνάρτηση τοξεφ , $-\infty$ x $+\infty$. 'Υπολογισμός τού π

5.1. 'Η συνάρτηση f(x)=τοξεφx όρίζεται έδώ όπως καί ύπό Δ. Κάππου Σελ. 261, 1960.

Είναι γνωστό, ότι $\frac{d\tau o\xi\varepsilon\varphi x}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$, έπίσης δέ ότι ή f(x)=τοξεφx έχει παραγώγους κάθε τάξεως, ό σχηματισμός όμως τού τύπου τού Taylor μέ ύπολογισμό παραγώγων είναι έξαιρετικά έπίπονη, έπειδή δέν ύπολογίζεται εύκολα γενικός τύπος,ό όποίος νά δίνει τάς παραγώγους ν τάξεως $\forall \nu=1,2,\ldots$ Γιά αύτό τό λόγο ό τύπος τού Taylor θά σχηματιστεί μέ άλλο τρόπο.

5.2. **Θεώρημα:** Νά δειχτεί ότι:

$$\tau o\xi\varepsilon\varphi x=x-\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-1}}{2n-1}+R_\nu(x)$$

'Απόδειξη: 'Ισχύει $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=\tau o\xi\varepsilon\varphi x-\tau o\xi\varepsilon\varphi 0=\tau o\xi\varepsilon\varphi x.$

Ἐξ ἄλλου ἔχουμε: $1-t^2+t^4-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot t^{2n-2}=\dfrac{1-(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}$ (1)

(Τύπος ἀθροίσματος n ὅρων γεωμ. προόδου μέ $a_1=1$ καί $\omega=-t^2$).

Ἀπό τήν (1) $\Rightarrow \dfrac{1}{1+t^2}=$

$$=1-t^2+t^4-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot t^{2n-2}+(-1)^n\cdot\frac{t^{2n}}{1+t}$$

ἄρα $\text{τοξεφ}x=\displaystyle\int_0^x\left\{1-t^2+t^4-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot t^{2n-2}+(-1)^n\cdot\frac{t^{2n}}{1+t^2}\right\}dt$

$$\text{τοξεφ}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+$$

$$+(-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n}}{1+t}\,dt \quad (2).$$

Ὀνομάζω $R_\nu(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt$ $\forall x$ μέ $x^2\leq 1$. Ἐπειδή

$\dfrac{t^{2n}}{1+t^2}\leq t^{2n} \Rightarrow |R_\nu(x)|=\left|\displaystyle\int_0^x\frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt\right|\leq\int_0^x t^{2n}dt=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ (3)

Μέ $x\in[0,1]$ ἀπό τό (3) $\Rightarrow |R_\nu(x)|\leq\dfrac{1}{2n+1} \Rightarrow \lim\limits_{\nu\to+\infty}R_\nu(x)=0$ $\forall x\in[0,1]$.

Μέ $x<0$ θέτω $\tau=-t$ στόν (2) καί τότε

$R_\nu(x)=(-1)^{n+1}\displaystyle\int_0^{-x}\frac{\tau^{2n}}{1+\tau\tau}\,d\tau \Rightarrow |R_\nu(x)|\leq\frac{1}{2n+1}$ $\forall x\in[-1,0]$

$\Rightarrow \lim\limits_{\nu\to+\infty}R_\nu(x)=0$ $\forall x\in[-1,0]$ ἄρα

$$\text{τοξεφ}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1} \quad \forall x\in[-1,1].$$

5.3. Ἰδιαίτερα μέ $x=+1$ ἔχουμε:

$$\text{τοξεφ}1=\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^{\nu-1}\ \frac{1}{2\nu-1}+\cdots \quad \text{(Τύπος Gregory).}$$

'Η σειρά αὐτή συγκλίνει πολύ σιγά καί ἄρα δέν εἶναι κατάλληλη γιά ὑπολογισμό τοῦ ἀριθμοῦ π κατά προσέγγιση. 'Η δυσκολία αὐτή φαίνεται καλλίτερα, γιατί ἐάν θελήσουμε μέ τό τύπο τοῦ Gregory νά ὑπολογίσουμε τόν π μέ ἀκρίβεια 10^{4} (4 δεκαδικῶν ψηφίων) τότε πρέπει $\nu > \frac{10^4-3}{2}$.

Τήν δυσκολία αὐτή μποροῦμε νά τήν παρακάμψουμε μέ τή βοήθεια τοῦ ἑπόμενου λήμματος.

5.4. Λῆμμα: Νά δειχτεῖ ὅτι: $\frac{\pi}{4}=\text{τοξεφ}\frac{1}{2}+\text{τοξεφ}\frac{1}{3}$.

'Απόδειξη: 'Αρκεῖ νά δειχτεῖ ὅτι:

$$\text{εφ}\frac{\pi}{4}=\text{εφ}\ \text{τοξεφ}\frac{1}{2}+\text{τοξεφ}\frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1.$$

Εἶναι ὅμως γνωστό ὅτι $\text{εφ}\frac{\pi}{4}=1$, ἄρα τό λῆμμα ἰσχύει.

5.5. 'Υπολογισμός τοῦ π. Θεωροῦμε τήν σειρά

$$\text{τοξεφ}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^{\nu-1}\cdot\frac{x^{2\nu-1}}{2\nu-1}+\cdots$$

'Εάν στήν σειρά αὐτή θέσουμε ὅπου $x=\frac{1}{2}$ καί $x=\frac{1}{3}$ λαμβάνουμε:

$$\pi=4\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\cdots\right\}-4\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}-\cdots\right\}$$

'Εάν τώρα λάβουμε ἕξη ὅρους ἀπό τήν πρώτη σειρά καί δύο ἀπό τήν δεύτερη κρατώντας ἐννέα δεκαδικά ψηφία στούς ἀριθμητικούς ὑπολογισμούς μας καί ἔχοντας ὑπόψη μας τά σφάλματα τῆς προσεγγίσεως κατά τήν ἐκτέλεση τῶν πράξεων φτάνουμε στήν ἀνισότητα:

$$3,141592629 < \pi < 3,141592668$$

γεγονός τό όποῖο μᾶς δείχνει ὅτι ἡ ἀκριβής τιμή τοῦ π γιά τά πρῶτα ἔξη δεκαδικά ψηφία εἶναι

$$\pi=3,141592.$$

6. Ἡ συνάρτηση $(1+x)^{\alpha}$, $\alpha\in R$.

6.1. Ἔστω ἡ συνάρτηση $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $\alpha\in R$. Ὅπως εἶναι γνωστό ἔχουμε

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

ἐπομένως ἀπό τό θεώρημα τοῦ Taylor λαμβάνουμε

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_{n+1}(x)$$

ὅπου

$$R_{n+1}(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

Εἶναι λοιπόν $R_{n+1}(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$

$$\cdots(\alpha-n)(1+t)^{\alpha-n-1}dt=$$

$$=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x \frac{x-t}{1+t}^{n}(1+t)^{\alpha-1}dt$$

6.2. Ὑποθέτουμε ὅτι: $|x|<1$ τότε ἡ συνάρτηση $\varphi(t)=$ $=\frac{x-t}{1+t}$ εἰς τό διάστημα $(-1,+\infty)$ εἶναι φθίνουσα, γιατί $\varphi'(t)=$ $=-\frac{1+x}{1+t}<0$.

Στό κλειστό διάστημα $[0,x]$ ἔχουμε: $\varphi(0)=x$ καί $\varphi(x)=0$, συνεπῶς $|\varphi(t)|\leq|x|$ $\forall x\in[0,x]$ μέ $|x|<1$.

Ἔχουμε λοιπόν:

$$\left|\int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{\alpha-1}dt\right| \leq \left|\int_0^x |x|^n (1+t)^{\alpha-1}dt\right| = \left|x^n \int_0^x (1+t)^{\alpha-1}dt\right|$$

Εἶναι δέ, $|R_{n+1}(x)| \leq \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} x^n \int_0^x (1+t)^{\alpha-1}dt\right|$.

Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $R_{n+1}(x) \to 0$ διά $n \to +\infty$ ἤ ἀρκεῖ νά δείξουμε $\lambda_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} |x|^n \to 0$ διά $n \to +\infty$ καί μέ $|x| < 1$.

Μέ $x=0$ φανερά ἰσχύει. Μέ $x \neq 0$ ἔχουμε: $\left|\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right| = \left|\frac{\alpha-n+1}{n+1}\right| |x| \to |x|$ τοῦ $n \to +\infty$ καί μέ $0 < |x| < 1$.

Ἄρα ὑπάρχει ἕνας ἀριθμός $0 < q < 1$ τέτοιος ὥστε μέ $\nu \geq N_0$ νά ἔχουμε $\left|\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right| < q$ μέ $n \geq N_0$ ἤ $|\lambda_{n+1}| < q|\lambda_n|$.

Δίνοντας στόν n τίς τιμές $n = N_0, N_0+1, \ldots,$ λαμβάνουμε

$$|\lambda_{N_0+1}| < q|\lambda_{N_0}|$$

$$|\lambda_{N_0+2}| < q|\lambda_{N_0+1}|$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|\lambda_{N_0+n}| < q|\lambda_{N_0+n-1}|$$

Πολλαπλασιάζουμε τίς ἀνισότητες καί μετά τίς ἁπλοποιήσεις λαμβάνουμε: $|\lambda_{N_0+n}| < q^n|\lambda_{N_0}|$, τοῦ $n \to +\infty$ τό τό $q^n \to 0$ συνεπῶς καί τό $\lambda_{N_0+n} \to 0$ ἤτοι, τό $\lambda_n \to 0$ τοῦ $n \to +\infty$. Ἔχουμε λοιπόν τό ἑξῆς ἀνάπτυγμα τῆς διωνυμικῆς συναρτήσεως $f(x)=(1+x)^\alpha$, μέ $\alpha \in R$ καί $|x| < 1$.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n-1)}{n!}x^n + \cdots \quad \text{μέ} \quad |x| < 1 \qquad (1)$$

'Ο ἀνωτέρω τύπος ἰσχύει καί $\forall x \in R$ ἐφόσον ὅμως $\alpha \in N$.

'Ο τύπος (1) ἀποτελεῖ γενίκευση τοῦ τύπου τοῦ διωνύμου, διά τοῦτο καί καλεῖται διωνυμικόν ἀνάπτυγμα.

6.3. Εὔκολα μποροῦμε νά διαπιστώσουμε ὅτι ὁ τύπος (1) ἰσχύει καί γιά τίς περιπτώσεις ὅπου $x=\pm 1$ μέ $\alpha > 0$. 'Ακόμη δέ μέ $x=1$ ἰσχύει καί ὅταν $\alpha+1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > -1$.

Γιά τήν περίπτωση ὅπου $|x| > 1$ καί $\alpha \in R$ ὁ τύπος (1) δέν ἰσχύει καθότι, καί σέ ἐκείνη τήν περίπτωση κατά τήν ὁποία $(1+x)^\alpha$, $\alpha \in R$ ἔχει ἔννοια, ἡ σειρά τοῦ δευτέρου μέλους θά ἀποκλίνει. Συνοψίζοντας ἔχομε:

6.3.1. 'Εάν ὁ α εἶναι φυσικός ἤ μηδέν ἔχομεν πεπερασμένον ἀνάπτυγμα $\forall x \in R$.

6.3.2. 'Εάν $\alpha > 0$, ἀλλά δέν εἶναι ἀκέραιος, ἡ σειρά συγκλίνει (ἀπολύτως) διά $-1 \leq x \leq 1$.

6.3.3. 'Εάν $-1 < \alpha < 0$ ἡ σειρά συγκλίνει μέ $-1 \leq x \leq 1$.

6.3.4. 'Εάν $\alpha \leq -1$ ἡ σειρά συγκλίνει μέ $-1 < x < 1$.

"Αρα τό διωνυμικόν ἀνάπτυγμα εἶναι σειρά συγκλίνουσα διά $-1 < x < 1$ σέ ἀντίθεση μέ τό διώνυμο τοῦ Νεύτωνος τό ὁποῖο ἰσχύει μέ ὅλα τά x.

6.4. 'Ενδιαφέρουσες εἰδικές περιπτώσεις.

6.4.1. Θέτοντας στόν τύπο (1) $\alpha = \frac{1}{2}$ ἐπειδή εἶναι

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{1(-1)(-3)(-5)\cdots(-2n+3)}{2^n \cdot n!} =$$

$$=(-1)^{n-1} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}$$

ἔχουμε:

$$\sqrt{1+x}=(1+x)^{1/2}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)}x^n+\cdots$$

μέ $|x|<1$.

6.4.2. Ἐάν τώρα στόν τύπο (1) θέσουμε $\alpha=-\frac{1}{2}$ ἐπειδή εἶναι $\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}=\frac{(-1)(-2)\cdots(-2n+1)}{2^n\cdot n!}=$

$=(-1)^n\,\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)}$ ἔχουμε:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{-1/2}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)}x^n+\cdots$$

$|x|<1$.

6.4.3. Θέτοντας στόν τύπο (1) $\alpha=-1$ βρίσκουμε τελικῶς

$$\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad \text{μέ} \quad |x|<1$$

6.4.4. Εἶναι γνωστό ὅτι $\{\log(1+x)\}'=\frac{1}{1+x}$ καί λόγῳ τῆς 6.4.3. ἔχουμε:

$$\{\log(1+x)\}'=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad \text{διά} \quad |x|<1.$$

Ἐπειδή δέ ἡ $\sum_{0}^{\infty}(-1)^n x^n$ συγκλίνει ὁμαλῶς μέ $|x|<1$ (I. Χαΐνης, Μαθήματα ἀνωτέρων μαθηματικῶν), μέ ὁλοκλήρωση ἔχουμε

$$\log(1+x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

διά $|x|<1$.

Μέ $x=1$ ἔχουμε: $\log2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}+\cdots$

6.4.5. Ἔχοντας ὑπόψη τήν περίπτωση 6.4.2 μποροῦμε νά γράφουμε:

$$(1-x^2)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)}x^{2n}+\cdots \quad \text{διά}$$

$1-x^2| < 1.$

Ἡ ἀνωτέρω σειρά εἶναι συγκλίνουσα διά $|-x^2| < 1$, δηλαδή μέ $|x| < 1$ καί ἀποκλίνουσα μέ $|-x^2| > 1$, δηλ. γιά $|x| > 1$.

Ἐξάλλου εἶναι γνωστό ὅτι: $(\text{τοξημx})' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Ἐπειδή ἔχουμε ὁμαλή σύγκλιση τῆς ἀνωτέρω σειρᾶς, μέ ὁλοκλήρωση κατά ὅρους λαμβάνουμε:

$$\text{τοξημx}=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{3}{8}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots+$$

$$+\frac{1\cdot3\ldots(2n-1)}{2\cdot4\ldots(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

6.4.6. Ἔχοντας ὑπόψη τήν περίπτωση 6.4.3 μποροῦμε νά γράφουμε θέτοντας ἀντί τοῦ x τό x^2

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots \quad \text{διά} \quad |x| < 1$$

(ἡ ἀκτίνα συγκλίσεως εἶναι 1).

Ἐξάλλου $(\text{τοξ}_0\text{εφx})' = \frac{1}{1+x^2}$ καί $\text{τοξ}_0\text{εφ}0=0$.

Μέ ὁλοκλήρωση κατά ὅρους τῆς ἀνωτέρω σειρᾶς λαμβάνουμε:

$$\text{τοξ}_0\text{εφx}=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+$$

$$+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots \quad \text{διά} \quad |x| < 1.$$

Θέτοντας στόν άνωτέρω τύπο $x=1$ καί έπειδή $\text{τοξεφ}1=\frac{\pi}{4}$ λαμβάνουμε:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\quad +(-1)^n\frac{1}{2n+1}+$$

(Τύπος τοῦ J. Gregory).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Apostol T.: Διαφορικός καί όλοκληρωτικός λογισμός, 'Αθῆναι 1961.

2. Βαβαλέτσκος Θ. - Μποῦσγος Γ: Μαθηματικά Α΄ Λυκείου, 'Αθήνα 1977.

3. Κάππος Δ: 'Απειροστικός λογισμός, 'Αθῆναι 1960.

4. Μαθηματική έπιθεώρηση, τεῦχος 2.

5. Ντζιώρας Ηλ.: Μαθηματικά Β΄ Λυκείου, 'Αθήνα 1977.

6. Σαραντόπουλος Σπ.: Διαφορικός λογισμός.

7. Στάϊκος Β.: Μαθηματικά ΣΤ΄ Γυμνασίου, 'Αθήνα 1975.

8. Χαΐνης Ι.: Μαθήματα άνωτέρων μαθηματικῶν, 'Αθήνα 1974.